This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

UC-NRLF
$B 680 716

Digitized by Google

LIBRARY
UNIVERSITY OF CALIFORNIA
DAVIS

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

17

MONATSHEFTE

FÜR

MATHEMATIK UND PHYSIK

VOLUME 20

1909

JOHNSON REPRINT CORPORATION
New York, New York

Digitized by Google

Digitized by Google

MONATSHEFTE

FÜR

MATHEMATIK UND PHYSIK.

MIT UNTERSTÜTZUNG DES

HOHEN K. K. MINISTERIUMS FÜR KULTUS UND UNTERRICHT

HERAUSGEGEBEN VON

G. v. ESCHERICH, F. MERTENS und W. WIRTINGER

IN WIEN.

XX. JAHRGANG.

WIEN, 1909.

LIBRARY
UNIVERSITY OF CALIFORNIA
DAVIS

Digitized by Google

First reprinting, 1958, Johnson Reprint Corporation

Copyright vested in the Attorney General of the
United States, pursuant to law. Manufactured and
sold under License No. A-1738 of the
Attorney General of the United States.

Digitized by Google

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Arndt, Bruno, Über die Verallgemeinerung des Krümmungsbegriffes für Raumkurven 343

Biermann, Otto, Zur näherungsweisen Kubatur 321

Dorner, O., Über Teiler von Formen 242

Frank, Philipp, Ein Kriterium für die Stabilität der Bewegung eines materiellen Punktes in der Ebene und dessen Zusammenhang mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung 171

Frank, Philipp, Unstetige Lösungen beim Prinzip der kleinsten Wirkung . 189

Frank, Philipp, Eine Bemerkung über indefinite Variationsprobleme 273

Godeaux, Lucien, Sur une coïncidence bicubique 269

Hahn, Hans, Über Bolzas fünfte notwendige Bedingung in der Variationsrechnung 279

Meder, A., Bemerkung zu zwei Sätzen v. Staudts 186

Oekinghaus, E., Die Rotationsbewegungen der Langgeschosse während des Fluges 55

Oppenheimer, Hermann, Über Dreiecks- und Vielecksysteme als Träger der Kurve dritter Ordnung 141

v. Puzyna, Josef, Geometrisches in der Weierstraßschen Theorie der algebraischen Funktionen . . . . . 3 u. 193

Saalschütz, Louis, Die Darstellung der rationalen Brüche als Potenzsummen von $\frac{1}{2}$ 327

Tietze, Heinrich, Notiz zur Approximation von Potenzreihen durch rationale Funktionen 285

Tuschel, Ludwig, Über eine krummlinige Projektion und deren Verwendung in der darstellenden Geometrie 358

Waelsch, Emil, Über Kugelfunktionen, ihre binären Formen und Vielbeine . 289

Wagner, R., Zur Theorie der freien Schwingungen einer rechteckigen Membran 133

Literaturberichte.

Abraham, M., Theorie der Elektrizität 62

Ahrens, W., Dr., Mathematische Spiele 8

Andoyer, H., Cours d'Astronomie, seconde partie: „Astronomie pratique" . . 53

Andrews, W. S., Magic squares and cubes 57

Annuaire pour l'an 1909 14

Arnoux, Gabriel, Arithmétique graphique 57

Arrhenius, Svante, Die Vorstellung vom Weltgebäude im Wandel der Zeiten 9

Astronomischer Kalender für 1909 37

Digitized by Google

Seite

Baire, René, Leçons sur les théories générales de l'analyse 52
Bendt, Franz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung 15
Bennecke, F., Eine konforme Abbildung als zweidimensionale Logarithmentafel zur Rechnung mit komplexen Zahlen 26
Bôcher, Maxime, Introduction to higher Algebra 57
Bohn, Heinrich, Prof., Leitfaden der Physik 20
Bojko, J., und *Wendling, E.*, Neues System zum technischen Kopfrechnen . 54
Bolza, Oskar, Vorlesungen über Varintionsrechnung 45
Böttger, A., Die Stereometrie 64
Brillouin, Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz 11
Bruno, Die Grundlehren der Integral- und Differentialrechnung 20
Burkhardt, H., Vorlesungen über die Elemente der Differential- und Integralrechnung und ihre Anwendung zur Beschreibung von Naturerscheinungen 40
Cantor, Moritz, Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen 35
Cantor, Moritz, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik 36
Chwolson, D. O., Lehrbuch der Physik 17
Claude, G., Schule der Elektrizität 60
Crantz, Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht 29
Czuber, E., Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung 14
Danneel, Heinrich, Dr., Elektrochemie II. 50
Dannemann, Friedrich, Dr., Aus der Werkstatt großer Forscher 59
v. Dantscher, V., Vorlesungen über die Weierstraßsche Theorie der irrationalen Zahlen 3
Dingler, Hugo, Grundlinien einer Kritik und exakten Theorie der Wissenschaften, insbesondere der mathematischen 51
Doležal, Eduard, Internationales Archiv für Photogrammetrie 16
Duhem, Pierre, Ziel und Struktur der physikalischen Theorien 8
Dumesnil, Georges, Sur la forme des chiffres usuels 35
Düsing, R., Die Elemente der Differential- und Integralrechnung in geometrischer Methode 11
Eggert, P., Dr., Einführung in die Geodäsie 22
Fabry, E., Traité de mathématiques générales à l'usage des chimistes, physiciens, ingenieurs et des élèves des facultés des sciences 37
Fazzari, Gaetano, Breve storia della matematica dai tempi antichi al medioevo 34
Fischer, Paul B., Determinanten 55
Fouët, Edouard, Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques 52
Fournier d'Albe, E. E., Die Elektronentheorie, gemeinverständliche Einführung in die moderne Theorie der Elektrizität und des Magnetismus . . 9
Friedrichs, H., Das Feldmessen des Tiefbautechnikers 15
Gans, Richard, Dr., Einführung in die Theorie des Magnetismus 49
Gockel, Albert, Dr., Die Luftelektrizität 59
Heis, Sammlung von Beispielen und Aufgaben 31
Hermite, Ch., Oeuvres 25
Herre, P., Dr., Wissenschaft und Bildung 19
Hochheim, Franz, Dr., Elementare Theorie der Wechselströme 47

Digitized by Google

Seite

Hočevar, Lehr- und Übungsbuch der Arithmetik 31
van't Hoff, J. H., Die Lagerung der Atome im Raume 47
Jäger, Gustav, Prof. Dr., Sammlung Göschen Nr. 374: Theoretische Physik IV 58
Jahnke, E., Prof., Mathematisch-physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende 49
Kalähne, A., Dr., Die neueren Forschungen auf dem Gebiete der Elektrizität und ihre Anwendungen 10
Kayser, H., Lehrbuch der Physik 17
Kayser, H., Handbuch der Spektroskopie 48
Kleiber, Johann und *Hugo Scheffler*, Elementarphysik mit Chemie 19
Kleiber, Johann, Experimental-Physik 63
Kleiber, Johann, Lehrbuch der Physik 63
Klein, J., Wendland, P., Brandl, Al., Harnack, Ad., Universität u. Schule 24
Kischke, Richard, Über Fehlerabschätzung bei unendlichen Produkten und deren Anwendungen 41
Knoche, H., Theoretisch-praktische Anleitung zur Erteilung des Rechen- und Raumlehrunterrichts 30
Kohlrausch, F. L., Einführung in die Differential- und Integralrechnung nebst Differentialgleichungen 39
Kowalewski, G., Einführung in die Infinitesimalrechnung 33
Lange, J., Synthetische Geometrie der Kegelschnitte nebst Übungsaufgaben für die Prima höherer Lehranstalten 4
Loria, Gino, Vergangene und künftige Lehrpläne 5
Lucas de Pesloüan, Ch., N. H. Abel, sa vie et son oeuvre 25
Mamlock, L., Dr., Stereochemie 16
Meisel, Ferdinand, Dr., Lehrbuch der Perspektive 46
Müller, E., Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen 5
Müller, H., Prof., Einführung in die Differential- und Integralrechnung . . 14
Močniks Lehrbuch der Arithmetik für Untergymnasien 31
Močniks Lehrbuch der Arithmetik und Algebra 32
Napravnik, Vollständig gelöste Maturitätsaufgaben aus der Mathematik . . . 21
Netto, Eugen, Dr., Gruppen- und Substitutionentheorie 56
Onoranze al Prof. Alfonso Sella 49
Osgood, W., F., Lehrbuch der Funktionentheorie 42
Peek, J. H., La formule $\rho = re^{i(\varphi + i\psi)}$ interprétée géométriquement dans l'espace de manière á prendre la forme d'un quaternion 57
Perry, John, Angewandte Mechanik 60
Peters, J., Dr., Neue Rechentafeln für Multiplikation und Division mit allen ein- bis vierstelligen Zahlen 54
Pfaundler, L., Das chinesisch-japanische Go-Spiel 25
Plank, Max, Dr., Das Prinzip der Erhaltung der Energie 51
Raymond Le Vavasseur, Quelques démonstrations relatives à la theorie des nombres entiers complexes cubiques 25
Rohrbach, Karl, Sternkarten 23
Rouse-Ball, W., Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes 56

Digitized by Google

Seite

Schaefer, Clemens, Dr., Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Magnetismus 50
Scheiner, J., Dr., Populäre Astrophysik 11
Schellhorn, Planimetrische Beweise 32
Schick, J., Dr., Barytomik 61
Schneider, F., Zur Methodik der Elementarmathematik 64
Schoenflies, Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten . 26
Schubert, H., Prof. Dr., Sammlung Göschen Nr. 81: Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen 58
Schubert, Niedere Analysis 22
Schumacher, Joh. Dr., Ein Rechenschieber mit Teilung in gleiche Intervalle auf der Grundlage der zahlentheoretischen Indizes 55
Schultze, A., Differential- und Integralrechnung im Unterricht 39
Schwering, K., Prof. Dr., Handbuch der Elementarmathematik für Lehrer 24
Schwering, K., und *Krimpshoff, W*, Ebene Geometrie 64
Serret, J. A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung nach Axel Harnacks Übersetzung 38
Starke, Hermann, Dr., Physikalische Musiklehre 19
Stuyvaert, M., Cinq études de géométrie analytique 33
Sylvester, J. J., The collected mathematical papers 23
Tannery, Jules, Manuscrits de Evariste Galois 37
Tesař, L., Elemente der Differential- und Integralrechnung 12
Teubners, G. B. Verlag auf dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften 24
Thomae, J., Vorlesungen über bestimmte Integrale und die Fourierschen Reihen 39
Thomson, J. J., Die Korpuskulartheorie der Materie 18
Treutlein, Mathematische Aufgaben aus den Reifeprüfungen der badischen Mittelschulen 22
Turpain, Albert, La télégraphie sans fil et les applications pratiques des ondes électriques 61
Vater, Richard, Prof., Hebezeuge 11
Villard, P., Les rayons cathodique 48
Volquardts, G., Feldmessen und Nivellieren 15
Wagner, Karl Willy, Elektromagnetische Ausgleichungsvorgänge in Freileitungen und Kabeln 50
Wernicke, Gustav, Elektrotechnische Messungen und Meßinstrumente . . . 58

Digitized by Google

Geometrisches in der Weierstraßschen Theorie der algebraischen Funktionen.

Von **Josef v. Puzyna.**

In den Untersuchungen, welche ich im vorliegenden Aufsatze durchführe, versuche ich die zwei voneinander so sehr abweichenden Methoden in der Behandlung der algebraischen Funktionen, nämlich: die geometrische einerseits und die rein funktionentheoretische anderseits, in ein einheitliches Ganze zu bringen, ohne das algebraische Gebilde durch irgend welche rational umkehrbaren Transformationen in ein einfacheres umzuformen.

Dazu war es notwendig, mit der geometrischen Diskussion der Weierstraßschen Transformationen zu beginnen, welche im I. Kapitel durchgeführt wird.. Im weiteren zerlege ich die vielfachen Punkte in ihre Zusammensetzungsreihen und vertrete sie durch die äquivalente Anzahl von Doppelpunkten, ohne jedoch die höheren Singularitäten in die gewöhnlichen aufzulösen (Kap. II).

Die Bedingungen, welche notwendig sind, um eine Kurve mit den geforderten zusammengesetzten vielfachen Punkten zu definieren, werden dann zur Bildung adjungierter Kurven und Funktionen beliebigen Grades angewendet (Kap. III).

Dies führt zur älteren Definition des Ranges und im weiteren zur Darstellung einer beliebigen rationalen Funktion $R(xy)$ als Quotienten zweier passend gewählten adjungierten Funktionen. Die Weierstraßsche H-Funktion wird in dieser Form diskutiert (Kap. IV).

Im Kapitel V wird bewiesen, daß die partiellen Derivierten $f(xy)_1$, $f(xy)_2$ — auch im allgemeinsten algebraischen Gebilde — spezielle adjungierte Funktionen sind, wodurch sich der Rang noch auf eine zweite Art bestimmen läßt. Schließlich wird der Begriff der „deriviert adjungierten Funktionen", welche eine sehr weitläufige Anwendung finden, eingeführt.

Digitized by Google

Kapitel I.

Über die Weierstraßschen Transformationen.

Art. 1. Es sei (x, y), (ξ, η), (ξ_1, η_1), ... eine Reihe je zweier unbeschränkten Veränderlichen, welche man sukzessive mit folgengenden Gleichungen verbindet:

$$(A)\ \begin{cases} x = (g + \alpha\eta)\,\xi \\ y = (h + \beta\eta)\,\xi \end{cases} \qquad (B)\ \begin{cases} \xi = (g_1 + \alpha_1\eta_1)\,\xi_1 \\ \eta = (h_1 + \beta_1\eta_1)\,\xi_1 \end{cases}$$

$$(C)\ \begin{cases} \xi_1 = (g_2 + \alpha_2\eta_2)\,\xi_2 \\ \eta_1 = (h_2 + \beta_2\eta_2)\,\xi_2 \end{cases}$$

. . . . . .

. . . . . .

Die hier auftretenden Größen (g, h), (g_1, h_1), ..., (α, β), (α_1, β_1), ... sind konstant und haben nur folgende Relationen

$$(a)\ (g\beta - h\alpha) = +1, \qquad (b)\ (g_1\beta_1 - h_1\alpha_1) = +1, \ldots$$

zu erfüllen.

Aus diesen wird ersichtlich, daß je zwei Größen

$$(g_s, h_s),\ (\alpha_s, \beta_s),\ (g_s, \alpha_s),\ (h_s, \beta_s)$$

$$s = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$[g_0 = g,\ h_0 = h,\ \alpha_0 = \alpha,\ \beta_0 = \beta]$$

auf einmal nicht verschwinden und daß alle α_s, β_s, wie auch die Werte der g_s, h_s ausfallen, stets als von Null verschieden angenommen werden können.

Aus (A) erhalten wir umgekehrt

$$(A')\qquad \xi = \beta x - \alpha y,\ \eta = \frac{g y - h x}{\beta x - \alpha y}$$

und man sieht, daß, wenn x, y nicht gleichzeitig Null werden, was wir mit $(xy) \neq 0$ bezeichnen, jedem Punkte $(xy) \neq 0$ ein ganz bestimmter Punkt $(\xi\eta)$ entspricht.

Wird hingegen $x = y = 0$, was wir mit $(xy) = 0$ bezeichnen wollen, so entspricht dem Punkte $(xy) = 0$ die Gerade von der Gleichung $\xi = 0$ und dieses Entsprechen stellt sich hier folgendermaßen dar: Setzt man

$$\lim_{\substack{x=0\\y=0}} \left(\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{y}{x}\right)_0 = l,$$

Digitized by Google

wo l eine ganz beliebig angenommene Größe sein kann, so haben wir aus den Gleichungen (A'):

$$(1) \qquad \xi = 0,\ \eta = \frac{gl - h}{\beta - \alpha l} = \eta_l = L$$

und dies heißt:

I. Allen Punkten der Geraden $\xi = 0$ entspricht zwar ein einziger Punkt $(xy) = 0$, er wird aber — wenn der Punkt auf der Geraden $\xi = 0$ die Stelle $(0, \eta_l)$ einnimmt, mit der Richtung l erreicht.

Die Größe l nennen wir die Bestimmung des Punktes $(xy) = 0$ und bezeichnen den Punkt $(xy) = 0$, dem diese Bestimmung zugehört, mit $(xy)_l = 0$. $[(xy)_l = 0,\ (xy)_{l'} = 0$, wo $l \neq l'$ ist, werden für zwei verschiedene Punkte gehalten.] Wir können jetzt den Satz I auch so aussprechen:

I'. Bewegt sich der Punkt $(\xi\eta)$ auf der Geraden $\xi = 0$ nach dem Gesetze $(0, \eta_l)$, $|l| = (0 \ldots \infty)$, so entspricht ihm der Punkt $(xy) = 0$ mit der veränderlichen Bestimmung l.

Wird speziell $l = \frac{h}{g}$, so entsprechen sich gegenseitig die Punkte

$$(x)_{\frac{h}{g}} = 0,\ (\xi\eta) = 0.$$

Wir können den Satz I auch direkt aus den Gleichungen (A) herleiten.

Sollen nämlich die Punkte $(\xi\eta)$, welche dem Punkte $(xy) = 0$ zu entsprechen haben, nicht ausschließlich im Unendlichen liegen, so kann $x = y = 0$ nur dann werden, wenn $\xi = 0$ wird. Denn, sollten in (A) die ersten Faktoren $g + \alpha\eta = 0$, $h + \beta\eta = 0$ werden, dann müßte $g\beta - h\alpha = 0$ sein, was aber der Bedingung (a) widerspricht.

Art. 2. Wird man weiter in (A) für ξ, η die Ausdrücke (B) einsetzen, so hat man:

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= [g + \alpha(h_1 + \beta_1\eta_1)\xi_1](g_1 + \alpha_1\eta_1)\xi_1 = \sigma_1(\xi_1, \eta_1) \\ y &= [h + \beta(h_1 + \beta_1\eta_1)\xi_1](g_1 + \alpha_1\eta_1)\xi_1 = \sigma_1'(\xi_1, \eta_1). \end{aligned}$$

Versucht man nun hier wieder alle Punkte $(\xi_1\eta_1)$, welche dem Punkte $(xy) = 0$ zu entsprechen haben und welche nicht ausschließlich im Unendlichen liegen sollen, aufzusuchen, so muß man vor allem bemerken, daß — wegen der Bedingung (a) — die ersten in (2) auftretenden Faktoren für endliche (ξ_1, η_1) gleichzeitig nicht verschwinden können.

Digitized by Google

Die fraglichen Punkte entspringen demnach aus dem Nullsetzen der letzten und der vorletzten Faktoren und erfüllen:

α) Die Gerade $\xi_1 = 0$, $[\xi_1 = 0,\ \eta_1$ beliebig]

β) die Gerade $\eta_1 = -\frac{g_1}{\alpha_1}$, $[\eta_1 = -\frac{g_1}{\alpha_1},\ \xi_1$ beliebig].

Für alle Punkte der Geraden α) erhalten wir aus (2):

$$\left(\frac{y}{x}\right)_0 = l_1 = \frac{h}{g}$$

und für alle Punkte der Geraden β) nach Berücksichtigung der Bedingung (*b*):

$$\left(\frac{y}{x}\right)_0 = l_1 = \frac{\alpha_1 h - \beta \xi_1}{\alpha_1 g - \alpha \xi_1}. \tag{3}$$

Daraus ergibt sich

$$\xi_1 = -\alpha_1 \frac{g l_1 - h}{\beta - \alpha l_1} = \xi_1(l_1) \tag{4}$$

und es wird gefolgert:

II. Der Geraden $\xi_1 = 0$ [und speziell dem Punkte $(\xi_1 \eta_1) = 0$] entspricht der Punkt $(xy) = 0$ mit der einzigen Bestimmung $l_1 = \frac{h}{g}$, hingegen der Geraden $\eta_1 = -\frac{g_1}{\alpha_1}$ entspricht dieser Punkt mit der unendlich vieldeutigen Bestimmung, und zwar so, daß dem Punkte

$$\left[\eta_1 = -\frac{g_1}{\alpha_1},\ \xi_1 = \xi_1(l_1)\right],\quad |l_1| = (0 \cdots \infty)$$

dieser Geraden der Punkt $(xy)_{l_1} = 0$ entspricht.

Unter den Punkten $(xy)_{l_1} = 0$ wird auch der Punkt $(xy)_{\frac{h}{g}} = 0$ enthalten. Er entspricht nach (4) dem Punkte $\left(\xi_1 = 0,\ \eta_1 = -\frac{g_1}{\alpha_1}\right)$ der Geraden β).

Art. 3. Wir wollen zu denselben Schlüssen noch am anderen Wege gelangen.

Aus den Gleichungen (*A*), (*B*) lassen sich ξ_1, η_1 durch x, y mit folgenden Formeln ausdrücken

Digitized by Google

$$(B') \qquad \xi_1 = \frac{\beta_1(\beta x - \alpha y)^2 - \alpha_1(gy - hx)}{\beta x - \alpha y}$$
$$\eta_1 = \frac{g_1(gy - hx) - h_1(\beta x - \alpha y)^2}{\beta_1(\beta x - \alpha y)^2 - \alpha_1(gy - hx)}.$$

Befreit man diese Gleichungen von den Brüchen, so bekommt man:

$$(P_1) \qquad (\beta\xi_1 - \alpha_1 h)x + (\alpha_1 g - \alpha\xi_1)y = \beta_1(\beta x - \alpha y)^2$$

$$(P_2) \qquad (\alpha_1\eta_1 + g_1)(gy - hx) = (\eta_1\beta_1 + h_1)(\beta x - \alpha y)^2.$$

Dies sind augenscheinlich die Gleichungen zweier Parabeln, welche resp. von den Parametern ξ_1, η_1 abhängen und — ohne Rücksicht auf die Werte von ξ_1, η_1 — durch den Punkt $(xy) = 0$ hindurchgehen.

Einem beliebigen Punkte $(\xi_1\ \eta_1)$ entsprechen die gemeinsamen Punkte dieser Parabeln — unter diesen der Punkt $(x, y) = 0$ mitgerechnet.

Es muß jedoch das Entsprechen eines vollkommen veränderlichen Punktes $(\xi_1\ \eta_1)$ mit $(xy) = 0$ weggeworfen werden, weil erstens: ein solches Entsprechen mit den Gleichungen (2) im Widerspruche steht und zweitens: weil wir im Punkte $(xy) = 0$ einen Punkt mit der Bestimmung (ein Linienelement) haben wollen. Dies wird erreicht, wenn ξ_1, η_1 auf solche Werte beschränkt werden, bei welchen sich die Parabeln in $(xy) = 0$ berühren. Im $(xy) = 0$ besitzen diese Parabeln die Tangenten:

$$(5) \qquad (\beta\xi_1 - \alpha_1 h)x + (\alpha_1 g - \alpha\xi_1)y = 0$$

$$(6) \qquad (\alpha_1\eta_1 + g_1)(gy - hx) = 0.$$

Man sieht leicht, daß für $\xi_1 = 0$ und bei einem beliebigen η_1 fallen die beiden Tangenten (5), (6) zusammen, und zwar in die Gerade $(gy - hx) = 0$. Die Parabeln besitzen dann in $(x, y) = 0$ ein gemeinsames Linienelement, dessen Richtung $\left(\frac{y}{x}\right)_0 = \frac{h}{g}$ ist und der in diesem Linienelement liegende Punkt $(xy)_{\frac{h}{g}} = 0$ — im Einklang mit dem Satze II — der Geraden $\xi_1 = 0$ entspricht.

Für $\eta_1 = -\frac{g_1}{\alpha_1}$ und ein beliebiges ξ_1 wird die zweite Parabel (P_2) zu einer Doppelgeraden von der Gleichung $(\beta x - \alpha y)^2 = 0$. Diese schneidet im $(xy) = 0$ in der Tangente (5) und also auch in der Parabel (P_1) ein Linienelement mit der Richtung

$$\left(\frac{y}{x}\right)_0 = \frac{\alpha_1 h - \beta\xi_1}{\alpha_1 g - \alpha\xi_1} = l_1$$

aus.

Digitized by Google

Dies stimmt mit der Formel (3) vollkommen überein. Der Punkt $(x\,y)_{l_1} = 0$ entspricht der Geraden $g_1 + \gamma_{l1}\,\alpha_1 = 0$.

Art. 4. Wird man nun weiter in der Formel für x in (2) die Indices aller rechts auftretenden Buchstaben um Eins erhöhen, so wird der so gebildete Ausdruck

$$[g_1 + \alpha_1 (h_2 + \beta_2\,\eta_{l2})\,\xi_2]\cdot(g_2 + \sigma_2\,\eta_{l2})\cdot\xi_2 \tag{7}$$

als gemeinsamer Faktor der Formen, welche x und y durch ξ_2, η_{l2} darstellen sollen. Man braucht noch dem Ausdrucke (7) resp. die Faktoren hinzuzufügen, welche aus den ersten Faktoren in (2) so entstehen, daß man dort für ξ_1, η_1 die Formeln (C) substituiert. [1])

Bezeichnet man diese Faktoren kurz mit:

$$[g + \alpha F_2(\xi_2\,\eta_{l2})],\ [h + \beta F_2(\xi_2\,\eta_{l2})],$$

so hat man:

$$\begin{aligned} x &= [g + \alpha F_2(\xi_2\,\eta_{l2})]\cdot[g_1 + \alpha_1(h_2 + \beta_2\,\eta_{l2})\,\xi_2]\cdot(g_2 + \alpha_2\,\eta_{l2})\,\xi_2 = \sigma_2(\xi_2\,\eta_{l2}) \\ y &= [h + \beta F_2(\xi_2\,\eta_{l2})]\cdot[g_1 + \alpha_1(h_2 + \beta_2\,\eta_{l2})\,\xi_2]\cdot(g_2 + \alpha_2\,\eta_{l2})\,\xi_2 = \sigma_2'(\xi_2\,\eta_{l2}). \end{aligned} \tag{8}$$

Man sieht, daß auch hier die ersten Faktoren für endliche ξ_2, η_2 gleichzeitig nicht verschwinden können und daß alle Punkte $(\xi_2\,\eta_{l2})$, welche dem Punkte $(x\,y) = 0$ entsprechen sollen, sich aus den weiteren, gemeinsamen Faktoren ergeben werden.

Ist also $(\xi_2\,\eta_{l2})$ irgend eine Nullstelle der Gleichung

$$g_1 + \alpha_1(h_2 + \beta_2\,\eta_{l2})\,\xi_2 = 0, \tag{9}$$

wo zuvörderst $g_1 \neq 0$ vorausgesetzt wird, so hat man hier — in Rücksicht darauf, daß

$$F_2(\xi_2\,\eta_{l2}) = [h_1 + \beta_1(h_2 + \beta_2\,\eta_{l2})\,\xi_2]\cdot(g_2 + \alpha_2\,\eta_{l2})\cdot\xi_2$$

und

$$(h_2 + \beta_2\,\eta_{l2})\,\xi_2 = -\frac{g_1}{\alpha_1}, \qquad g_1\,\beta_1 - h_1\,\sigma_1 = 1$$

ist —

$$\left(\frac{y}{x}\right)_0 = \frac{\alpha_1 h - \beta(g_2 + \alpha_2\,\eta_{l2})\cdot\xi_2}{\alpha_1 g - \alpha(g_2 + \alpha_2\,\eta_{l2})\cdot\xi_2} = l_2,\ |g_2| \geqq 0. \tag{10}$$

Berechnet man aus dieser Gleichung und der Gleichung (9) ξ_2, η_{l2}, so erhält man die Stelle

$$[\xi_2(l_2),\ \eta_{l2}(l_2)],$$

welcher im Gebiete (x, y) der Punkt $(x, y)_{l_2} = 0$ entspricht.

[1]) Diese Vorschrift kann auch bei weiterem Substituieren beibehalten werden.

Digitized by Google

Da die Gleichung (9) im Falle $g_1 \neq 0$ eine Hyperbel definiert, so können wir sagen: Bewegt sich der Punkt $(\xi_2\ \eta_2)$ auf der Hyperbel (9) nach dem Gesetze, welches ihm die Parametergleichungen $\xi_2 = \xi_2(l_2)$, $\eta_2 = \eta_2(l_2)$ vorschreiben, so ändert sich die Bedeutung des diesem beweglichen Punkte entsprechenden Punktes $(xy) = 0$ nach dem Gesetze $(xy)_{l_2} = 0$.

Ist $g_1 = 0$, also α_1 notwendig $\neq 0$, so geht die Hyperbel in das Geradenpaar

$$\alpha_1 (h_2 + \beta_2 \eta_2) \cdot \xi_2 = 0$$

und man sieht aus (10), daß dann allen Punkten der Geraden $\xi_2 = 0$ eine einzige Bestimmung $(xy)_{\frac{h}{g}} = 0$ entspricht.

Bewegt sich hingegen der Punkt auf der Geraden $h_2 + \beta_2 \eta_2 = 0$, so entspricht seiner Lage:

$$\left(\xi_2,\ \eta_2 = -\frac{h_2}{\beta_2}\right)$$

der Punkt $(xy)_{l_2} = 0$, wo in

$$l_2 = \frac{\alpha_1 h \beta_2 + \beta \xi_2}{\alpha_1 g \beta_2 + \alpha \xi_2}$$

ξ_2 beliebig ist.

Speziell wird dem Punkte $\left(\xi_2 = 0,\ \eta_2 = -\frac{h_2}{\beta_2}\right)$ der Geraden $(h_2 + \beta_2 \eta_2) = 0$ der Punkt $(xy)_{\frac{h}{g}} = 0$ entsprechen.

Viel leichter geht es mit der Untersuchung der zwei letzten gemeinsamen Faktoren der Formeln (8). Das Nullsetzen des vorletzten Faktors definiert die Gerade

$$\eta_2 = -\frac{g_2}{\alpha_2}, \quad (\xi_2 \text{ beliebig})$$

und, wenn man dies für η_2 in

$$\frac{y}{x} = \frac{g + \alpha F_2(\xi_2\ \eta_2)}{h + \beta F_2(\xi_2\ \eta_2)}$$

hineinsetzt, erhält man ohne Mühe die zugehörige Bestimmung

$$\left(\frac{y}{x}\right)_0 = \frac{h}{g}.$$

Dasselbe tritt ein, wenn man den letzten in (8) enthaltenen Faktor: ξ_2 gleich Null setzt. Man ersieht daraus, daß allen Punkten des Geradenpaares

$$g_2 + \alpha_2 \eta_2 = 0,\ \xi_2 = 0,$$

Digitized by Google

und also auch speziell dem Punkte $(\xi_2\,\eta_2)=0$, ein einziger Punkt $(xy)_{\frac{h}{g}}=0$ entspricht.

Das Untersuchen des Gebietes $(\xi_2\,\eta_2)$ ergibt also folgendes Resultat:

III. Die Punkte $(\xi_2\,\eta_2)$, denen der Punkt $(xy)=0$ zu entsprechen hat, sind folgende:

1. Die Punkte der Hyperbel

$$g_1+\alpha_1(h_2+\beta_2\,\eta_2)\,\xi_2=0,\quad g_1\neq 0,$$

denen $(xy)_{l_2}=0$ mit veränderlicher Bestimmung l_2 entspricht, und 2. die Punkte des Geradenpaares

$$(g_2+\alpha_2\,\eta_2)\cdot\xi_2=0,$$

welchem $(xy)=0$ mit der konstanten Bestimmung $\frac{h}{g}$ entspricht.

Ist $g_1=0$, so bezieht sich die Veränderlichkeit von l_2 nur auf die Punkte der Geraden $h_2+\beta_2\,\eta_2=0$, indem $\xi_2=0$ die konstante Bestimmung $l_2=\frac{h}{g}$ ergibt.

Art. 5. Wir wollen nun zu demselben Schlusse auch mit Hilfe der inversen Substitutionen gelangen.

Setzt man in (B') für ξ_1, η_1 die Ausdrücke (C), löst die so gebildeten Gleichungen nach ξ_2 und $(\xi_2-\eta_2)$ auf und setzt: $\frac{gy-hx}{\beta x-\alpha y}=L$, so gelangt man schließlich zu folgenden Formeln:

$$(C')\qquad \begin{aligned}\xi_2&=\beta_2[\beta_1(\beta x-\alpha y)-\alpha_1 L]-\alpha_2\frac{g_1 L-h_1(\beta x-\alpha y)}{\beta_1(\beta x-\alpha y)-\alpha_1 L}\\ \eta_2&=\frac{g_2[g_1 L-h_1(\beta x-\alpha y)]-h_2[\beta_1(\beta x-\alpha y)-\alpha_1 L]^2}{\beta_2[\beta_1(\beta x-\alpha y)-\alpha_1 L]^2-\alpha_2[g_1 L-h_1(\beta x-\alpha y)]}.\end{aligned}$$

Für $x=y=0$ erhält man hieraus:

$$(11)\qquad \begin{aligned}\xi_2&=-\alpha_1\beta_2 L_2+\frac{\alpha_2 g_1}{\alpha_1}\\ \eta_2&=\frac{g_1 g_2-h_2\alpha_1^2 L_2}{\beta_2\alpha_1^2 L_2-\alpha_2 g_1},\end{aligned}$$

wo $L_2=\frac{g l_2-h}{\beta-\alpha l_2}$, $l_2=\left(\frac{y}{x}\right)_0$ ist.

Digitized by Google

Eliminiert man aus diesen zwei Gleichungen L_2, so kommt man zur Endgleichung

$$g_1 + \alpha_1 (h_2 + \beta_2 \eta_{l_2}) \xi_2 = 0,$$

welche mit der Hyperbel (9) übereinstimmt. Die Gleichungen (11) sind ihre Parametergleichungen und dem auf ihr beweglichen Punkte $[\xi_2 (l_2), \eta_{l_2}(l_2)]$ entspricht augenscheinlich der Punkt $(xy) = 0$ mit der Bestimmung $(xy)_{l_2} = 0$.

Ist $L_2 = 0$, also $l_2 = \frac{h}{g}$, so hat man aus (11)

$$\xi_2 = \frac{\alpha_2 g_1}{\alpha_1}, \quad \eta_{l_2} = -\frac{g_2}{\alpha_2}, \tag{12}$$

woraus wir folgern, daß in der Hyperbel (11) nur ein einziger Punkt enthalten ist, welchem $(xy)_{\frac{h}{g}} = 0$ entspricht.

Art. 6. Setzen wir weiter

$$\beta_1 (\beta x - \alpha y)^2 - \alpha_1 (gy - hx) = S$$
$$g_1 (gy - hx) - h_1 (\beta x - \alpha y)^2 = T,$$

so werden die Gleichungen (C') nach Befreiung von Brüchen folgende Form haben:

$$\begin{aligned} &\xi_2 (\beta x - \alpha y) S - \beta_2 S^2 + \alpha_2 (\beta x - \alpha y) T = 0 \\ &\eta_{l_2} \beta_2 S^2 - \eta_{l_2} \alpha_2 (\beta x - \alpha y) T - g_2 (\beta x - \alpha y) T + h_2 S^2 = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Dies sind augenscheinlich die Gleichungen zweier Kurven vierter Ordnung, welche ihre Gestalt mit den veränderlichen Parametern ξ_2, η_{l_2} ändern und bei jeden Werten dieser Parameter durch den Punkt $(xy) = 0$ hindurchgehen. Jedem beliebigen Punkte $(\xi_2 \eta_{l_2})$ entsprechen alle Durchschnittspunkte der Kurven (13), der Punkt $(xy) = 0$ fortwährend mitgerechnet.

Berücksichtigen wir nun in (13) die Glieder niedrigster Dimension, indem wir sie gleich Null setzen. Dies liefert die Gleichungen

$$(gy - hx)[-\xi_2 \alpha_1 (\beta x - \alpha y) - \beta_2 \alpha_1^2 (gy - hx) + \alpha_2 g_1 (\beta x - \alpha y)] = 0 \tag{14}$$

$$(gy - hx)[\eta_{l_2} \beta_2 \alpha_1^2 (gy - hx) - \eta_{l_2} \alpha_2 g_1 (\beta x - \alpha y) - g_1 g_2 (\beta x - \alpha y) + h_2 \alpha_1^2 (gy - hx)] = 0, \tag{15}$$

welche je zwei Tangenten der Kurven (13) im $(xy) = 0$ definieren. Der erste Faktor $(gy - hx)$ in (14), (15) zeigt, daß die Kurven jedenfalls in $(xy) = 0$ eine gemeinsame Tangente $gy - hx = 0$ und zufolge dessen auch ein gemeinsames Linienelement mit der Richtung $\frac{h}{g}$ besitzen.

Digitized by Google

Will man also die Punkte $(\xi_2\,\eta_2)$ finden, denen $(xy)=0$ mit einer vorgeschriebenen konstanten oder veränderlichen Bestimmung $\left(\frac{y}{x}\right)_0 = l_2 + \frac{h}{g}$ entsprechen soll, so müssen wir uns zu den zweiten in (14), (15) enthaltenen Faktoren W_1, W_2 wenden, welche eben von ξ_2, η_2 abhängen. Nehmen wir an, daß die Gleichungen $W_1=0$, $W_2=0$ dieselbe Gerade von der Richtung $\frac{y}{x}=l_2$ definieren sollen, so wird diese Richtung natürlich auch in $(xy)=0$ beibehalten, wodurch wir die Bestimmung $\left(\frac{y}{x}\right)_0 = l_2$ gewinnen und die Kurven zwingen, daß sie außer des Linienelements mit der Richtung $\frac{h}{g}$ auch ein solches mit der Richtung l_2 besitzen. Setzen wir nun, wie früher

$$\frac{g\,l_2 - h}{\beta - \alpha\,l_2} = L_2\,,$$

so haben wir jetzt für $x=0$, $y=0$ aus $W_1=0$:

$$-\xi_2\,\alpha_1 - \beta_2\,\alpha_1^2 L_2 + \alpha_2\,g_1 = 0$$

und aus $W_2=0$:

$$\eta_2\,\beta_2\,\alpha_1^2 L_2 - \eta_2\,\alpha_2\,g_1 - g_1\,g_2 + h_2\,\alpha_1^2 L_2 = 0$$

Wird aus diesen Gleichungen L_2 eliminiert, so erhalten wir die Gleichung (11) der Hyperbel: $g_1 + \alpha_1\,(h_2 + \beta_2\,\eta_2)\,\xi_2 = 0$.

Hingegen ergibt der gemeinsame Faktor $(g\,y - h\,x)$ in (14), (15) — wenn man die direkten Transformationen nicht zu Hilfe nimmt — keinen Aufschluß über die Örter, welche dem Punkte $(xy)_{\frac{h}{g}}=0$ zu entsprechen haben.

Wir sind aber im stande, auch hier gewisse Parabeln einzuführen und aus ihnen die fraglichen Örter auszulesen.

Art. 7. Man setzt in (B'), Art. 3, für ξ_1, η_1 resp.

$$(g_2 + \alpha_2\,\eta_2)\,\xi_2\,,\quad (h_2 + \beta_2\,\eta_2)\,\xi_2\,,$$

wodurch die Gleichungen (P_1), (P_2) — (Art. 3) — in:

$$(16)\quad \begin{cases} [\beta(g_2+\alpha_2\eta_2)\xi_2 - \alpha_1 h]\,x + [\alpha_1 g - \alpha\,(g_2+\alpha_2\eta_2)\,\xi_2]\,y - \beta_1(\beta x - \alpha y)^2 = 0 \\ [\alpha_1(h_2+\beta_2\eta_2)\,\xi_2 + g_1]\,(g y - h x) - [\beta_1(h_2+\beta_2\eta_2)\,\xi_2 + h_1]\,(\beta x - \alpha y)^2 = 0 \end{cases}$$

übergehen. — Dies sind wieder die Gleichungen zweier Parabeln, welche im Punkte $(xy)=0$ die Tangenten:

Digitized by Google

$$(t_1)\quad [\beta(g_2+\alpha_2\eta_2)\xi_2-\alpha_1 h]x+[\alpha_1 g-\alpha(g_2+\alpha_2\eta_2)\xi_2]y=0$$

$$(t_2)\quad [\alpha_1(h_2+\beta_2\eta_2)\xi_2+g_1](gy-hx)=0$$

besitzen. Diese — wenn man

$$(g_2+\alpha_2\eta_2)\xi_2=0$$

annimmt — fallen in die Gerade $gy-hx=0$ zusammen und dies zeigt, daß allen Punkten des Geradenpaares $(g_2+\alpha_2\eta_2)\xi_2=0$ ein einziger Punkt $(xy)_{\frac{h}{g}}=0$ entspricht.

Wird hingegen $g_1+\alpha_1(h_2+\beta_2\eta_2)\xi_2=0$ angenommen, so degeneriert die zweite Parabel in eine Doppelgerade und man kommt nach ähnlichem Räsonnement, wie im Art. 3, zum Schlusse, daß allen Punkten der Hyperbel $g_1+\alpha_1(h_2+\beta_2\eta_2)\xi_2=0$ der Punkt $(xy)=0$ entspricht. Die „Bestimmung" dieses Punktes wird aus der Gleichung (t_1) berechnet, und zwar ist sie:

$$(17)\qquad \left(\frac{y}{x}\right)_0=\frac{\alpha_1 h-\beta(g_2+\alpha_2\eta_2)\xi_2}{\alpha_1 g-\alpha(g_2+\alpha_2\eta_2)\xi_2},$$

wo ξ_2, η_2 nur solche Werte annehmen, welche der Gleichung

$$g_1+\alpha_1(h_2+\beta_2\eta_2)\xi_2=0$$

genügen. Man sieht, daß die Formeln (10), (17) identisch sind.

Art. 8. Wir wollen nun weiter — nach der zu Anfang des Art. 4 gegebenen Vorschrift — x und y durch ξ_3, η_3 ausdrücken. Wir erhalten zuvörderst:

$$\text{in } x \text{ den Faktor } g+\alpha.F_3(\xi_3\eta_3)=\Phi_5$$

$$\text{„ } y \text{ „ „ } h+\beta.F_3(\xi_3\eta_3)=\Phi_5',$$

wo

$$F_3(\xi_3\eta_3)=\{h_1+\beta_1[h_2+\beta_2(h_3+\beta_3\eta_3)](g_3+\alpha_3\eta_3)\xi_3\}\cdot$$
$$\cdot[g_2+\alpha_2(h_3+\beta_3\eta_3)\xi_3]\cdot(g_3+\alpha_3\eta_3)\xi_3$$

und dann sukzessive in x und y die gemeinsamen Faktoren:

$$\Phi_4=\{g_1+\alpha_1[h_2+\beta_2(h_3+\beta_3\eta_3)\xi_3]\}(g_3+\alpha_3\eta_3)\xi_3$$
$$\Phi_3=g_2+\alpha_2(h_3+\beta_3\eta_3)\xi_3$$
$$\Phi_2=(g_3+\alpha_3\eta_3),\quad \Phi_1=\xi_1.$$

Werden nun weiter noch folgende Bezeichnungen:

$$\Phi_2'=(h_3+\beta_3\eta_3),\quad \Phi_3'=h_2+\beta_2\Phi_2'\Phi_1$$
$$\Phi_4'=h_1+\beta_1\Phi_3'\Phi_2\Phi_1$$

Digitized by Google

eingeführt, so haben wir jetzt:

$$\Phi_1 = \xi_3$$

$$\Phi_2 = (g_3 + \alpha_3 \eta_3), \qquad \Phi_2' = (h_3 + \beta_3 \eta_3)$$

$$\Phi_3 = g_2 + \alpha_2 \Phi_2' \Phi_1, \qquad \Phi_3' = h_2 + \beta_2 \Phi_2' \Phi_1$$

$$\Phi_4 = g_1 + \alpha_1 \Phi_3' \Phi_2 \Phi_1, \quad \Phi_4' = h_1 + \beta_1 \Phi_3' \Phi_2 \Phi_1$$

$$\Phi_5 = g + \alpha \Phi_4' \Phi_3 \Phi_2 \Phi_1, \quad \Phi_5' = h + \beta \Phi_4' \Phi_3 \Phi_2 \Phi_1,$$

wodurch sich die Transformationen $x = \sigma_3(\xi_3 \eta_3)$, $y = \sigma_3'(\xi_3 \eta_3)$ und die Funktion $F_3(\xi_3 \eta_3)$ in folgenden übersichtlichen Formen

$$x = \Phi_5 \Phi_4 \Phi_3 \Phi_2 \Phi_1, \quad y = \Phi_5' \Phi_4 \Phi_3 \Phi_2 \Phi_1$$

$$F_3(\xi_3 \eta_3) = \Phi_4' . \Phi_3 \Phi_2 \Phi_1$$

ausdrücken lassen.

Daraus folgt, daß x, y gleichzeitig (für endliche ξ_3, η_3) Null werden, wenn entweder $\Phi_1 = 0$ oder $\Phi_2 = 0$ oder $\Phi_3 = 0$ oder endlich $\Phi_4 = 0$ wird. Da nun $F_3(\xi_3 \eta_3)$ die Faktoren Φ_1, Φ_2, Φ_3 enthält, so wird hier für diejenigen ξ_3, η_3, welche einem der Örter

$$\Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \quad \Phi_3 = 0$$

gehören,

$$\left(\frac{x}{x}\right)_0 = l_3 = \frac{h}{g},$$

sein, indem sich diese Bestimmung für $\Phi_4 = 0\,(g_1 \neq 0)$ gleichzeitig mit der Lage dieses Punktes ändert, und zwar so, daß

$$l_3 = \frac{\Phi_5'(\xi_3 \eta_3)}{\Phi_5(\xi_3 \eta_3)}, \quad [\Phi_4 = 0] \tag{18}$$

wird.

Wir sind daher zum folgenden Schlusse gekommen:

IV. Durch die Substitutionen

$$x = \sigma_3(\xi_3 \eta_3), \; y = \sigma_3'(\xi_3 \eta_3)$$

gewinnen wir bis drei Gebilde $\Phi_\varkappa = 0$, $\varkappa = 1, 2, 3$ von der Eigenschaft, daß einem beliebigen in einem dieser Gebilde liegenden Punkte eine einzige Bestimmung $(xy)_{\frac{h}{g}} = 0$ entspricht. Bewegt sich hingegen der Punkt $(\xi_3 \eta_3)$ in der Kurve $\Phi_4 = 0$, so entspricht ihm, im Falle $g_1 \neq 0$, der Punkt $(xy)_{l_3} = 0$ mit der Bestimmung l_3, welche sich mit der Lage des Punktes $(\xi_3 \eta_3)$ ändert.

Digitized by Google

Art. 9. Bevor wir dieses Resultat verallgemeinern, kehren wir auch hier zu den Gleichungen (B'), Art. 3, und ersetzen dort ξ_1, η_1 resp. durch

$$\Phi_3 . \Phi_2 . \Phi_1, \quad \Phi_3' \Phi_2 . \Phi_1.$$

Die Gleichungen (P_1), (P_2), Art. 3, werden dann nach diesem Einsetzen solche Parabeln definieren, welche im Punkte $(x, y) = 0$ die Tangenten

$$(19) \quad \begin{cases} (\beta \Phi_3 \Phi_2 \Phi_1 - \alpha_1 h)\, x + (\alpha_1 g - \alpha \Phi_3 \Phi_2 \Phi_1) = 0 \\ (\alpha_1 \Phi_3' \Phi_2 \Phi_1 + g_1) \cdot (g y - h x) = 0 \end{cases}$$

besitzen.

Wird $\Phi_1 . \Phi_2 . \Phi_3 = 0$, so sind diese Tangenten identisch, fallen in die Gerade $g y - h x = 0$ und deuten in $(xy) = 0$ an ein gemeinsames Linienelement beider Parabeln mit der Richtung $\frac{h}{g}$.

Ist hingegen $g_1 + \alpha_1 . \Phi_3' . \Phi_2 . \Phi_1 = 0$, was augenscheinlich nichts anderes als $\Phi_4 = 0$ ist, so haben wir in $(xy) = 0$ ein bewegliches Linienelement mit veränderlicher Richtung

$$(20) \qquad \left(\frac{y}{x}\right)_0 = l_3 = \frac{\alpha_1 h - \beta \Phi_3 \Phi_2 \Phi_1}{\alpha_1 g - \alpha \Phi_3 \Phi_2 \Phi_1}, \quad \Phi_4 = 0.$$

Man kann leicht aufzeigen, daß die Formeln (18), (20) identisch sind. Beachtet man nämlich, daß

$$F_3(\xi_3 \eta_3) = (h_1 + \beta_1 \Phi_3' . \Phi_2 . \Phi_1)\, \Phi_3 \Phi_2 \Phi_1$$

ist, so kann man (18) in der Form

$$(21) \qquad l_3 = \frac{h + \beta (h_1 + \beta_1 \Phi_3' \Phi_2 \Phi_1) \Phi_3 \Phi_2 \Phi_1}{g + \alpha (h_1 + \beta_1 \Phi_3' \Phi_2 \Phi_1) \Phi_3 \Phi_2 \Phi_1}$$

schreiben. Da nun $\Phi_4 = g_1 + \alpha_1 \Phi_3' \Phi_2 \Phi_1 = 0$ sein soll, so hat man daraus

$$\Phi_3' \Phi_2 \Phi_1 = -\frac{g_1}{\alpha_1}.$$

Berücksichtigt man dies und die Gleichung $g_1 \beta_1 - \alpha_1 h_1 = 1$ in (21), so kommt man zu der Formel (20), w. z. b. w.

Nehmen wir nun an, daß $g_1 = 0$, $(h_1 \neq 0, \alpha_1 \neq 0)$ wird.

In diesem Falle enthält Φ_4 die Faktoren Φ_3', Φ_2, Φ_1 und der Punkt $(xy) = 0$, welcher dem $\Phi_4 = 0$ zu entsprechen hat, zerfällt in zwei verschiedene, und zwar: in den Punkt $(xy)_{l_3} = 0$, welcher dem $\Phi_3' = 0$ entspricht, und in den Punkt $(xy)_{\frac{h}{g}} = 0$, welcher sich aus $\Phi_1 \Phi_2 = 0$ ergibt.

Digitized by Google

Art. 10. Sollen nun jetzt allgemein x, y durch ξ_ν, η_ν ausgedrückt werden und setzt man

$$(23)\quad \begin{cases} \Phi_1 = \xi_\nu, & \\ \Phi_2 = (g_\nu + \alpha_\nu \eta_\nu), & \Phi_2' = (h_\nu + \beta_\nu \eta_\nu) \\ \Phi_3 = g_{\nu-1} + \alpha_{\nu-1} \Phi_2' \Phi_1, & \Phi_3' = h_{\nu-1} + \beta_{\nu-1} \Phi_2' \Phi_1 \\ \Phi_4 = g_{\nu-2} + \alpha_{\nu-2} \Phi_3' \Phi_2 \Phi_1, & \Phi_4' = h_{\nu-2} + \alpha_{\nu-2} \Phi_3' \Phi_2 \Phi_1 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ \Phi_{\nu+1} = g_1 + \alpha_1 \Phi_\nu' \Phi_{\nu-1} \dots \Phi_2 \Phi_1, & \Phi_{\nu+1}' = h_1 + \beta_1 \Phi_\nu' \Phi_{\nu-1} \dots \Phi_2 \Phi_1 \\ \Phi_{\nu+2} = g + \alpha \Phi_{\nu+1}' \Phi_\nu \dots \Phi_2 \Phi_1, & \Phi_{\nu+2}' = h + \beta \Phi_{\nu+1}' \Phi_\nu \dots \Phi_2 \Phi_1, \end{cases}$$

so kommt man zu den Formeln

$$(24)\quad \begin{cases} x = \Phi_{\nu+2} \cdot \Phi_{\nu+1} \cdot \Phi_\nu \dots \Phi_2 \Phi_1 = \sigma_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu) \\ y = \Phi_{\nu+2}' \cdot \Phi_{\nu+1} \cdot \Phi_\nu \dots \Phi_2 \Phi_1 = \sigma_\nu'(\xi_\nu, \eta_\nu). \end{cases}$$

Wird hingegen verlangt, die Variabeln

$$\xi_{\nu-s}, \eta_{\nu-s}, \; s = \nu, \nu-1, \dots 1, \; (\xi_0 = \xi, \eta_0 = \eta)$$

durch ξ_ν, η_ν auszudrücken, so wird von den Funktionen

$$\Phi_{s+1}, \Phi_{s+1}', \Phi_s, \Phi_{s-1}, \dots, \Phi_2, \Phi_1$$

Gebrauch gemacht und gesetzt:

$$(25)\quad \begin{cases} \xi_{\nu-s} = \Phi_{s+1} \cdot \Phi_s \cdot \Phi_{s-1} \dots \Phi_2 \Phi_1 \\ \eta_{\nu-s} = \Phi_{s+1}' \; \Phi_s \; \Phi_{s-1} \dots \Phi_2 \Phi_1 \end{cases}.$$

Aus (23) und den Formeln (24) ersieht man sofort, daß zu den Örtern:

$$\Phi_1 = 0, \Phi_2 = 0, \dots, \Phi_\nu = 0$$

eine einzige Bestimmung $(xy)_{\frac{k}{g}} = 0$ gehört, indem dem Orte $\Phi_{\nu+1} = 0$ — wenn $g_1 \neq 0$ ist — der Punkt $(xy) = 0$ mit der (gleichzeitig mit der Lage des Punktes $(\xi_\nu \eta_\nu)$ auf $\Phi_{\nu+1} = 0$) veränderlichen Bestimmung

$$(26)\quad l_\nu = \frac{\Phi_{\nu+2}'(\xi_\nu \eta_\nu)}{\Phi_{\nu+2}(\xi_\nu \eta_\nu)}, \quad [\Phi_{\nu+1} = 0]$$

entspricht.

Digitized by Google

Ist $g_1 = 0$ $[h_1 \neq 0, \alpha_1 \neq 0]$, so wird die Veränderlichkeit von l_ν beschränkt, indem sie nur dem Orte $\Phi'_\nu = 0$ entspricht.

Zu denselben Schlüssen gelangt man, wenn man in den Gleichungen (P_1), (P_2) und (5), (6) — Art. 3 — ξ_1, η_1 nach der Vorschrift der Formeln (25) resp. durch:

$$\Phi_\nu \Phi_{\nu-1} \Phi_{\nu-2} \dots \Phi_2 \Phi_1$$

$$\Phi'_\nu \Phi_{\nu-1} . \Phi_{\nu-2} \dots \Phi_2 \Phi_1$$

ersetzt.

Wir bekommen dann zwei Parabeln (P'_1) (P'_2) mit den Tangenten

$$(\beta \Phi_\nu \Phi_{\nu-1} \dots \Phi_2 \Phi_1 - \alpha_1 h)\, x + (\alpha_1 g - \alpha \Phi_\nu \Phi_{\nu-1} \dots \Phi_2 \Phi_1)\, y = 0$$

$$(\alpha_1 \Phi'_\nu \Phi_{\nu-1} \dots \Phi_2 \Phi_1 - g_1)(g y - h x) = 0$$

in $(xy) = 0$, und diese ergeben $(xy)_{\frac{h}{g}} = 0$ für alle Punkte der Kurven

$$\Phi_1 = 0, \Phi_2 = 0, \dots, \Phi_\nu = 0$$

und $(xy)_{l_\nu} = 0$ für alle Punkte der Kurve $\Phi_{\nu+1} = 0$, wo

$$(27) \qquad l_\nu = \frac{\alpha_1 h - \beta \Phi_\nu . \Phi_{\nu-1} \dots \Phi_2 \Phi_1}{\alpha_1 g - \alpha \Phi_\nu \Phi_{\nu-1} \dots \Phi_2 \Phi_1}, \quad [\Phi_{\nu+1} = 0].$$

Die beiden Formeln (26), (27) sind identisch. Denn ersetzt man in (26) $\Phi'_{\nu+2}$ und $\Phi_{\nu+2}$ resp. durch

$$h + \beta [h_1 + \beta_1 \Phi'_\nu \Phi_{\nu-1} \dots \Phi_1] \Phi_\nu . \Phi_{\nu-1} \dots \Phi_1$$

$$g + \alpha [h_1 + \beta_1 \Phi'_\nu \Phi_{\nu-1} \dots \Phi_1] \Phi_\nu . \Phi_{\nu-1} \dots \Phi_1$$

und berücksichtigt, daß zufolge der Gleichung

$$\Phi_{\nu+2} = g_1 + \alpha_1 \Phi'_\nu \Phi_{\nu-1} \dots \Phi_1 = 0$$

das Produkt $\Phi'_\nu . \Phi_{\nu-1} \dots \Phi_1$ mit $-\frac{g_1}{\alpha_1}$ vertreten werden kann und daß $g_1 \beta_1 - h_1 \alpha_1 = 1$ ist, so gelangt man nach diesen Umformungen aus (26) zu der Formel (27), w. z. b. w.

Das schließliche Resultat der durchgeführten Untersuchungen ist folgendes:

V. Werden die Veränderlichen x, y mit Hilfe der Substitutionen (A), (B), (C), ..., Art. 1, durch die ν^{ten} Ver-

Digitized by Google

änderlichen ξ_ν, η_ν ausgedrückt, so entspricht jedem beliebigen Punkte $(\xi_\nu \eta_\nu)$, der einem der ν Örter

$$\Phi_1 = 0,\ \Phi_2 = 0, \ldots,\ \Phi_n = 0$$

angehört, stets eine einzige, konstante Bestimmung $(xy)_{\frac{h}{g}} = 0$. Bewegt sich hingegen der Punkt $(\xi_\nu \eta_\nu)$ in der Kurve $\Phi_{\nu+1} = 0$, so entspricht ihm $(xy)_{l_\nu} = 0$ mit der Bestimmung l_ν, welche sich mit der Lage des beweglichen Punktes $(\xi_\nu \eta_\nu)$ ändert.

[Ist $g_1 = 0$, so reduziert sich l_ν für in $\Phi_{\nu+1}$ enthaltenen Faktoren $\Phi_{\nu-1}, \Phi_{\nu-2}, \ldots, \Phi_2, \Phi_1$ zur konstanten Größe $\frac{h}{g}$, indem es für $\Phi'_\nu = 0$ noch veränderlich bleibt.]

Die Funktionen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{\nu+1}$ sind gemeinschaftliche Faktoren in den Endsubstitutionen

$$x = \sigma_\nu(\xi_\nu \eta_\nu),\ y = \sigma'_\nu(\xi_\nu \eta_\nu).$$

Kapitel II.

Diskussion der Singularitäten algebraischer Kurven.

Art. 11. Es sei $G(X, Y) = 0$ die Gleichung einer algebraischen Kurve n^{ten} Grades, welche an den Stellen $M_\delta = (a_\delta, b_\delta)$, $\delta = 1, 2, \ldots, k$, ihre vielfachen Punkte besitzt. In der Umgebung der Stelle M_δ, welche im Endlichen liegt, soll die Kurve durch die Gleichung

$$(1) \qquad F(xy) = (xy)_\mu + (xy)_{\mu+1} + \cdots = 0$$

definiert werden, wo $(xy)_\lambda$, $\lambda = \mu, \mu+1, \ldots$ homogene Funktionen von x, y der Ordnungen λ sind. Die Ordnung μ des Anfangsgliedes $(xy)_\mu$ wird als Ordnung der Gleichung (1) bezeichnet. Infolge der Vielfachheit des Punktes M_δ muß μ notwendig > 1 sein.

Wir setzen

$$(1') \qquad (xy)_\mu = (gy - hx)^\alpha . (g'y - h'x)^\beta . (g''y - h''x)^\gamma \ldots$$

wo die Verhältnisse $h : g$, $h' : g'$, ... voneinander verschieden sind. Wir nehmen an, daß wir solcher verschiedenen Verhältnisse q haben.

Digitized by Google

Nach Weierstraß [Abelsche Transzendenten, Berlin 1902] wird die totale Umgebung des Punktes M_δ bestimmt, wenn zuvörderst die Gleichung $F(xy) = 0$ mit jeder der Substitutionen

$$(2)\qquad \begin{matrix} x = (g + \alpha\,\eta)\,\xi, \\ y = (h + \beta\,\eta)\,\xi; \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x = (g' + \alpha'\,\eta')\,\xi', \\ y = (h' + \beta'\,\eta')\,\xi' \end{matrix}; \ldots; \text{ [Art. 1]}$$

in q Gleichungen transformiert wird. Diese Gleichungen haben die Formen:

$$(3)\qquad \xi^{\mu} f(\xi\,\eta) = 0, \qquad \xi'^{\mu'} f'(\xi'\,\eta') = 0, \ldots$$

wo die linken Seiten die durch die erste, zweite, ... der Substitutionen (2) transformierte Funktion $F(xy)$ darstellen. Nach Weglassung der äußeren Faktoren kommen wir zu den Gleichungen

$$(4)\qquad f(\xi\,\eta) = 0, \qquad f'(\xi'\,\eta') = 0, \ldots$$

Wir setzen

$$(5)\qquad f(\xi\,\eta) = (\xi\,\eta)_{\mu_1} + (\xi\,\eta)_{\mu_1+1} + \cdots$$

und nehmen an, die Ordnung μ_1 sei größer als 1. Dies findet ausschließlich dann statt, wenn in der Stammgleichung $F(xy) = 0$ der Exponent $a > 1$ war, und wenn noch außer $(g\,h)_\mu = 0$ auch $(g\,h)_{\mu+1} = 0$ und möglicherweise auch $(g\,h)_{\mu+1} = 0, \ldots$ wird.

Unter dieser Voraussetzung muß $f(xy) = 0$ oder lieber $\xi^{\mu}.f(\xi\,\eta) = 0$ noch weiteren Transformationen unterzogen werden, und zwar so, daß, wenn in $f(\xi\,\eta) = 0$ das Anfangsglied:

$$(6)\qquad (\xi\,\eta)_{\mu_1} = (g_1\,\eta - h_1\,\xi)^{a_1}(g_1'\,\eta - h_1'\,\xi)^{b_1}$$

ist, so muß $\xi^{\mu}.f(\xi\,\eta) = 0$ durch jede der Substitutionen

$$(7)\qquad \begin{matrix} \xi = (g_1 + \alpha_1\,\eta_1)\,\xi_1, \\ \eta = (h_1 + \beta_1\,\eta_1)\,\xi_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \xi = (g_1' + \alpha_1'\,\eta_1')\,\xi_1', \\ \eta = (h_1' + \beta_1'\,\eta_1')\,\xi_1' \end{matrix}, \ldots$$

transformiert werden. Wir erhalten auf diese Weise aus der ersten der Gleichungen (3) wieder eine gewisse Anzahl (q') der Gleichungen

$$(8)\qquad \xi^{\mu}.\xi_1^{\mu_1} f_1(\xi_1\,\eta_1) = 0, \qquad \xi_1^{\mu}.\xi_1'^{\mu_1} f_1'(\xi_1'\,\eta_1') = 0, \ldots$$

Ihre linken Seiten stellen hier wieder die durch die erste, zweite, ... der Substitutionen (7) transformierte Funktion $\xi^{\mu} f(\xi\,\eta)$ dar. Nach Weglassung der äußeren Faktoren haben wir q' Gleichungen

$$(9)\qquad f_1(\xi_1\,\eta_1) = 0, \quad f_1'(\xi_1'\,\eta_1') = 0, \ldots$$

Wir verfahren auf analoge Weise mit allen jenen Gleichungen (4), derer Ordnungen > 1 sind und auch mit allen Gleichungen (9)

Digitized by Google

von den Ordnungen > 1, indem wir Gleichungen von der Ordnung $= 1$ unverändert lassen. Werden nun weiter alle sukzessiv entstehenden Gleichungen von den Ordnungen > 1 nach der angegebenen Vorschrift behandelt, so müssen wir schließlich nach verschiedenen Anzahlen der Substitutionen zu den Gleichungen gelangen, welche notwendig die Ordnung 1 besitzen. Aus diesen und aus jeder unterwegs gelassenen Gleichung von der Ordnung 1 gewinnen wir je ein Funktionenpaar, welches die Umgebung der Stelle (o, o) dieser Gleichung angibt.

Wird dann rückwärts zu x, y übergegangen, so wird diejenige Umgebung des vielfachen Punktes M_δ, in welcher stets $\left(\frac{y}{x}\right)_0 = \frac{h}{g}$ ist, durch mehrere Funktionenpaare dargestellt.

Analoges muß dann in bezug auf andere in (1′) enthaltenen Faktoren $(g'y - h'x)^b, \ldots$. durchgeführt werden.

Wir gewinnen dadurch weitere Gruppen von Funktionenpaaren, wo jeder der Gruppen nur eine wohl definierte Bestimmung $\left(\frac{y}{x}\right)_0 = \frac{h'}{g'}$, $\left(\frac{y}{x}\right)_0 = \frac{h''}{g''}$ u. s. w. angehört.

Art. 12. Wir wollen nun aus den nach obigem gebildeten Gleichungen eine Kette von Gleichungen, welche ihren Ursprung in dem Faktor $(gy - hx)^a$ finden, herausnehmen. Sind diese Gleichungen

$$F(xy) = 0,\ \xi^\mu f(\xi\eta) = 0,\ \xi^\mu \xi_1^{\mu_1} f_1(\xi_1\eta_1) = 0, \ldots.$$

$$\ldots,\ \xi^\mu \xi_1^{\mu_1} \xi_2^{\mu_2} \ldots \xi_\nu^{\mu_\nu} f_\nu(\xi_\nu\eta_\nu) = 0, \ldots.$$

so sind die Funktionen $F, f, f_1, \ldots, f_\nu, \ldots$ offenbar resp. von der Ordnung $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu + 1, \ldots$ und wenn die Anfangsglieder, welche diese Ordnungen angaben, derart waren, daß

$$(g\,h)_\mu = 0,\ (g_1\,h_1)_{\mu_1} = 0,\ (g_2\,h_2)_{\mu_2} = 0,\ \ldots.$$

so nehmen wir an, daß

(a) $F(xy) = \xi^\mu f(\xi\eta)$ durch die Substitution (A), Art. 1

(b) $f(\xi\eta) = \xi_1^{\mu_1} f_1(\xi_1\eta_1)$ „ „ „ (B), „

(c) $f_1(\xi_1\eta_1) = \xi_2^{\mu_2} f_2(\xi_2\eta_2)$ „ „ „ (C), „

u. s. w. zu stande kommt.

Die Gleichheit

$$F(xy) = \xi^\mu \xi_1^{\mu_1} \xi_2^{\mu_2} \ldots \xi_\nu^{\mu_\nu} f_\nu(\xi_\nu\eta_\nu) \tag{10}$$

Digitized by Google

entstand durch Anwendung der zusammengesetzten Substitution

$$(11)\qquad \begin{aligned} x &= \sigma_\nu(\xi_\nu \eta_\nu) = \Phi_{\nu+2} \cdot \Phi_{\nu+1} \cdots \Phi_2 \Phi_1 \\ y &= \sigma'_\nu(\xi_\nu \eta_\nu) = \Phi'_{\nu+2} \cdot \Phi_{\nu+1} \cdots \Phi_2 \Phi_1 \end{aligned}, \quad [\text{Art. } 10].$$

In (a) entspricht dem $\xi^\mu = 0$ [der μ-fachen Geraden $\xi = 0$] der μ-fache Punkt $(xy)_{\frac{h}{g}} = 0$, [Kap. I, Art. 1] und dies zeigt, daß in M_δ sicher der Punkt $(xy)_{\frac{h}{g}} = 0$ μ-fach enthalten wird. Im gleichen ist $\xi_1^{\mu_1}$ in (b) die Spur eines μ_1-fachen Punktes $(\xi\,\eta) = 0$ in $f(\xi\,\eta) = 0$ u. s. w.

Nun schneiden wir die Kurve $\xi^\mu . f(\xi\,\eta) = 0$ in ihrem Punkte $(\xi\,\eta) = 0$ mit der Geraden, deren Parametergleichungen

$$(p)\qquad \xi = At,\ \eta = Bt$$

sind, und deren Konstanten A, B so gewählt werden, daß $A \neq 0$ ist und $(A, B)_{\mu_1}$ in $f(\xi\,\eta)$ von Null verschieden wird. Sie ist demnach von allen Tangenten der $f(\xi, \eta) = 0$ in $(\xi\,\eta) = 0$ und von der Geraden $\xi = 0$ verschieden.

Sie schneidet die Kurve $\xi^\mu . f(\xi\,\eta) = 0$ in $\mu + \mu_1$ Punkten $(\xi\,\eta) = 0$, und zwar die μ-fache Gerade $\xi = 0$ in μ Punkten und μ_1 Zweige der Kurve $f(\xi\,\eta) = 0$ in μ_1 Punkten.

Nun entspricht dieser Geraden im Gebiete $(x\,y)$ die Kurve

$$(C_0)\qquad \begin{aligned} x &= x_t^{(0)} = (g + \alpha Bt)\, At \\ y &= y_t^{(0)} = (h + \beta Bt)\, At \end{aligned}$$ [1])

und will man ihre Durchschnittspunkte in $(xy) = 0$ mit $F(xy) = 0$ bestimmen, so wird dies erreicht, indem man in $F(xy) = 0$ für x, y das Funktionenpaar $x_t^{(0)}, y_t^{(0)}$ einsetzt. Da jedoch die Gleichungen (C_0) nichts anderes sind als die Substitutionen (A) mit $\xi = At$, $\eta = Bt$, so wird $F(x_t^{(0)}\, y_t^{(0)}) = 0$ mit

$$(12)\qquad \begin{aligned} &A^\mu . t^\mu f(At, Bt) = \\ &= t^\mu . t^{\mu_1} [a_0 + b_0 t + c_0 t^2 + \cdots] = 0 \end{aligned}$$

identisch. Das konstante Glied a_0 ist zufolge der Bedingung $(A, B)_{\mu_1} \neq 0$ von Null verschieden.

---

[1]) In den Koordinaten x, y ist ihre Gleichung

$$(g\,y - h\,x) - \frac{B}{A}(\beta x - \alpha y)^2 = 0.$$

Digitized by Google

Wir ersehen daraus, daß die Kurve C_0, deren Tangente in $(x\,y)=0$ mit der Geraden $(g\,y-h\,x)=0$ identisch ist, die Kurve $F=0$ in $(x\,y)=0$ in $\mu+\mu_1$ Punkten schneidet. Der erste Faktor t^{μ} ist die Spur des bereits konstatierten Punktes P_μ in M_δ. In diesem muß C_0 mit $F=0$ notwendig μ gemeinsame Punkte haben. Der zweite Faktor $t^{\mu_1}=0$ weist darauf hin, daß C_0 mit $F=0$ noch μ_1 gemeinsame Punkte in $(x\,y)=0$ besitzt, und da C_0 nur einen durch $(x\,y)=0$ hindurchgehenden Zweig besitzt, so wird gefolgert, daß in $F=0$ noch ein μ_1-facher Punkt P_{μ_1} in $(x\,y)=0$, und zwar mit der Bestimmung $\frac{h}{g}$ enthalten wird.

Es ist nicht zulässig, die Punkte P_μ, P_{μ_1} als ein Ganzes für einen $(\mu+\mu_1)$-fachen Punkt zu halten. Denn von einem solchen Punkte wird verlangt, daß durch ihn $(\mu+\mu_1)$ Zweige der Kurve hindurchgehen, was aber hier durch die Ordnung μ der Gleichung $F=0$ ausgeschlossen wird. Es müssen demnach die Punkte P_μ, P_{μ_1} für zwei absolut verschiedene vielfache Punkte gehalten werden.

Art. 13. Wir wollen weiter die zweite durch die Substitutionen (B) transformierte Gleichung:

$$(13)\qquad \xi^{\mu}\,.\,\xi_1^{\mu_1} f_1(\xi_1\,\eta_1)=(g_1+\alpha_1\,\eta_{11})^{\mu}\,\xi_1^{\mu+\mu_1} f_1(\xi_1\,\eta_{11})=0,$$

wo wir in $f_1=0$ die Ordnung $\mu_2>1$ voraussetzen, in Betracht ziehen. Schneiden wir die durch diese Gleichung definierte Kurve mit der Geraden:

$$(p_1)\qquad \xi_1=A\,t,\ \eta_{11}=B\,t$$

derer Konstanten die Bedingungen $A\neq 0$, $B\neq 0$, $(A,B)_{\mu_2}\neq 0$ erfüllen sollen, so werden ihre Durchschnittspunkte mit der Kurve (13) durch die Gleichung

$$(14)\qquad (g_1+\alpha_1\,B\,t)^{\mu}\,.\,A^{\mu+\mu_1}\,.\,t^{\mu+\mu_1+\mu_2}[a_1+b_1\,t+\cdots]=0$$

mit $a_1\neq 0$ gegeben. Von diesen berücksichtigen wir

1. den $(\mu+\mu_1+\mu_2)$-fachen Punkt $(\xi_1\,\eta_{11})=0$ und
2. den μ-fachen Punkt $\xi_1=-\frac{A\,g_1}{a_1\,B}$, $\eta_{11}=-\frac{g_1}{\alpha_1}$, welcher von dem Faktor $(g_1+\alpha_1\,Bt)^{\mu}=0$ herrührt und in der Geraden $g_1+\alpha_1\,\eta_{11}=0$ liegt. Die Bedeutung dieser Punkte wird auf folgende Weise aufgeklärt: Der Geraden (p_1) entspricht im Gebiete $(x\,y)$ — nach (11) — die Kurve

$$(C_1)\qquad \begin{aligned} x=x_t'&=\Phi_3(At,Bt)\,.\,\Phi_2(Bt)\,.\,At=\varphi_3(t)\,.\,\varphi_2(t)\,.\,At\\ y=y_t'&=\Phi_3'(At,Bt)\,.\,\Phi_2(Bt)\,.\,At=\varphi_3'(t)\,.\,\varphi_2(t)\,.\,At\ ^{1})\end{aligned}$$

[1]) $\varphi_k(t)$, $\varphi_k'(t)$ bedeuten die Funktionen $\Phi_k(\xi_\nu\,\eta_\nu)$, $\Phi_k'(\xi_\nu\,\eta_\nu)$ für $\xi_\nu=At$, $\eta_\nu=Bt$.

Digitized by Google

welche im Punkte $(xy)=0$ sicher eine Tangente $gy-hx=0$, und zwar für $t=0$ besitzt. Das Einsetzen von x_t', y_t' für x, y in $F=0$, um die Durchschnittspunkte der Kurven C_1 und $F=0$ zu bestimmen, hat hier wieder denselben Erfolg, als das Einsetzen von At und Bt für ξ_1 und η_{11} in $\xi^{\mu}.\xi_1^{\mu_1}f_1(\xi_1\eta_{11})=0$. Dies führt also zu der bereits aufgestellten Gleichung (14), welche jetzt näher zu besprechen ist.

Ist $g_1\neq 0$, so wird $\varphi_2(t)$ für $t=0$ verschieden von Null, und wir finden zuvörderst in $(xy)=0$, $\mu+\mu_1+\mu_2$ Durchschnittspunkte, welche dem Produkte $t^{\mu}.t^{\mu_1}.t^{\mu_2}=0$ in (14) entsprechen.

Die zwei ersten Faktoren: $t^{\mu}=0$, $t^{\mu_1}=0$ beziehen sich auf die früher schon konstatierten vielfachen Punkte P_{μ} und P_{μ_1}. Dem Faktor $t^{\mu_2}=0$ entspricht der Punkt $(xy)_{\frac{h}{g}}=0$ mit μ_2-facher Wiederholung und dies zeigt, daß in $F=0$ zu den Punkten P_{μ}, P_{μ_1} noch ein μ_2-facher Punkt P_{μ_2} in der Richtung $\frac{h}{g}$ hinzutritt, und daß durch diese Punkte derjenige Zweig Z' der Kurve C_1, welcher $gy-hx=0$ zur Tangente hat, hindurchgeht.

Wir wollen weiter noch die Bedeutung des Faktors $[\varphi_2(t)]^{\mu}=[g_1+\alpha_1 Bt]^{\mu}=0$ untersuchen.

Ist $g_1\neq 0$, so verschwindet er für

$$t=-\frac{g_1}{\alpha_1 B}=t'\neq 0. \tag{15}$$

Mit diesem Werte von $t=t'$ gelangen wir wieder zum Punkte $(xy)=0$ der Kurve C_1 und es fragt sich, in welcher Richtung er jetzt erreicht wird?

Um dies zu entscheiden, beachten wir, daß allen Punkten der Geraden $g_1+\alpha_1\eta_{11}=0$ der Punkt $(xy)_{l_1}=0$ mit der veränderlichen Bestimmung

$$l_1=\frac{\Phi_3'(\xi_1\eta_{11})}{\Phi_3(\xi_1\eta_{11})}=\frac{h+\beta(h_1+\beta_1\eta_{11})\xi_1}{g+\alpha(h_1+\beta_1\eta_{11})\xi_1}, \quad \text{(Kap. I, 26),}$$

entspricht. Wird nun hier $\xi_1=At'$ und $\eta_{11}=Bt'$ eingesetzt, so wird — nach allen Vereinfachungen und mit Rücksicht darauf, daß $g_1\beta_1-h_1\alpha_1=1$ ist —

$$l_1=\frac{h\alpha_1^2 B+\beta Ag_1}{g\alpha_1^2 B+\alpha Ag_1}=\frac{H}{G}. \tag{16}$$

Dem Punkte $\xi_1=A.t', \eta_{11}=Bt'$ entspricht demnach der Punkt $(xy)_{l_1}=0$ mit der konstanten Bestimmung $l_1=H/G$, welche auch aus den Gleichungen (C_1) als $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=t'}$ definiert werden kann.

Digitized by Google

Ist $g_1 \neq 0$, so wird $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=t'} = H/G \neq \frac{h}{g}$ [1] und wir ersehen, daß durch den Punkt $(xy) = 0$ noch ein zweiter Zweig Z' der Kurve C_1 hindurchgeht. Die beiden Tangenten dieser Zweige Z, Z' sind voneinander verschieden und der Faktor $[\varphi_2(t)]^{\mu} = 0$ läßt erkennen, daß noch der zweite Zweig Z' die Kurve $F = 0$ in M_δ μ-fach, und zwar in der Richtung $\frac{H}{G}$ schneiden muß.

Für $g_1 = 0$ wird $l_1 = \frac{h}{g}$, wie man aus (16) leicht ersieht.

Dem $t = 0$ entspricht in diesem Falle der Punkt $(xy)_{\frac{h}{g}} = 0$ doppelt. Wir haben also in P_μ vor allem einen $2\,\mu$-fachen Durchschnittspunkt, an welchen sich dann ein μ_1-facher Durchschnittspunkt P_{μ_1} und noch ein μ_2-facher Durchschnittspunkt P_{μ_2} anschmiegt.

Der Faktor $[\varphi_2(t)^{\mu}.t^{\mu}.t^{\mu_1}$ läßt demnach in beiden Fällen ($g_1 \neq 0$, $g = 0$) keinen neuen heranrückenden vielfachen Punkt der Kurve $F = 0$ in $(xy) = 0$ erkennen. Erst aus dem Faktor $t^{\mu_2} = 0$ oder — was auf das gleiche hinausläuft — aus der Ordnung μ_2 der Gleichung $f_1(\xi_1 \eta_1) = 0$ folgern wir, daß zu den Punkten P_μ, P_{μ_1} noch ein μ_2-facher Punkt $P_{\mu_2} = (xy)_{\frac{h}{u}} = 0$ hinzutritt.

Wir wissen, daß die Punkte $P_\mu . P_{\mu_1}$ keineswegs zu einem $(\mu + \mu_1)$-fachen Punkte vereinigt werden können. Im gleichen gilt dasselbe von der Zusammenstellung der Punkte P_μ, P_{μ_1}, P_{μ_2}. Man darf sie nie

1. für einen $(\mu + \mu_1 + \mu_2)$-fachen Punkt
2. für 2 vielfache Punkte von den Ordnungen: $\mu + \mu_1$, μ_2
3. „ 2 „ „ „ „ „ $\mu + \mu_2$, μ_1
4. „ 2 „ „ „ „ „ μ, $\mu_1 + \mu_2$

halten. Denn μ, μ_1, μ_2 sind zugleich die Anzahlen der durch den Anfangspunkt der Koordinaten hindurchgehenden Zweige in $F = 0$, $f(\xi\eta) = 0$, $f_1(\xi_1 \eta_1) = 0$ und wir müßten im Falle 1, 2, 3 mehr, als μ dieser Zweige in $F = 0$ und im Falle 4 mehr, als μ_1 dieser Zweige in $f(\xi\eta) = 0$ voraussetzen. Dies widerspricht aber den Ordnungen μ, μ_1 dieser Gleichungen und man sieht, daß P_μ, P_{μ_1}, P_{μ_2} drei absolut verschiedene vielfache, in $F = 0$ enthaltene Punkte sind.

Es wird sich nach Durchführung analoger Untersuchungen zeigen, daß auch in weiteren Gleichungen

$$\xi^{\mu}.\xi_1^{\mu_1}.\ldots.\xi_\nu^{\mu_\nu}.f_\nu(\xi_\nu \eta_\nu) =$$

$$= \Phi_{\nu+1}^{\mu}.\Phi_\nu^{\mu+\mu_1}.\ldots.\Phi_2^{\mu+\mu_1+\cdots+\mu_{\nu-1}}.\Phi_1^{\mu+\mu_1+\cdots+\mu_\nu}.f_\nu(\xi_\nu \eta_\nu = 0,$$

$$\nu = 3, 4, 5, \ldots$$

---

[1]) Aus der Gleichheit $H/G = \frac{h}{g}$, $(g_1 \neq 0)$ würde folgen: $h\alpha - \beta g = 0$, was aber nicht möglich ist.

Digitized by Google

die äußeren Faktoren sich an die bereits früher konstatierten — unter einander verschiedenen — vielfachen Punkte $P_\mu, P_{\mu_1}, \ldots P_{\mu_\nu}$ beziehen und daß ihre Exponenten die Vielfachkeit der Durchschnittspunkte in $P_\mu, P_{\mu_1}, \ldots, P_{\mu_\nu}$ der Kurve $F(x\,y) = 0$ mit der unikursalen Kurve

$$(17) \qquad \left.\begin{aligned} x &= x_i^{(\nu)} = \sigma_\nu (A\,t, B\,t) \\ y &= y_i^{(\nu)} = \sigma'_\nu (A\,t, B\,t) \end{aligned}\right\} (C_\nu)$$

in $(x\,y) = 0$ angeben.

Ist in $f_\nu (\xi_\nu\, \eta_\nu)$ die Ordnung $\mu_{\nu+1} > 1$, so rückt an die Punkte $P_\mu, P_{\mu_1}, \ldots, P_{\mu_\nu}$ noch ein neuer vielfacher Punkt $P_{\mu_{\nu+1}} = (x\,y)_{\frac{h}{g}} = 0$ heran. Nehmen wir aber an, daß $\mu_{\nu+1} = 1$ ist, so gewinnen wir aus der Gleichung $f_\nu (\xi_\nu\, \eta_\nu) = 0$ ein Funktionenpaar

$$\xi_\nu = \omega_1 (\tau), \quad \eta_\nu = \omega_2 (\tau)$$

und — wenn wir dies in $\sigma_\nu (\xi_\nu\, \eta_\nu)$, $\sigma'_\nu (\xi_\nu\, \eta_\nu)$ einsetzen — erhalten wir ein Funktionenpaar

$$x = \sigma_\nu (\omega_1\, \omega_2), \quad y = \sigma'_\nu (\omega_1, \omega_2),$$

welches eine an die Bestimmung $\frac{h}{g}$ geknüpfte Teilumgebung der Stelle $(x\,y) = 0$ ergibt.

Art. 14. Berücksichtigen wir nun alle transformierten Gleichungen, welche ihren Ursprung in dem Faktor $(g\,y - h\,x)^a$ der Stammgleichung $F = 0$ finden und derer Ordnungen > 1 sind. Wir bezeichnen diese Ordnungen mit

$$\mu_a, \ \mu'_a, \ \mu''_a, \ldots .$$

Sind im gleichen

$$\mu_b, \ \mu'_b, \ \mu''_b, \ldots$$

$$\mu_c, \ \mu'_c, \ \mu''_c, \ldots \text{ u. s. w.}$$

die Ordnungen > 1 aller transformierten Gleichungen, welche resp. in den Faktoren $(g'\,y - h'\,x)^b$, $(g''\,y - h''\,x)^c$, u. s. w. ihren Ursprung gefunden haben, so nennen wir die Gesamtheit der Zahlen

$$(18) \qquad \mu, \left\{\begin{aligned} &\mu_a, \ \mu'_a, \ \mu''_a, \ldots \\ &\mu_b, \ \mu'_b, \ \mu''_b, \ldots \\ &\mu_c, \ \mu'_c, \ \mu''_c, \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

die Reihe der Zusammensetzung des μ-fachen Punktes $M_\delta = P_\mu$.

Digitized by Google

An einen solchen μ-fachen Stammpunkt P_μ schließen sich an: die vielfachen Nebenpunkte:

$$(19)\quad \begin{cases} P_{\mu_a},\ P_{\mu'_a},\ P_{\mu''_a}, \ldots \text{ in der Richtung } \dfrac{h}{g} \\ P_{\mu_b},\ P_{\mu'_b},\ P_{\mu''_b}, \ldots \text{ " " " } \dfrac{h'}{g'} \\ P_{\mu_c},\ P_{\mu'_c},\ P_{\mu''_c}, \ldots \text{ " " " } \dfrac{h''}{g''} \text{ u. s. w.}^1) \end{cases}$$

und M_δ wird als ein zusammengesetzter vielfacher Punkt mit der Zusammensetzungsreihe (18) bezeichnet.

Dieselben Untersuchungen und Definitionen beziehen sich auch auf jeden im Unendlichen gelegenen, vielfachen Punkt.

Um sie durchzuforschen, hat man bekanntlich die gegebene Gleichung

$$F(x, y) = (x\,y)_n + (x\,y)_{n-1} + \cdots = 0$$

— wenn $(g\,h)$, $(g'\,h')$, ... solche Größenpaare sind, welche

$$(g\,h)_n = 0, \quad (g'\,h')_n = 0, \ldots$$

ergeben — mit den Substitutionen:

$$x = (g + \alpha\,\eta)\frac{1}{\xi}, \quad y = (h + \beta\,\eta)\frac{1}{\xi}, \quad g\,\beta - h\,\alpha = 1$$

$$x = (g' + \alpha'\eta)\frac{1}{\xi}, \quad y = (h' + \beta'\eta)\frac{1}{\xi}, \quad g'\beta' - h'\alpha' = 1$$

. . . . . .

in die Gleichungen

$$\varphi(\xi\,\eta) = 0, \quad \varphi'(\xi\,\eta) = 0, \ldots$$

umzuformen, und dann diese in der Umgebung des Punktes $(\xi\,\eta) = 0$ zu untersuchen.

Es ist natürlich, daß eine gegebene Gleichung die Art und Weise, wie sich in jedem der vielfachen Punkte M_δ alle transformierten Gleichungen aus ihr selbst und aus jeder der transformierten Gleichungen (ihrer Anzahl und Ordnung nach) ergeben können, mit sich bringt. Mit dieser Art und Weise, welche wir die dem M_δ zugehörige Genealogie der Gleichung nennen können, wird auch die Zusammensetzungsreihe, welche auch genealogisch und isomorph mit der Genealogie der Gleichung in M_δ geordnet werden kann, bestimmt.[2])

[1]) Aus den letzten transformierten Gleichungen von der Ordnung $= 1$ entsteht kein vielfacher Nebenpunkt.

[2]) Die Ordnungen $= 1$, welche sich auf die letzten Gleichungen beziehen, können in der Genealogie der Ordnungen ausgelassen werden.

Digitized by Google

Entstehen z. B. aus der gegebenen Gleichung $F=0$ in M_δ nur zwei transformierte Gleichungen $f_1=0$, $f_1'=0$ (mit den Ordnungen μ_1; μ_1'), aus der ersten dieser: 2 transformierte Gleichungen $f_{11}=0$, $f_{12}=0$ (mit den Ordnungen μ_{11}, μ_{12}) und aus der zweiten: 3 transformierte Gleichungen $f_{11}'=0$, $f_{12}'=0$, $f_{13}'=0$ (mit den Ordnungen μ_{11}', μ_{12}', μ_{13}') u. s. w., so haben wir in M_δ die Genealogie:

$$\overbrace{\overbrace{f_{11}=0,\ f_{12}=0}^{f_1=0}\qquad\overbrace{f_{11}'=0, f_{12}'=0, f_{13}'=0}^{f_1'=0}}^{F=0}$$

u. s. w.

und wir können auch die dem Punkte M_δ zugehörige Zusammensetzungsreihe analog genealogisch niederschreiben:

$$\overbrace{\overbrace{\mu_{11},\ \mu_{12}}^{\mu_1}\qquad\overbrace{\mu_{11}',\ \mu_{12}',\ \mu_{13}'}^{\mu_1'}}^{\mu}$$

u. s. w.

In den Gleichungen

$$x y^2 + x^5 + y^5 = 0$$

$$y^3 + x^5 + y^5 = 0$$

tritt der Punkt $(xy)=0$ als ein vielfacher mit der Zusammensetzungsreihe [3, 2] auf.

Bildet man aus der Gleichung

$$(20)\quad x^{n-2} + (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1}.y + \cdots + b_0 y^n) = 0,\ b_0 \neq 0$$

eine Kette von Gleichungen mit Hilfe der sukzessiven Substitutionen:

$$(x = \xi\eta,\ y = \xi),\ (\xi = \xi_1\eta_1,\ \eta = \xi_1), \ldots,$$

so folgern wir leicht, daß hier der Punkt $(xy)=0$ ein $(n-2)$-facher mit der Zusammensetzungsreihe

$$(n-2;\ 2,\ 2,\ \ldots,\ 2)$$

ist.

Digitized by Google

Die Anzahl der sich hier — in der Richtung $\frac{h}{g} = \infty$ — anschließenden zweifachen Punkte wird

$$= \frac{n-2}{2} \text{ für ein gerades } n \text{ und}$$

$$= \frac{n-3}{2} \text{ für ein ungerades } n.$$

Art. 15. Bekanntlich müssen die Koeffizienten $A, B, C, \ldots$ einer allgemeinen algebraischen Gleichung, die wir von nun an mit $f(xy) = 0$ bezeichnen, $\frac{\mu(\mu+1)}{2}$ Bedingungen erfüllen, wenn diese Gleichung in der Umgebung irgend eines gegebenen Punktes M_δ von der Ordnung $\mu > 1$ sein soll. Soll nun diese Gleichung eine Kurve definieren, welche in M_δ einen μ-fachen Punkt mit der genealogisch geordneten Zusammensetzungsreihe (18) besitzt, so muß auch jede ihrer transformierten Gleichungen von der Ordnung ν, $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ analoge Bedingungen erfüllen. Es sind demnach in bezug auf die Beschaffenheit der Kurve in M_δ

$$m_\delta = \frac{\mu(\mu+1)}{2} + \left[\frac{\mu_a(\mu_a+1)}{2} + \cdots\right] + \left[\frac{\mu_b(\mu_b+1)}{2} + \cdots\right] +$$

$$+ \left[\frac{\mu_c(\mu_c+1)}{2} + \cdots\right] + \cdots$$

Bedingungen erfüllt worden.

Da nun δ — wie wir anfangs angenommen haben — die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, k$ durchläuft, so haben wir im ganzen $m = \sum_{\delta=1}^{k} m_\delta$ Bedingungen. Wir bezeichnen diese Anzahl auch mit

$$(21) \qquad m = \sum_{\delta} \sum \frac{\mu(\mu+1)}{2},$$

wo sich die zweite Summe auf alle Zahlen der Zusammensetzungsreihe des Punktes M_δ bezieht und in der ersten δ die Zahlenreihe $1, 2, 3, \ldots, k$ durchzulaufen hat.

Nun finden wir in jedem der vielfachen Punkte M_δ den μ-fachen Stammpunkt P_μ und außerdem noch die vielfachen Nebenpunkte P_{μ_a}, $P_{\mu'_a}$, P_{μ_b}, $P_{\mu'_b}, \ldots$. Sie zerfallen in M_δ in

Digitized by Google

$$\frac{\mu(\mu-1)}{2}, \quad \frac{\mu_a(\mu_a-1)}{2}, \quad \frac{\mu'_a(\mu'_a-1)}{2}, \ldots$$

$$\frac{\mu_b(\mu_b-1)}{2}, \quad \frac{\mu'_b(\mu'_b-1)}{2}, \ldots$$

. . . . . .

Punktpaare, welche wir für gewöhnliche Doppelpunkte der Kurve halten können. Nach dieser Verabredung haben wir im M_δ:

$$d_\delta = \frac{\mu(\mu-1)}{2} + \left[\frac{\mu_a(\mu_a-1)}{2} + \cdots\right] + \left[\frac{\mu_b(\mu_b-1)}{2} + \cdots\right] + \cdots$$

Doppelpunkte der Kurve und im ganzen besitzt sie solcher Punkte

$$d = \sum_{\delta=1}^{k} d_\delta = \sum_{\delta} \sum \frac{\mu(\mu-1)}{2}, \tag{22}$$

wo die beiden Summenreihen in derselben Bedeutung wie in (21) auftreten.

Art. 16. Wir wollen nun weiter untersuchen, inwiefern eine Kurve n^{ten} Grades — gleichgültig, ob sie reduktibel oder irreduktibel sein soll — mit den vorgeschriebenen Zusammensetzungsreihen ihrer k willkürlich gegebenen vielfachen Stammpunkte $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2), \ldots, (a_k, b_k)$ und mit den in die Gleichung selbst und in die transformierten Gleichungen einzuführenden willkürlichen Größenpaaren (g, h) und $(\alpha\beta)$ möglich ist? Es müssen l Größenpaare $(g\,h)$ in eine der Gleichungen eingeführt werden, wenn aus dieser — nach den vorgeschriebenen Genealogien — l transformierte Gleichungen entstammen sollen. Dabei muß aber bemerkt werden, daß ein Anfangsglied, in welches man λ verschiedene Größenpaare (g, h) eingeführt hat, noch andere lineare Faktoren mit völlig unbestimmten Koeffizienten enthalten kann. Da sie aber nicht in Rücksicht genommen werden, wird eo ipso vorausgesetzt, daß sie (im allgemeinen Falle) zu keinen transformierten Gleichungen mit den Ordnungen > 1 führen.

Ist $G(XY) = 0$ die allgemeine Gleichung n^{ten} Grades mit unbestimmten Koeffizienten und soll sie im Punkte $(a\,b)$ einen μ-fachen Stammpunkt besitzen, so setzen wir — wie bekannt — $X = a + x$, $Y = b + y$ und ordnen $G(a + x, b + y)$ nach Potenzen von x, y. Entsteht dadurch

$$v_0(xy) + v_1(xy) + \cdots + v_n(xy) = 0,$$

wo $v_i(xy)$ homogene Funktionen λ^{ten} Grades sind, so müssen wir

$$v_0(xy) = 0, \; v_1(xy) = 0, \ldots, \; v_{\mu-1}(xy) = 0$$

Digitized by Google

setzen, wodurch wir in $v_0(xy)=0$ und in den verschwindenden Koeffizienten der Funktionen $v_1, v_2, \ldots, v_{\mu-1}$ $s_\mu = \frac{\mu(\mu+1)}{2}$ Bedingungsgleichungen

$$W_1 = 0,\ W_2 = 0, \ldots,\ W_{s_\mu} = 0$$

gewinnen. Wir haben jetzt:

$$v_\mu(xy) + v_{\mu+1}(xy) + \cdots + v_n(xy) = 0.$$

Nun transformieren wir diese Gleichung mit den Substitutionen

(a) $$x = (g + \alpha\eta)\,\xi,\ y = (h + \beta\eta)\,\xi.$$

Setzen wir symbolisch

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\cdot\alpha + \frac{\partial}{\partial y}\beta\right]_{\substack{x=g\\y=h}} = \Delta,$$

so erhalten wir die transformierte Gleichung in der Form:

$$v_\mu(gh) + \frac{\Delta v_\mu}{1!}\eta + \frac{\Delta^2 v_\mu}{2!}\eta^2 + \cdots + \frac{\Delta^\mu v_\mu}{\mu!}\eta^\mu +$$

(23) $$+ v_{\mu+1}(gh)\xi + \frac{\Delta v_{\mu+1}}{1!}\eta\xi + \frac{\Delta^2 v_{\mu+1}}{2!}\eta^2\xi + \cdots + \frac{\Delta^{\mu+1}}{(\mu+1)!}\eta^{\mu+1}\xi +$$

$$+ v_{\mu+2}(gh)\,\xi^2 + \frac{\Delta v_{\mu+2}}{1!}\eta\xi^2 + \frac{\Delta^2 v_{\mu+1}}{2!}\eta^2\xi^2 + \cdots$$

$$\cdots = 0.$$

Soll nun die Ordnung μ_1 dieser Gleichung > 1 werden, so wird diese durch Einführung folgender Bedingungen:

$$v_\mu(gh) = 0$$

$$\Delta v_\mu = 0,\ v_{\mu+1}(gh) = 0$$

$$\Delta^2 v_\mu = 0,\ \Delta v_{\mu+1} = 0,\ v_{\mu+2}(gh) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta^{\mu_1-1} v_\mu = 0,\ \Delta^{\mu_1-2} v_{\mu+1} = 0, \ldots, \Delta v_{\mu+\mu_1-2} = 0,\ v_{\mu+\mu_1-1}(gh) = 0$$

wirklich erreicht.

Nun ist klar, daß — zufolge einer sehr großen Unbeschränktheit der Parameter α, β — jede der Gleichungen $\Delta v_{\mu+s} = 0$, $s = 0, 1, 2, \ldots \mu_1 - 2$, durch je zwei Bedingungen

$$\frac{\partial v_{\mu+s}}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial v_{\mu+s}}{\partial y} = 0, \quad \left\{\begin{matrix} x=g \\ y=h \end{matrix}\right\}$$

Digitized by Google

erfüllt wird und diese wieder — wenn $\frac{y}{x} = t$ [1]) gesetzt wird — können neben der erfüllten Bedingung $v_{\mu+s}(1,t) = 0$ bloß mit je einer Gleichung

$$\frac{d}{dt} v_{\mu+s}(1,t) = 0, \quad s = 0, 1, \ldots, \mu_1 - 2, \quad \text{für } t = \frac{h}{g}$$

ersetzt werden.

Im gleichen wird jede Gleichung $\Delta^2 v_{\mu+s} = 0$, $s = 0, 1, \ldots \mu_1 - 3$, erfüllt, wenn

$$\frac{\partial^2 v_{\mu+s}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_{\mu+s}}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_{\mu+s}}{\partial y^2} = 0, \quad \left\{ \begin{matrix} x = g \\ y = h \end{matrix} \right\}$$

werden und diese drei Gleichungen können wieder bloß mit je einer Gleichung

$$\frac{d^2 v_{\mu+s}(1,t)}{dt^2} = 0, \quad s = 0, 1, \ldots, \mu_1 - 3, \quad \text{für } t = \frac{h}{g}$$

ersetzt werden.

Fährt man so fort, so gelangt man zu folgenden $s_{\mu_1} = \frac{\mu_1(\mu_1+1)}{2}$ Bedingungsgleichungen:

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_\mu(1,t) = 0, \ \frac{d}{dt} v_\mu(1,t) = 0, \ldots, \ \frac{d^{\mu_1-1}}{dt^{\mu_1-1}} v_\mu(1,t) = 0 \\ v_{\mu+1}(1,t) = 0, \ \frac{d}{dt} v_{\mu+1}(1,t) = 0, \ldots, \ \frac{d^{\mu_1-2}}{dt^{\mu_1-2}} v_{\mu+1}(1,t) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{\mu+\mu_1-2}(1,t) = 0, \ \frac{d}{dt} v_{\mu+\mu_1-2}(1,t) = 0 \\ v_{\mu+\mu_1-1}(1,t) = 0, \quad \text{für } t = \frac{h}{g}, \end{array} \right.$$

welche die Ordnung μ_1 zu erwirken haben, und wir können folgenden Satz aussprechen:

I. Die Ordnung μ_1 wird durch Aufstellung von s_{μ_1} Bedingungen

$$W'_1 = 0, \ W'_2 = 0, \ldots, \ W'_{s_{\mu_1}} = 0$$

[1]) Wird $g = 0$ $(h \neq 0)$, so kann $\frac{x}{y}$ für t genommen werden.

Digitized by Google

erreicht. Diese Gleichungen werden durch die Forderung gebildet, daß das Paar $(x, y) = (g, h)$ die Gleichungen

$$v_\mu(xy) = 0,\ v_{\mu+1}(xy) = 0, \ldots,\ v_{\mu+\mu_1-1}(xy) = 0$$

mit den Wiederholungen

$$\mu_1,\ \mu_2, \ldots,\ 1$$

befriedigen soll.

Nehmen wir für den Augenblick an, daß die Koeffizienten in $G(X, Y) = 0$ bestimmte Größen sind, so gelangen wir — in Rücksicht darauf, daß in (23) in die homogene Funktion des Grades μ_1 die Funktionen:

$$\Delta^{\mu_1} v_\mu,\ \Delta^{\mu_1-1} v_{\mu+1}, \ldots,\ \Delta v_{\mu+\mu_1-1},\ v_{\mu+\mu_1}$$

(linear) eingehen — zum folgenden Satze:

II. Die Transformationen (a) ergeben die Ordnung μ_1 der transformierten Gleichung, wenn

1. das Paar $(xy) = (gh)$ die Gleichungen

$$v_\mu(xy) = 0,\ v_{\mu+1}(xy) = 0, \ldots,\ v_{\mu+\mu_1-1}(xy) = 0$$

mit den Wiederholungen, welche resp. **genau** den Zahlen

$$\mu_1,\ \mu_1 - 1, \ldots,\ 1$$

gleich sind, befriedigt;

2. wenn manche (aber nicht alle) dieser Wiederholungen von diesen Zahlen größer sind, die übrigen aber diesen Zahlen gleich werden;

3. wenn alle dieser Wiederholungen diese Zahlen übersteigen, aber $v_{\mu+\mu_1}(gh) \neq 0$ wird.

Bezeichnen wir nun die in die transformierte Gleichung (23) eingehenden homogenen Funktionen mit $w_\lambda(\xi\eta)$, $\lambda = \mu_1, \mu_1+1, \ldots$, so haben wir

$$(C)\quad \begin{cases} w_{\mu_1} = \dfrac{\Delta^{\mu_1} v_\mu}{\mu_1!}\eta^{\mu_1} + \dfrac{\Delta^{\mu_1-1} v_{\mu+1}}{(\mu_1-1)!}\xi.\eta^{\mu_1-1} + \cdots + \dfrac{\Delta_{\iota+\mu_1-1}}{1!}\xi^{\mu_1-1}.\eta + v_{\mu+\mu_1}\xi^{\mu_1} \\ w_{\mu_1+1} = \dfrac{\Delta^{\mu_1+1} v_\mu}{(\mu_1+1)!}\eta^{\mu_1+1} + \dfrac{\Delta^{\mu_1} v_{\mu+1}}{\mu_1!}\xi.\eta^{\mu_1} + \cdots + \dfrac{\Delta v_{\mu+\mu_1}}{1!}\xi^{\mu_1}.\eta + v_{\mu+\mu+1}\xi^{\mu_1+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

und wir sehen, daß die Koeffizienten hier von α, β abhängig sind. Wird also das Größenpaar (α, β) auf eine bestimmte Art fixiert

Digitized by Google

und wird $w_{\mu_1}(\xi\eta) = 0$ durch $(\xi, \eta) = (g, h)$ befriedigt, so soll jetzt die Gleichung

$$w_{\mu_1} + w_{\mu_1+1} + \cdots = 0$$

mit den Substitutionen

$$\xi = (g_1 + \alpha_1\eta_1)\,\xi_1,\ \eta = (h_1 + \beta_1\eta_1)\,\xi_1,\ g_1\beta_1 - h_1\alpha_1 = 1$$

transformiert werden.

Die $s_{\mu_2}\left(= \frac{\mu_2(\mu_2+1)}{2}\right)$ Bedingungen, mit Hilfe derer die Ordnung $\mu_2 > 1$ der transformierten Gleichung erreicht werden soll und welche wieder aussagen, daß die Gleichungen:

$$w_{\mu_1} = 0,\ w_{\mu_1+1} = 0, \ldots,\ w_{\mu_1+\mu_2-1} = 0$$

durch $(\xi\eta) = (g_1 h_1)$ resp.

$$\mu_2,\ \mu_2 - 1, \ldots \text{ 1mal}$$

befriedigt werden, werden zwar von (α_1, β_1) unabhängig, aber α, β enthalten sie in sich.

Auf die hier angegebene Weise wird die im Stammpunkte (a, b) geforderte Genealogie vollkommen ausgeführt.

Art. 17. Nachdem wir so die Bedingungen, durch welche die vorgeschriebenen Genealogien zu stande kommen sollen, kennen gelernt haben, kehren wir nun zur zu Anfang des vorigen Artikels gestellten Aufgabe zurück und bezeichnen die m Bedingungsgleichungen, welche hier zu bilden sind, kurz mit

$$(24)\quad W_1 = 0,\ W_2 = 0, \ldots,\ W_m = 0;\ \left(m = \sum_{\delta}\sum \frac{\mu(\mu+1)}{2}\right).$$

Sie werden von folgenden Größen abhängen:

a) von den $\frac{n(n+3)}{2} + 1$ Koeffizienten $A, B, C, \ldots$ der allgemeinen Gleichung; in diesen sind sie homogen und linear,

b) von $2k$ Größen $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2), \ldots$, den Koordinaten der Punkte M_δ, von denen manche oder alle auch im Unendlichen liegen können,

c) von den fixierten Größenpaaren $(g\,h)$, $(g', h'), \ldots$,

d) von den gleichzeitig mit *c*) eingeführten Größenpaaren $(\alpha\beta)$, $(\alpha'\beta'), \ldots$.

Setzen wir nun $\frac{n}{2}(n+3) = \tau$ und nehmen erstens an, es sei

$$(I)\qquad m > \tau.$$

Digitized by Google

Aus τ beliebig ausgewählten Gleichungen (24) können wir — bei allgemeinen Größen $a)$, $b)$, $c)$, $d)$ — die Verhältnisse $A : B : C : \ldots$ in Funktionen dieser Größen bestimmen. Sind diese Funktionen: $H_1, H_2, H_3, \ldots$, so haben wir: $A : B : C : \cdots = H_1 : H_2 : H_3 : \cdots$ und wenn wir in die übrigen Gleichungen (24) $H_1, H_2, \ldots$ für $A, B, \ldots$ einführen, erhalten wir $(m - \tau)$ Bedingungen:

$$G_1 = 0,\ G_2 = 0, \ldots,\ G_{m-\tau} = 0, \tag{25}$$

mit welchen die Größen $a)$, $b)$, $c)$, $d)$ miteinander verbunden werden sollen.

Daraus erhellt:

III. Ist $m > \tau$, so sind die Stellen für vielfache Stammpunkte der Kurve und alle für diese Punkte eingeführten Größenpaare $(g\,h) \ldots$[1]) nimmer insgesamt willkürlich.

Die Funktionen $G_1, G_2, \ldots G_{\tau-m}$ sind tatsächlich die Determinanten von je $(\tau + 1)$ Gleichungen:

$$W_1 = 0,\ W_2 = 0, \ldots\ W_\tau = 0,\ W_{\tau+\varepsilon} = 0$$
$$\varepsilon = 1, 2, \ldots m - \tau.$$

Es wird nicht ausgeschlossen, daß die Kurve außer den vorgeschriebenen, zusammengesetzten, vielfachen Punkten noch andere solche Punkte — nach Erfüllung von $(m - \tau)$ Bedingungen (25) besitzen wird.

Art. 18. Wird hingegen:

$$m \leqq \tau,$$

so können wir im allgemeinen Falle — und zwar wenn alle Determinanten m^{ter} Ordnung, welche aus der Matrix der Koeffizienten der Gleichungen (24) gebildet werden können, nicht verschwinden — m Koeffizienten $A, B, \ldots$ in linearen, homogenen Funktionen der übrigen $(\tau + 1) - m$ dieser Koeffizienten, die wir unbestimmt lassen und $l_1, l_2, \ldots l_{\tau-m+1}$ nennen, bestimmen. Sind also

$$\begin{aligned} A &= S_1 l_1 + S_2 l_2 + \cdots + S_{\tau-m+1} . l_{\tau-m+1} \\ B &= T_1 l_1 + T_2 l_2 + \cdots + T_{\tau-m+1} . l_{\tau-m+1}, \\ &\vdots \quad\ \vdots \quad\ \vdots \qquad\qquad \vdots \end{aligned}$$

so können wir weiter — da es sich nur um die Verhältnisse der Koeffizienten handelt —

$$\begin{aligned} A &= S_1 + S_2 \lambda_1 + \cdots + S_{\tau-m+1} . \lambda_{\tau-m} \\ B &= T_1 + T_2 \lambda_1 + \cdots + T_{\tau-m+1} . \lambda_{\tau-m} \\ &\vdots \quad\ \vdots \quad\ \vdots \qquad\qquad \vdots \end{aligned} \tag{26}$$

[1]) bei fixierten Werten von Größenpaaren $(\alpha\,\beta), \ldots$.

Digitized by Google

setzen und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\tau-m}$ als unbeschränkte Parameter auffassen. $S_1, S_2, \ldots, T_1, T_2, \ldots$ sind Funktionen der Größen *a*), *b*), *c*), *d*).

Wir ersehen daraus:

IV. Sind die Zahlen in den vorgeschriebenen Zusammensetzungsreihen so gewählt, daß $m \leqq \tau$ wird, so sind im allgemeinen unendlich viele, und zwar $\infty^{\tau-m}$ Kurven n^{ten} Grades mit vollkommen willkürlichen Stellen für alle ihrer vielfachen Stammpunkte und mit vollkommen beliebigen $(gh), \ldots$ in diesen Punkten möglich.

Schreiben wir die erhaltene Gleichung in der Form

$$(27)\quad f_0(xy) + \lambda_1 f_1(xy) + \lambda_2 f_2(xy) + \cdots + \lambda_{\tau-m} f_{\tau-m}(xy) = 0,$$

so können wir jetzt — indem wir den Fall, daß sich unter den Funktionen $f_s(xy)$ solche vorfinden, welche sich voneinander nur durch konstante Faktoren unterscheiden, bei Seite lassen — den weiteren Satz aussprechen.

V. Eine durch m Bedingungen definierte Kurve n^{ten} Grades wird vollkommen bestimmt, wenn für sie $(\tau - m)$ beliebige Punkte $(\tau \geqq m)$ außerhalb aller M_δ gewählt werden.

Art. 19. Es kann jedoch noch eine andere, in der Theorie wichtige Art von Bestimmung gebraucht werden und wir wollen sie hier durchführen.

Es seien

$$\mu_{s_1}, \mu_{s_2}, \mu_{s_3}, \cdots$$

die letzten Ordnungen (> 1) in der genealogisch geordneten Zusammensetzungsreihe des Punktes M_δ.

Gehören zu ihnen die Gleichungen

$$(28)\qquad \varphi_{s_1} = 0,\ \varphi_{s_2} = 0,\ \varphi_{s_3} = 0, \ldots,$$

so haben wir:

$$\varphi_{s_1} = (\xi\eta)_{\mu_{s_1}} + (\xi\eta)_{\mu_{s_1}+1} + \cdots = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

wo

$$(\xi\eta)_{\mu_{s_1}} = T_0 . \xi^{\mu_{s_1}} + T_1 . \xi^{\mu_{s_1}-1}\eta + \cdots + T_{\mu_{s_1}} \eta^{\mu_{s_1}}$$

und $T_0, T_1, \ldots$ lineare (nicht homogene) Funktionen aller $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ $\ldots\lambda_{\tau-m}$ sind.

Digitized by Google

Wir können nun verlangen, daß sich $\varphi_{s_1} = 0$ durch gewisse bestimmte Transformationen

$$\xi = \bar{g}_\nu + \bar{\alpha}_\nu \eta_1)\,\xi_1,\ \ \eta_1 = (h_\nu + \bar{\beta}_\nu \eta_1)\,\xi_1$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, l$$

in die Gleichungen 1. Ordnung transformieren läßt, wo l weder μ_{s_1} noch $(\tau - m)$ übersteigen darf.

Dies wird erreicht, wenn man die Bedingungen

$$(\bar{g}_\nu, \bar{h}_\nu)_{\mu_{s_1}} = 0,\ \ \nu = 1, 2, \ldots, l$$

einführt.

Sind nun die auf diese Weise erhaltenen transformierten Gleichungen (mit den Ordnungen $= 1$):

$$\psi_{s_1 1} = 0,\ \ \psi_{s_1 2} = 0, \ldots \tag{29}$$

und war $l < \tau - m$, so können wir auch hier verlangen, daß je eine von l' Gleichungen (29) — wo jetzt $l' < (\tau - m) - l$ sein soll — mit Hilfe je eines vorgeschriebenen Größenpaares $(g, h), \ldots$ wieder in je eine Gleichung von der Ordnung $= 1$ transformiert werde.

Werden durch dieses weiter fortgesetzte Verfahren, welches als Erweiterung der Genealogie bezeichnet wird, noch nicht $(\tau - m)$ Bedingungen aufgestellt, so können wir dasselbe noch auf alle oder einige der weiteren Gleichungen (28):

$$\varphi_{s_2} = 0,\ \ \varphi_{s_3} = 0, \ldots$$

und ihre transformierten Gleichungen anwenden, vorausgesetzt, daß die Anzahl der dadurch eingeführten Bedingungen noch immer die Zahl $(\tau - m)$ nicht übersteigt.

Hat man nun auf diese Weise eine Reihe solcher Endgleichungen, wie (28), in einigen oder allen Punkten M_δ behandelt und dadurch m' Größenpaare $(g h), \ldots$ und mit diesen auch m' Bedingungen $\overline{W}_1 = 0,\ \overline{W}_2 = 0, \ldots,\ \overline{W}_{m'} = 0$ eingeführt, so wird die Kurve im Falle $m' = (\tau - m')$ vollkommen bestimmt. Ist hingegen $m' < (\tau - m)$, so können wir entweder das obige Verfahren noch weiter fortführen oder $(\tau - m - m')$ außerhalb aller M_δ liegende Punkte zur Bestimmung der Kurve benützen.

Da nun für $\mu = 1$ das Produkt $\frac{\mu(\mu+1)}{2} = 1$ ist, so können wir die Anzahl der durch Erweitern von Genealogien in den Punkten M_δ eingeführten Bedingungen auch durch

$$m' = \sum_\delta \sum' \frac{\mu(\mu+1)}{2} \tag{32}$$

Digitized by Google

bezeichnen. Die Summe $m+m'$, $(m' \geqq 0)$, gibt also an, wie viele Bedingungen — ohne Einführung gewisser außerhalb M_δ liegenden Punkte — für die Kurve $f=0$ eingeführt worden sind, und wird kurz mit

$$m_f = \sum \frac{\mu(\mu+1)}{2} \tag{30}$$

bezeichnet werden.

Kapitel III.

Durchschnittspunkte zweier Kurven. Adjungierte Kurven und Funktionen.

Art. 20. Betrachten wir jetzt zwei Kurven C_1, C_2, deren Gleichungen in der Umgebung des Punktes $(xy)=0$, $f(xy)=0$, $g(xy)=0$ sind. In diesem Punkte soll die Kurve C_1 ihren vielfachen Stammpunkt P_μ und die Kurve C_2 ihren vielfachen Stammpunkt P_ν besitzen. Wir bilden für beide Kurven für die Umgebung des Punktes $(xy)=0$ ihre Genealogien, welche auch die Gleichungen von den Ordnungen $=1$ in sich aufnehmen und welche wir mit G_f, G_g bezeichnen.

Nehmen wir nun an, daß aus diesen Genealogien sich die Teilgenealogien Γ_f, Γ_g so herausnehmen lassen, daß die in ihnen enthaltenen Gleichungen nach und nach durch dieselben Substitutionen entstehen. Wir nennen solche zwei Teilgenealogien isomorph und sie zeichnen sich augenscheinlich dadurch aus, daß zwei auf den identischen Stellen sich befindenden transformierten Gleichungen $\bar{\varphi}_\tau = 0$ (in Γ_f), $\bar{\psi}_\tau = 0$ (in Γ_g) aus den Stammgleichungen durch die identische Kette von Substitutionen hervorgehen und daß — wenn sie in ihren Anfangsgliedern gemeinsame lineare Faktoren enthalten — aus allen aus $\bar{\varphi}_\tau = 0$, $\bar{\psi}_\tau = 0$ unmittelbar entstehenden neuen Gleichungen nur diejenigen in Γ_f, Γ_g aufgenommen werden, welche ihren Ursprung in diesen Faktoren gefunden haben.

Sind also

$$\begin{aligned} &\varphi_{s_1}=0,\ \varphi_{s_2}=0,\ \varphi_{s_3}=0,\ldots \\ &\psi_{s_1}=0,\ \psi_{s_2}=0,\ \psi_{s_3}=0,\ldots \end{aligned} \tag{1}$$

die isomorph geordneten Endgleichungen in Γ_f, Γ_g und sind ihre Ordnungen ohne Ausnahme >1, so haben keine zwei entsprechenden Gleichungen ($\varphi_s=0$, $\psi_{s_i}=0$) in ihren Anfangsgliedern gemeinsame lineare Faktoren, denn anderenfalls könnten sie keine Endgleichungen werden.

Digitized by Google

Treten hingegen in (1) solche Paare auf, daß in ihnen wenigstens eine Gleichung von der Ordnung $= 1$ ist, so ist nicht ausgeschlossen, daß die Anfangsglieder eines solchen Paares entweder kommensurabel oder identisch und linear erscheinen. Ist das der Fall und ist $(gy - hx)$ das Anfangsglied einer Gleichung oder beider Gleichungen des Paares, so transformieren wir die beiden Gleichungen mit der gemeinsamen Substitution

$$x = (g + \alpha\eta)\,\xi, \quad y = (h + \beta\eta)\,\xi$$

in ein neues Paar

$$\varphi'_{s_i} = 0 \quad \psi'_{s_i} = 0 \tag{2}$$

und diese zwei neuen Gleichungen werden — ungeachtet dessen, daß sich wenigstens eine dieser Gleichungen in der Genealogie G_f resp. G_g nicht mehr vorfindet — in Γ_f, Γ_g aufgenommen.

Haben die Gleichungen (2) wieder die Eigenschaft des vorangehenden Paares, so werden noch die Genealogien Γ_f, Γ_g auch mit den aus ihnen hervorgehenden Gleichungen:

$$\varphi''_{s_i} = 0, \quad \psi''_{s_i} = 0$$

erweitert.

So fährt man fort, bis man zu den Gleichungen

$$\varphi^{(\varepsilon)}_{s_i} = 0, \quad \psi^{(\varepsilon)}_{s_i} = 0,$$

welche keine kommensurablen oder identischen und linearen Anfangsglieder besitzen, gelangt. Mit diesen Gleichungen werden erst die betrachteten Ketten in Γ_f, Γ_g geschlossen.

Ist dies der Fall, so nennen wir die so gebildeten isomorphen Teilgenealogien „erweiterte“ und bezeichnen sie durch

$$\Gamma'_f, \; \Gamma'_g.$$

Nach diesen Bemerkungen betrachten wir beide Reihen der Ordnungen:

$$\begin{aligned} &\mu, \; \mu_1, \; \mu_2, \; \mu_3, \ldots \\ &\nu, \; \nu_1, \; \nu_2, \; \nu_3, \ldots \end{aligned} \tag{3}$$

welche entsprechend zu den Gleichungen beider Teilgenealogien Γ_f, Γ_g resp. Γ'_f, Γ'_g gehören und welche isomorph geordnet sind. Die Ordnungen μ, ν der Stammgleichungen $f = 0$, $g = 0$ ergeben ohne weiteres einen $\mu\nu$-fachen Durchschnittspunkt der Kurven C_1, C_2 in $(xy) = 0$. Zwei entsprechende Gleichungen $\varphi_\sigma(\xi\eta) = 0$ $\psi_\sigma(\xi\eta) = 0$, deren Ordnungen μ_σ, ν_σ, $\sigma = 1, 2, 3 \ldots$ in (3) sind, ergeben im Gebiete ihrer Veränderlichen einen $\mu_\sigma\nu_\sigma$-fachen gemeinsamen Punkt $(\xi\eta) = 0$. Diesem wird in den Stammgleichungen $f = 0$, $g = 0$ ein $\mu_\sigma.\nu_\sigma$-facher Durchschnittspunkt $(xy) = 0$

Digitized by Google

mit einer nach Kap. I wohl definierten „Bestimmung" entsprechen. Wir erhalten demnach aus den Reihen (3)

$$(4) \qquad \mu\nu + \mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_2 + \cdots$$

Durchschnittspunkte der Kurven C_1, C_2 in $(xy) = 0$.

Wir haben so den Satz:

I. Fallen die vielfachen zusammengesetzten Punkte zweier Kurven in einen Punkt M hinein, so entsteht ein vielfacher Durchschnittspunkt und seine Vielfachheit wird gleich der Summe von Produkten je zweier Ordnungen entsprechender Gleichungen, aus welchen die „normalen" oder „erweiterten" isomorphen Teilgenealogien in M bestehen.

Dieselbe Regel muß auch dann angewendet werden, wenn eine der gegebenen Stammgleichungen von der Ordnung $= 1$ ist. Sind z. B. zwei Kurven C_1, C_2 durch die Gleichungen

$$f = x^2 + x^2 y + y^3 = 0, \quad g = x + x^2 + y^2 = 0$$

definiert, so haben wir hier kommensurable Anfangsglieder: x^2, x, und beide Gleichungen lassen sich durch die gemeinsame Substitution

$$x = \xi . \eta, \quad y = -\xi, \quad (\alpha = 1, \beta = 0)$$

in ein neues Paar von Gleichungen:

$$\varphi = -\xi + \eta^2 - \xi\eta^2 = 0, \quad \psi = (\xi + \eta) + \xi\eta^2 = 0$$

transformieren. Die Anfangsglieder sind hier nicht mehr kommensurabel und wir müssen darum die Ketten der transformierten Gleichungen mit $\varphi = 0$, $\psi = 0$ schließen. Die Vielfachheit des Durchschnittspunktes der beiden betrachteten Kurven C_1, C_2 in $(xy) = 0$ ist gleich

$$2 . 1 + 1 . 1 = 3.$$

Betrachten wir noch zwei Kurven, welche durch die Gleichungen

$$f = xy + x(y^2 + x^2) + x^4 y^4 = 0,$$
$$g = xy + x(y^2 + x^2) + x^4 - y^4 = 0$$

definiert werden und versuchen ihren Durchschnittspunkt $(xy) = (00)$ näher zu bestimmen. Aus den Anfangsgliedern der Gleichungen selbst kommt ihm die Vielfachheit $= 2 . 2 = 4$. Aus $f = 0$, $g = 0$ erhalten wir nun je zwei transformierte Gleichungen

$$(a) \quad \begin{cases} \varphi_1 = \eta - (\xi^2 + \eta\xi) - \eta^3\xi - \eta^4\xi^2 = 0 \\ \varphi_1' = (\xi + \eta) + \xi^2 + \xi\eta^2 + \xi^2\eta^4 = 0 \end{cases} \quad (\text{aus } f = 0)$$

$$\begin{cases} \psi_1 = \eta + (\xi^2 - \eta\xi) + \eta^3\xi - \eta^4\xi^2 = 0 \\ \psi_1' = (\xi + \eta) + \xi^2 + \xi\eta^2 - \eta^4\xi^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{aus } g = 0)$$

Digitized by Google

mit isomorphen Paaren:

$$[\varphi_1 = 0,\ \psi_1 = 0], \quad [\varphi_1' = 0,\ \psi_1' = 0].$$

Die Anfangsglieder sind sowohl in den Gleichungen $\varphi_1 = 0$, $\psi_1 = 0$, wie auch in den Gleichungen $\varphi_1' = 0$, $\psi_1' = 0$ linear. Darum wird durch sie die Vielfachheit des Durchschnittspunktes $(0, 0)$ um $1.1 + 1.1 = 2$ erhoben. Sie sind aber noch kommensurabel und wir müssen darum beide Paare der Gleichungen (a) weiter transformieren.

Aus $\varphi_1 = 0$, $\psi_1 = 0$ erhalten wir resp.:

$$\varphi_2 = (\eta_1 - \xi_1) + \cdots = 0, \quad \psi_2 = (\eta_1 + \xi_1) + \cdots = 0.$$

Die Ordnungen dieser Gleichungen erheben die Vielfachheit des Durchschnittspunktes um 1.1 und da die Anfangsglieder nicht mehr kommensurabel sind, so brechen wir hier die isomorphen Genealogien mit $\varphi_2 = 0$, $\psi_2 = 0$ auf, indem wir sie durch Transformationen der Gleichungen $\varphi_1' = 0$, $\psi_1' = 0$ noch weiterhin zu erweitern suchen.

Diese Erweiterung ergibt nun sukzessive folgende Paare von Gleichungen:

(b)

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} \varphi_2' &= 0 \\ \psi_2' &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ mit dem identischen Anfangsgliede } (\xi_1 + \eta_1) \\ \left.\begin{aligned} \varphi_2'' &= 0 \\ \psi_2'' &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ „ „ „ „ } (\xi_2 + \eta_2) \\ \left.\begin{aligned} \varphi_2''' &= 0 \\ \psi_2''' &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ „ „ „ „ } (\eta_3 + 2\xi_3) \\ \left.\begin{aligned} \varphi^{IV} &= 0 \\ \psi^{IV} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ „ „ „ „ } (\xi_4 + \eta_4) \\ \text{und schließlich:} \\ \varphi_2^V = 0 \text{ mit dem Anfangsgliede: } \eta_5 \\ \psi_2^V = 0 \text{ „ „ „ } \eta_5 - 2\xi_5 \end{cases}$$

Die Anfangsglieder dieses letzten Paares sind nicht mehr kommensurabel.

Die Gleichungen (b) erhöhen die Vielfachheit des Durchschnittspunktes um 5, so daß dem Punkte $(xy) = (0, 0)$ im ganzen die Vielfachheit $4 + 2 + 1 + 5 = 12$ zuzuschreiben ist.

Art. 21. Die Tragweite der bis jetzt aufgestellten Sätze wird erkannt, wenn wir sie bei Durchführung einer Aufgabe, welche für die geometrische Interpretation der Weierstraßschen Untersuchungen von grundlegender Bedeutung ist, anzuwenden versuchen.

Digitized by Google

Es sei $G_{f,\delta}$ — wie früher — die Genealogie der Gleichung $f=0$ im Punkte M_δ.

Wir entfernen aus $G_{f,\delta}$ alle Gleichungen von den Ordnungen $=1$, so daß dadurch eine „verkürzte" Genealogie $\overline{G}_{f,\delta}$ entsteht und betrachten in dieser eine beliebige Kette von Gleichungen

$$f=0,\ \varphi_1=0.\ \varphi_2=0,\ldots,\ \varphi_{\sigma-1}=0, \tag{5}$$

wo $\varphi_{\sigma-1}=0$ eine der Endgleichungen (jetzt von der Ordnung >1) ist.

Die Ordnungen dieser Gleichungen nennen wir der Reihe nach:

$$\mu>1,\ \mu_1>1,\ \mu_2>1,\ldots,\ \mu_{\sigma-1}>1$$

und bezeichnen die Substitutionen, mit deren Hilfe $\varphi_1=0$ aus $f=0$, $\varphi_2=0$ aus $\varphi_1=0,\ldots,\varphi_{\sigma-1}=0$ aus $\varphi_{\sigma-2}=0$ entsteht, durch

$$S_1,\ S_2,\ldots,\ S_{\sigma-1}. \tag{6}$$

Nach dieser Vorbereitung stellen wir eine Gleichung $g=0$ q^{ten} Grades in x, y mit noch unbestimmten Koeffizienten $A', B',\ldots$ auf und verlangen, daß sie eine Kurve C_q' von folgenden Eigenschaften definiert:

In M_δ soll sie einen $(\mu-1)$-fachen Punkt besitzen. Dazu ist nötig, daß ihre Koeffizienten $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ Bedingungen erfüllen. Ist dies geschehen, so verlangen wir weiter, daß sie nach Anwendung der Transformation S_1 eine Gleichung $\psi_1=0$ der Ordnung (μ_1-1) ergebe. Dazu sind $\frac{\mu_1(\mu_1-1)}{2}$ Bedingungen nötig. Sind sie erfüllt, so wenden wir an $\psi_1=0$ die Substitution S_2 und verlangen, daß die durch dieses S_2 transformierte Gleichung $\psi_2=0$ von der Ordnung (μ_2-1) werde. Dazu sind wieder $\frac{\mu_2(\mu_2-1)}{2}$ Bedingungen nötig. Fährt man so fort, so bekommt man eine mit (5) isomorphe Kette von Gleichungen

$$g=0,\ \psi_1=0,\ \psi_2=0,\ldots,\psi_{\sigma-1}=0 \tag{6}$$

deren Ordnungen resp.

$$\mu-1,\ \mu_1-1,\ \mu_2-1,\ldots,\ \mu_{\sigma-1}-1 \tag{7}$$

sind.

[Sind von einem μ_ε angefangen die Ordnungen $\mu_\varepsilon, \mu_{\varepsilon-1},\ldots,\mu_{\sigma-}$ alle gleich 2, so sind die Gleichungen $\psi_\varepsilon=0,\ \psi_{\varepsilon+1}=0,\ldots,\psi_{\sigma-1}=0$ alle von der Ordnung $=1$.]

Digitized by Google

Wird nun die Gleichung $g=0$ in bezug auf alle in den Genealogien $\overline{G}_{f\delta}$, $\delta=1,2,\ldots k$ auftretenden Ketten (kurz: in allen Genealogien $\overline{G}_{f\delta}$, $\delta=1,2,\ldots k$) auf die obige Weise behandelt, so wird jede Kurve C_q', welche durch die Gleichung $g=0$ — nach Berücksichtigung aller

$$\sum_{\delta}\sum \frac{\mu(\mu-1)}{2} \tag{8}$$

eingeführten Bedingungen — definiert wird, eine adjungierte Kurve q^{ten} Grades genannt.

Liegt M_δ im Unendlichen, so hat man zunächst die Gleichungen $f=0$, $g=0$ — wie im Kapitel II — resp. in die Reihen von Gleichungen $\varphi(\xi\eta)=0$, $\varphi'(\xi\eta)=0,\ldots,\gamma(\xi\eta)=0$, $\gamma'(\xi\eta)=0$, umzuformen und dann die Gleichungen $\gamma(\xi\eta)=0$, $\gamma'(\xi\eta)=0,\ldots$ in der Umgebung des Punktes $(\xi\eta)=(00)$ nach der für jeden im Endlichen gelegenen vielfachen Punkt gegebenen Regel zu behandeln.

Nun ist die Summe (8) $=d$ für die Kurve C_n [Art. 15] und wir gewinnen den Satz:

II. Alle zu C_n adjungierten Kurven C_q' eines beliebigen Grades q werden durch d Bedingungen charakterisiert, wo d die Anzahl aller in C_n enthaltenen Doppelpunkte bedeutet.[1]) Nach Art. 20 fallen in alle M_δ, $(\delta=1,2,\ldots k)$ $2d$ Durchschnittspunkte der Kurven C_n, C_q' hinein.

Wir bemerken noch, daß der Grad q auf diese d Bedingungen keinen Einfluß ausübt. Sie sind dieselben bei jedem q.

Wir wollen die Durchführung der Rechnungen an zwei Beispielen zeigen.

I. Die Kurve

$$f=ay^2+bx^4+bx^5=0$$

mit beliebigen, von Null verschiedenen a, b besitzt im Endlichen nur einen vielfachen Punkt (0, 0) mit der Zusamensetzungsreihe [2, 2]. Setzt man

$$x=\xi,\quad y=\xi.\eta, \tag{a}$$

so erhält man die transformierte Gleichung:

$$\varphi=a\eta^2+b\xi^2+b\xi^3=0,$$

welche weiter zu einer Gleichung von der Ordnung $=1$ führt.

[1]) Ergibt $f=0$ in einem M_δ für alle linearen Faktoren ihres Anfangsgliedes alle nächstfolgenden transformierten Gleichungen von den Ordnungen $=1$, so besteht die Genealogie $G_{\varrho,\delta}$ der Kurve C_q' in M_δ bloß aus $g=0$.

Digitized by Google

Um die Kurve im Unendlichen zu prüfen, setzen wir

$$(b) \qquad x = \frac{\eta}{\xi}, \quad y = -\frac{1}{\xi}.$$

Wir erhalten:

$$f_1 = a\xi^3 + b\xi\eta^4 + b\eta^5 = 0,$$

welche Gleichung die Ordnung 3 besitzt und nach den Substitutionen

$$(c) \qquad \xi = \xi_1\eta_{11}, \quad \eta = \xi_1$$

zu der transformierten Gleichung

$$\varphi_1 = b\xi_1^2 + a\eta_{11}^3 + b\xi_1^2\eta_{11} = 0$$

führt. Die nächstfolgende Gleichung wird von der Ordnung 1 sein. Im Unendlichen haben wir also einen zweifachen Punkt mit der Zusammensetzungsreihe [3, 2].

Die Gleichung der adjungierten Kurve dritten Grades soll nun in der Umgebung des Punktes (0, 0) die Form haben

$$g = (xy)_1 + (xy)_2 + (xy)_3 = (a_0x + a_1y) + (b_0x^2 + b_1xy + b_2y^2) +$$
$$+ (c_0x^3 + c_1x^2y + c_2xy^2 + c_3y^3) = 0.$$

Nach den Substitutionen (*a*) erhalten wir daraus

$$\psi = (1, \eta)_1 + \xi(1, \eta)_2 + \xi^2(1, \eta)_3 = 0$$

und da diese Gleichung die Ordnung 1 besitzen soll, so muß $a_0 = 0$ sein, wodurch

$$(d) \qquad g = a_1y + (xy)_2 + (xy)_3 = 0$$

wird.

Nach Anwendung der Substitutionen (*b*) in (*d*) erhalten wir

$$g_1 = -a_1\xi^2 + \xi(\eta_{11}, -1)_2 + (\eta_{11}, -1)_3 = 0$$

und da diese Gleichung von der Ordnung 2 sein soll, so muß: $b_2 = c_3 = c_2 = 0$ sein, wodurch

$$g_1 = -a_1\xi^2 + \xi(b_0\eta^2 - b_1\eta) + (c_0\eta^3 - c_1\eta^2) = 0$$

wird.

Daraus entsteht nach Anwendung der Substitutionen (*c*) die Gleichung

$$\psi_1 = -a_1\eta_{11}^2 + \eta_{11}(b_0\xi_1 - b_1) + (c_0\xi_1 - c_1) = 0,$$

welche von der Ordnung 1 sein soll und was durch $c_1 = 0$ erreicht wird.

Digitized by Google

Die adjungierte Kurve des verlangten 3. Grades wird also durch die Gleichung:

$$g = a_1 y + b_0 x^2 + b_1 x y + c_0 x^3 = 0$$

mit vollkommen beliebigen Koeffizienten definiert.

II. Das hyperelliptische (resp. elliptische) Gebilde

$$(h) \qquad y^2 = (x - a_1) \,.\, (x - a_2) \ldots (x - a_n)$$

[mit allen unter einander verschiedenen a_s], besitzt im Endlichen keine vielfachen Punkte. Schreiben wir nun die Gleichung (h) in der Form:

$$y^2 = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots + A_n$$

und setzen

$$(\alpha) \qquad x = \frac{\eta}{\xi}, \quad y = -\frac{1}{\xi},$$

so erhalten wir

$$(h') \qquad \xi^{n-2} = \eta^n + A_1 \eta^{n-1} \xi + A_2 \eta^{n-2} \xi^2 + \cdots + A_n \xi^n$$

und dies zeigt (Art. 14, Gl. 20), daß das Gebilde (h) im Unendlichen einen $(n-2)$-fachen Punkt mit der Zusammensetzungsreihe

$$[n-2, 2, 2, 2, \ldots, 2]$$

besitzt. Aus der Gleichung (h') erhalten wir durch die Reihe von Substitutionen

$$(\alpha') \qquad [\xi = \xi_1 \eta_1 \,,\, \eta = \xi_1], \; [\xi_1 = \xi_2 \eta_2 \,,\, \eta_1 = \xi_2], \ldots$$

r transformierte Gleichungen von den Ordnungen 2, wo

$$r = \frac{n}{2} - 1, \text{ oder} = \frac{n+1}{2} - 2$$

ist, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Versuchen wir nun die adjungierte Kurve $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades für das Gebilde (h') zu konstruieren und schreiben — da sie im Punkte $(\xi\, \eta) = (0\, 0)$ einen $(n-3)$-fachen Punkt besitzen soll — ihre Gleichung in der Form

$$\gamma = (\xi\, \eta)_{n-3} + (\xi\, \eta)_{n-2} = 0,$$

wo

$$(\xi\, \eta)_{n-3} = c_{n-3} \xi^{n-3} + c_{n-4} \xi \,.\, \eta^{n-4} + \cdots + c_0 \eta^{n-3}$$

$$(\xi\, \eta)_{n-2} = d_{n-2} \xi^{n-2} + d_{n-3} \xi^{n-3} \,.\, \eta + \cdots + d_0 \eta^{n-2}.$$

Nach der ersten der Substitutionen (α') erhalten wir aus $\gamma = 0$:

$$\varphi_1 = (\eta_1, 1)_{n-3} + \xi_1 (\eta_1, 1)_{n-2} = 0,$$

Digitized by Google

und da diese Gleichung von der Ordnung 1 sein soll, so muß $c_0 = 0$ werden.

Aus $\varphi_1 = 0$ erhalten wir durch die zweite der Substitutionen (α') die Gleichung

$$\varphi_2 = \left[c_{n-3}\,\xi_2^{n-4} + c_{n-4}\,\xi_2^{n-5} + \cdots + c_1\right] + \eta_2\,(\xi_2, 1)_{n-2} = 0$$

welche wieder von der Ordnung 1 sein soll und was durch $c_1 = 0$ erreicht wird. Fährt man so fort, so erhält man im ganzen r Bedingungen:

$$c_0 = c_1 = c_2 = \cdots c_{r-1} = 0$$

und die Gleichung $\gamma = 0$ hat die Form:

$$\gamma = \left[c_{n-3}\,\xi^{n-3} + c_{n-4}\,\xi^{n-4}\,\eta + \cdots + c_r \xi^r \,.\, \eta^{n-3-r}\right] + (\xi\,\eta)_{n-2} = 0.$$

Aus dieser — wenn man mit Hilfe der inversen Substitution von (α) zu den Variabeln x, y übergeht und berücksichtigt, daß in $\gamma = 0$ die Koeffizienten vollkommen beliebig sind — wird erhalten:

$$(h'') \qquad \begin{aligned} g = &\left[\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_{n-3-r}\, x^{n-3-r}\right] y + \\ &+ \mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \cdots + \mu_{n-2} x^{n-2} = 0. \end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung der adjungierten Kurve $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades für das Gebilde (h).

Das Gebilde (h) hat

$$(h''') \qquad d = \frac{(n-2)^2}{2}, \text{ resp. } = \frac{(n-2)^2 - 1}{2},$$

je nachdem n gerade oder ungerade ist und ebensoviel Bedingungen hat man zur Aufstellung der Gleichung (h'') verbraucht.

Art. 22. Wir nehmen nun an, daß die Grundkurve C_n, $(f = 0)$ irreduktibel ist und wollen über die Existenz der adjungierten Kurve C_q, $(g = 0)$ des vorgeschriebenen Grades q entscheiden.

Die Anzahl der Bedingungen, welche jede solche Kurve in allen M_δ — $\delta = 1, 2, \ldots, k$ — charakterisieren, ist $= d$. Wird nun

$$(9) \qquad d \leqq \frac{q\,(q+3)}{2},$$

so ist die Kurve möglich [Art. 18], was bei hinreichend großem q immer erreicht werden kann.

Suchen wir nun den kleinsten möglichen Grad $q = q_1$, den wir $< n$ annehmen und versuchen ihn zu bestimmen.

Digitized by Google

Es sei $q_1 = (n - \varkappa)$ und

$$d = \frac{(n-\varkappa)(n-\varkappa+3)}{2} - \omega, \tag{10}$$

wo ω notwendig ganz, positiv oder Null sein muß.

Da $q_1 < n$ ist, so können wir zur Bestimmung der C_{q_1}, $\frac{q_1(q_1+3)}{2}$ beliebige Punkte auf C_n wählen. Jeder dieser Punkte ergibt eine Bedingung und wir müssen in unserem Falle jene d Gleichungen, welche C_{q_1} zu einer adjungierten Kurve machen, als einen Teil dieser Bedingungen betrachten.

Wir können also außerhalb aller M_3 noch

$$\frac{(n-\varkappa)(n-\varkappa+3)}{2} - d$$

beliebige Punkte auf $f = 0$ wählen.

Jeder dieser Punkte wird zu einem Durchschnittspunkte beider Kurven und wenn wir zu diesen noch $2d$ Durchschnittspunkte in allen M_3 hinzuaddieren, so muß die Gesamtheit dieser Punkte:

$$\frac{(n-\varkappa)(n-\varkappa+3)}{2} + d \leqq n(n-\varkappa)$$

sein. Für d setzen wir hier den Ausdruck (10), so erhalten wir schließlich

$$\omega \geqq (n-\varkappa)(3-\varkappa). \tag{11}$$

Da nun $(n-\varkappa) > 0$ ist, so muß für das Gleichheitszeichen auch $(3-\varkappa) \geqq 0$ werden, was nur für $\varkappa = 1, 2, 3$ der Fall ist.

Wird nun in (10) ω durch seine untere Grenze (11) vertreten, so erhalten wir den Maximalwert von d:

$$\text{Max. } d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \left(1 - \frac{\varkappa^2 - 3\varkappa}{2}\right), \quad \varkappa = 1, 2, 3.$$

Dies ergibt:

$$(A) \qquad \text{Max. } d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \quad \text{für } \varkappa = 1, 2, \text{ und}$$

$$(B) \qquad \text{Max. } d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1 \quad \text{für } \varkappa = 3.$$

Aus (A) folgern wir, daß die Anzahl der nach Grundsätzen des Art. 15 definierten Doppelpunkte, welche überhaupt in einer C_n zu finden sind, die Zahl $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ nicht übersteigen kann.

Digitized by Google

Wir bezeichnen dies — wie gewöhnlich — durch Ungleichheit

$$d \leqq \frac{(n-1)(u-2)}{2}$$

und sprechen den Satz aus:

III. Die adjungierten Kurven der Grade $(n-2)$, $(n-1)$ und selbstverständlich auch der Grade n, $(n+1)$, $(n+2)$, ... sind für jede beliebige Kurve C_n [mit beliebiger Anzahl ihrer Doppelpunkte $d \leqq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$] möglich.

Hingegen ergibt (B) folgenden Satz:

IV. Eine adjungierte Kurve des Grades $(n-3)$ ist dann möglich, wenn die Grundkurve $f=0$ ihre Doppelpunkte in der Anzahl

$$d \leqq \frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1$$

besitzt.

Hat die Kurve C_n d Doppelpunkte, so nennt man — wie bekannt — die Differenz

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - d = p$$

ihr Geschlecht und wir können jetzt — nach Einführung dieses Begriffes — die Sätze III, IV auch so aussprechen:

V. Die adjungierten Kurven der Grade $(n-2)$, $(n-1)$, n, $(n+1)$, ... sind bei jedem Geschlechte möglich. Hingegen sind die Adjungierten des Grades $(n-3)$ nur beim Geschlechte $p \geqq 1$ möglich.

Kehren wir nun zur Ungleichheit (9) für $q = n - \varkappa$, $\varkappa = 4, 5, 6, \ldots$ zurück, so haben wir nach Einführung von p:

$$\frac{(n-\varkappa)(n-\varkappa+3)}{2} \geqq d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$$

und daraus:

$$p \geqq \frac{(\varkappa-3)(2n-\varkappa)}{2} + 1, \quad \varkappa = 4, 5, 6, \ldots$$

D. h.:

VI. Die adjungierten Kurven der Grade

$$(n-4),\ (n-5),\ (n-6), \ldots$$

sind möglich, wenn die Grundkurve resp. von Geschlechtern:

$$p \geqq n-1,\ p \geqq 2n-4,\ p \geqq 3n-8, \ldots \quad \text{ist.}$$

Digitized by Google

Art. 23. Wie wir bereits im vorigen Artikel bemerkt haben, können wir für eine adjungierte Kurve $C'_{n-\varkappa}$ des Grades $(n-\varkappa)$

$$\frac{(n-\varkappa)(n-\varkappa+3)}{2} - d = z \tag{12}$$

beliebige Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_z$ auf der Grundkurve $f=0$ wählen.

Nun ist

$$d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p \tag{13}$$

und wird dies in (12) berücksichtigt, so haben wir:

$\alpha)$ für $\varkappa = 2$, $z = (p+1) + (n-3)$

$\beta)$ „ $\varkappa = 1$, $z = (p+1) + (2n-3)$ und

$\gamma)$ „ $\varkappa > 2$, $z = (p+1) - \frac{(\varkappa-3)(2n-\varkappa)}{2} - 2$,

wo natürlich im Falle $\gamma)$ das Geschlecht p durch die Sätze V, VI (vor. Art.) bedingt wird. Wir erhalten für $\varkappa = 3$ speziell

$$\delta) \qquad z = p - 1.$$

Entfernt man nun von allen $n(n-\varkappa)$ Durchschnittspunkten der Kurven C_n, $C'_{n-\varkappa}$ alle $2d$ Durchschnittspunkte, welche stets in M_δ $(\delta = 1, 2, \ldots k)$ fallen und dann die z gewählten Punkte A_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, z)$, welche auch als Durchschnittspunkte auftreten, so werden die übrigen

$$w = n(n-\varkappa) - 2d - z \tag{14}$$

Durchschnittspunkte B_β, $(\beta = 1, 2, \ldots, w)$ von den gewählten Punkten A_α (algebraisch) abhängig sein.

Setzt man in (14) für d die Formel (13) und für z die Ausdrücke $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ ein, so erhalten wir:

$\alpha')$ $w = p$ für $\varkappa = 2$

$\beta')$ $w = p$ „ $\varkappa = 1$ und

$\gamma')$ $w = p - \frac{\varkappa(\varkappa-3)}{2} - 1$ für $\varkappa > 2$.

Speziell wird für $\varkappa = 3$

$$\delta') \qquad w = p - 1.$$

Diese Untersuchungen ergeben somit folgendes Resultat:

VII. Konstruiert man eine adjungierte Kurve der Grade $n-1$, $n-2$, so kann sie durch Fixierung von z beliebigen Punkten außerhalb aller M_δ auf $f=0$ lie-

Digitized by Google

genden Punkten A_α vollkommen bestimmt werden und z wird immer $> p$ für $n \geqq 3$ [vgl. $\alpha)\,\beta$)]. Die durch diese z Punkte bestimmte Kurve geht noch durch $w = p$ Punkte B_β, welche auf $f = 0$ liegen und von den gewählten A_α abhängig sind.

Im vorigen Artikel haben wir d für das hyperelliptische Gebilde (h) bestimmt. Sein Geschlecht wird $= \frac{n-2}{2}$ resp. $\frac{n-1}{2}$, je nachdem n gerade oder ungerade wird. Seine adjungierte Kurve C'_{n-2} [vgl. (h'')] besitzt

$$\frac{3n}{2} - 2 \quad \text{resp.} \quad \frac{3n-5}{2} + 1$$

Koeffizienten und wird augenscheinlich durch

$$z = \frac{3n}{2} - 3 \quad \text{resp.} \quad \frac{3n-5}{2}$$

Punkte A_α, welche auf (h) willkürlich fixiert werden können, bestimmt.

VIII. Im Falle $q = n - 3$, [wenn $p \geqq 1$ wird], konstruieren wir eine vollkommen bestimmte adjungierte Kurve C'_{n-3}, wenn man $(p-1)$ beliebige Punkte A_α auf $f = 0$ fixiert. Sie geht noch durch $(p-1)$ auf $f = 0$ liegende Punkte B_β, welche von A_α abhängig sind, hindurch.

Art. 24. Wir wollen jetzt zu den adjungierten Kurven des Grades $q \geqq n$ übergehen.

Es gilt bekanntlich der Satz, daß für eine beliebige Kurve $C_{n+\varkappa}$ des Grades $(n+\varkappa)$, $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$ nur

$$\zeta = n(n+\varkappa) - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n(\varkappa+3) - 2$$

Bedingungen, welche aus der Wahl beliebiger z Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_z$ auf einer Kurve C_n n^{ten} Grades entstehen, eingeführt werden können. Jeder dieser Punkte wird zu einem Durchschnittspunkte der Kurven $C_{n+\varkappa}$, C_n und die übrigen

$$w' = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Durchschnittspunkte $B_1, B_2 \ldots B_w$, werden von den A_α abhängen.

Es entsteht dadurch ein Büschel von Kurven, welche alle durch die Punkte A_α, B_β hindurchgehen. Eine Kurve dieses Büschels wird bestimmt, wenn man außerhalb $f = 0$ noch

$$\frac{(n+\varkappa)(n+\varkappa+3)}{2} - \zeta = v'$$

beliebige Punkte C_γ $(\gamma = 1, 2, \ldots v')$ fixiert.

Digitized by Google

Soll nun $C_{n+\varkappa}$ eine adjungierte $C'_{n+\varkappa}$ werden, so erfüllt sie in allen M_δ d Bedingungen und besitzt dort $2d$ Durchschnittspunkte mit C_n. Für sie wird also die Anzahl der auf C_n willkürlich zu wählenden Punkte A_α nur

$$z = \zeta - d = (p+1) + n(\varkappa+3) - 3 \tag{15}$$

betragen und die Anzahl der abhängigen Punkte B_β sollte sich auf

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + d$$

erhöhen. Da sich nun unter diesen Punkten die $2d$ Durchschnittspunkte in allen M_δ befinden, so müssen sie entfernt werden, wodurch sich die Anzahl der von $A_\alpha\,(\alpha = 1, 2, \ldots, z)$ abhängigen, auf $f = 0$ gelegenen Punkte auf

$$w = w' + d - 2d = p \tag{16}$$

reduzieren wird. Wir nennen diese Punkte: $B_1, B_2, \ldots B_w, (w = p)$.

Dadurch werden jedoch noch nicht alle $\frac{(n+\varkappa)(n+\varkappa+3)}{2}$ nötigen Punkte verbraucht. Es entsteht — wie im allgemeinen Falle — ein Büschel von adjungierten Kurven desselben Grades $(n+\varkappa)$ mit den Grundpunkten M_δ, $(\delta = 1, 2, \ldots, k)$, A_α, $(\alpha = 1, 2, \ldots, z)$, B_β, $(\beta = 1, 2, \ldots, w)$ und es wird eine bestimmte Kurve dieses Büschels dadurch definiert, daß zu den $(d+z)$ in allen M_δ und A_α verbrauchten Bedingungen noch

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{(n+\varkappa)(n+\varkappa+3)}{2} - d - z = \\ &= \frac{(n^2-3n) + (\varkappa^3+3\varkappa^2)}{2} - d - p + 2 \end{aligned}\right| \tag{17}$$

Bedingungen, welche aus der Wahl von v willkürlichen, außerhalb $f = 0$ liegenden Punkten C_γ, $(\gamma = 1, 2, \ldots, v)$ entstehen, zugegeben werden.

Wir haben den Satz:

IX. Ist $q \geqq n$, so wird durch Fixierung von z willkürlichen Punkten A_α auf $f = 0$ ein Büschel von adjungierten Kurven konstruiert, wo z auch in diesem Falle $> p$ wird. Dieses Büschel hat in allen Punkten M_δ, in allen Punkten A_α und noch in p fixen Punkten B_β, welche auf $f = 0$ liegen und von allen A_α abhängen, seine $(2d + z + p)$ Grundpunkte. Eine Kurve dieses Büschels wird bestimmt, wenn man noch v beliebige Punkte C_γ, welche außerhalb $f = 0$ liegen, markiert und die Kurve durch diese Punkte hindurchgehen läßt.

Digitized by Google

Der Umstand, daß für $q \geqq (n-2)$ die Anzahl z immer größer als p und w genau $= p$ wird, ist für die Theorie der algebraischen Funktionen von der fundamentalen Bedeutung.

Art. 25. Werden für eine adjungierte Kurve des Grades $(n-2)$ oder $(n-1)$ nur ihre d Bedingungen in allen M_δ in Rücksicht genommen und für eine Kurve des Grades $q \geqq n$, neben den d erwähnten Bedingungen noch v Punkte C_γ außerhalb $f=0$ fixiert, so können die Gleichungen aller Adjungierten der betrachteten Grade in der Form

$$\lambda_1 \gamma_1(xy) + \lambda_2 \gamma_2(xy) + \cdots + \lambda_{z+1} \gamma_{z+1}(xy) = 0 \tag{18}$$

geschrieben werden. Die Funktionen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{z+1}$ sind ganze rationale Funktionen, welche gleich Null gesetzt gewisse adjungierte Kurven definieren.

Jedem Systeme beliebig auf $f=0$ gewählter Punkte A_α, durch welche die Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{z+1}$ bestimmt werden, entspricht ein System von $w=p$ nicht mehr willkürlichen, aber auf $f=0$ liegenden Punkten B_β, und will man dies ersichtlich machen, so wird die Gleichung (18) in der Form:

$$g(xy, A_1 A_2 \ldots A_z \mid B_1, B_2 \ldots B_p) = 0 \tag{19}$$

geschrieben.

Für den Grad $q = n-3$ ist $z = p-1$, $w = p-1$ und die Gleichung der Adjungierten dieses Grades wird in der Form

$$g(xy, A_1 A_2 \ldots A_{p-1} \mid B_1 B_2 \ldots B_{p-1}) = 0 \tag{20}$$

geschrieben. Sie enthält p beliebige Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ linear und homogen.

Die in (19) und (20) auftretenden ganzen rationalen Funktionen

$$\begin{cases} (a) & g(xy, A_1 A_2 \ldots A_z \mid B_1 B_2 \ldots B_p), \\ (b) & g(xy, A_1 A_2 \ldots A_{p-1} \mid B_1 B_2 \ldots B_{p-1}) \end{cases} \tag{21}$$

werden als adjungierte Funktionen der unbeschränkt veränderlichen Größen x, y des Grades $\geqq (n-2)$, resp. $= (n-3)$ bezeichnet. In der Gesamtheit der die Gleichung $f(xy)=0$ befriedigenden Stellen besitzen sie z resp. $p-1$ willkürliche und p resp. $(p-1)$ abhängige Nullstellen.[1])

Jede Funktion (21, a) ist lineare homogene Funktion von z und jede Funktion (21, b) von p speziellen adjungierten Funktionen, welche wir adjungierte Basisfunktionen nennen werden.

[1]) Da im folgenden fast ausschließlich nur von solchen Nullpunkten und Unendlichkeitspunkten (einer Funktion), welche in $f=0$ liegen, die Rede sein wird, werden sie kurz Nullpunkte und Unendlichkeitspunkte, ohne zu erwähnen, daß sie in $f=0$ liegen sollen, genannt.

Digitized by Google

Aus den Formeln α), β), δ) des Art. 23 und aus (15) — Art. 24 — entnehmen wir, daß, wenn $q \geqq n-2$ sein soll, die Größe z gleichzeitig mit q wächst, und zwar so, daß, wenn q um h Einheiten wächst, die Größe z in $z+n.h$ übergeht.

Sind demnach q_1, q_2 die Grade zweier adjungierter Funktionen und hat z für diese Funktionen die entsprechenden Werte z_1, z_2, so muß gleichzeitig mit $q_1 \gtreqless q_2$ auch $z_1 \gtreqless z_2$ werden und umgekehrt muß aus $z_1 \gtreqless z_2$ auch $q_1 \gtreqless q_2$ hervorgehen.[1])

Es muß also gleichzeitig mit $q_1 \gtreqless q_2$ auch $z_1+p \gtreqless z_2+p$ werden.

Nun bezeichnet $(z+p)$ die Anzahl aller derjenigen Nullpunkte der adjungierten Funktion, welche in $f(xy)=0$ liegen, und wir können daher den Satz aussprechen:

X. Haben zwei adjungierte Funktionen dieselbe Gesamtanzahl ihrer Nullpunkte in $f(xy)=0$ und ist sie $>2(p-1)$, so sind sie desselben Grades $q \geqq (n-2)$. Wenn diese Gesamtanzahlen $2(p-1)$ betragen, haben wir mit zwei adjungierten Funktionen desselben Grades $q=(n-3)$ zu tun.

Nun brauchen wir zur vollständigen Bestimmung einer adjungierten Funktion nur z Punkte in $f(xy)=0$, wenn $q=(n-1)$ oder $=(n-2)$ wird, nur $(p-1)$ Punkte in $f(xy)=0$, wenn $q=(n-3)$ wird, und endlich z Punkte in $f(xy)=0$ und v Punkte außerhalb $f(xy)=0$ für alle $q \geqq n$.

Daraus folgt:

XI. Haben zwei adjungierte Funktionen denselben Grad oder — was auf dasselbe hinauskommt — dieselbe Gesamtanzahl ihrer Nullpunkte in $f(xy)=0$ und befinden sich unter diesen Punkten ν gemeinsame Punkte, so werden sie bis auf eine multiplikative Konstante identisch, wenn die Größe ν folgende Bedingungen erfüllt: Es soll sein:

a) $\nu \geqq z$, wenn $q=(n-1)$ oder $(n-2)$

b) $\nu \geqq (p-1)$, wenn $q=(n-3)$.

c) Im Falle $q \geqq n$, muß nicht nur $\nu \geqq z$ sein, sondern es müssen überdies die außerhalb $f=0$ fixierten Nullpunkte identisch werden.[2])

[1]) Aus der Formel (17) — Art. (24) — ersehen wir, daß mit $q_1 \gtreqless q_2$ auch gleichzeitig $v_1 \gtreqless v_2$ wird, wo v_1, v_2 die den q_1, q_2 (welche jetzt $\geqq n$ sein sollen) entsprechenden Werte bezeichnen.

[2]) Die obere Grenze für ν, welche nicht überschritten werden darf, ist: im Falle *a*), *c*) $=z+p$, im Falle *b*) $=2p-2$.

Wir bemerken noch: In einer Adjungierten können von ihren $(z+p)$ Nullpunkten beliebige z Punkte für willkürlich gegebene angenommen werden.

Digitized by Google

Art. 26. Wir schließen unsere Untersuchungen über adjungierte Kurven mit zwei Bemerkungen, welche später zur Anwendung kommen werden.

I. In der Gleichung

$$(22)\quad g(xy, A_1 A_2 \ldots A_z \mid B_1 B_2 \ldots B_\rho) = 0,\ q = n-1,\ n = 2,$$

sind die Punkte B_β von A_α abhängig. Ihre Koordinaten werden auf folgende Weise bestimmt.

Stellt man neben der Gleichung (22) noch die Gleichung $f(xy) = 0$ und bildet die Resultanten

$$R_1(x) = 0, \quad R_2(y) = 0$$

dieser beiden Gleichungen, so liefert $R_1(x) = 0$ resp. $R_2(y) = 0$ unter seinen Wurzeln die Abszissen x resp. die Ordinaten y der $2d$ Durchschnittspunkte von $g = 0$ und $f = 0$ in allen M_3 und die Abszissen resp. Ordinaten der Punkte A_α. Entfernt man diese Wurzeln, so bleiben zwei Gleichungen p^{ten} Grades

$$R_1'(x) = c_0 x^p + c_1 x^{p-1} + \cdots + c_p = 0$$

$$R_1'(y) = d_0 y^p + d_1 y^{p-1} + \cdots + d_p = 0$$

mit den rational von den Koordinaten der Punkte A_α abhängigen Koeffizienten. Sind nun die Wurzeln der ersten dieser Gleichungen: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ und die der zweiten: $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$, und liegen

$$(23)\qquad (\xi_1 \eta_{i_1}),\ (\xi_2 \eta_{i_2}), \ldots, (\xi_p \eta_{i_p})$$

in $f(xy) = 0$, so sind die Paare (23) die Koordinaten der p Punkte B_β.

II. Sollen von den z Punkten A_α, $\varkappa$ dieser Punkte in einen Punkt $A = (\xi\eta)$, wo $f(\xi\eta) = 0$ ist, zusammenfallen, so haben wir jetzt die Adjungierte

$$g(xy, \underline{A A A \ldots A} A_{\varkappa+1} \ldots A_z \mid B_1 B_2 \ldots B_p) = 0$$

$$(q = n-1, n-2)$$

zu bilden, welche in A $\varkappa$ gemeinsame Punkte mit $f(xy) = 0$ besitzen soll.

Ist $$\xi + t\,\mathfrak{P}_1(t),\ \eta + t\,\mathfrak{P}_2(t)$$

das Funktionenpaar, welches den nichtsingulären Punkt $(\xi\eta)$ umgibt, und haben die Funktionen

$$\gamma_s(xy), \quad s = 1, 2, \ldots, z+1, \quad \text{(Gl. 18 vor. Art.)}$$

die Entwicklungen

$$\gamma_s\big(\xi + t\,\mathfrak{P}_1(t),\ \eta + t.\mathfrak{P}_2(t)\big) =$$

$$= \gamma_s(\xi\eta) + \gamma_s'(\xi\eta)\,t + \cdots + \gamma_s^{(\varkappa-1)}(\xi\eta)\,t^{\varkappa-1} + \cdots$$

$$s = 1\ 2, \ldots, z+1,$$

Digitized by Google

so müssen für den Punkt A folgende $\varkappa$ Bedingungen

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \gamma_1(\xi\eta) + \cdots + \lambda_{\varkappa+1}\gamma_{\varkappa+1}(\xi\eta) &= 0 \\
\lambda_1 \gamma_1'(\xi\eta) + \cdots + \lambda_{\varkappa+1}\gamma_{\varkappa+1}'(\xi\eta) &= 0 \\
&\vdots \\
\lambda_1 \gamma_1^{(\varkappa-1)}(\xi\eta) + \cdots + \lambda_{\varkappa+1}\gamma_{\varkappa+1}^{(\varkappa-1)}(\xi\eta) &= 0
\end{aligned}$$

erfüllt werden.

Sie bilden mit den für die weiteren Punkte $A_{\varkappa+1}, A_{\varkappa+2}, \ldots, A_\varkappa$ einzuführenden Bedingungen die nötige Anzahl von Gleichungen, aus welchen die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\varkappa+1}$ bestimmt werden sollen.

(Fortsetzung folgt.)

Digitized by Google

Die Rotationsbewegungen der Langgeschosse während des Fluges.

Von **E. Oekinghaus** in Königsberg i. Pr.

II. Teil.

Die aperiodischen Störungsfunktionen der Geschoßbewegung.

Die im I. Teile dargelegten Resultate des Rotationsproblems beziehen sich auf den Fall, daß der Schwerpunkt des Geschosses in geradliniger Bahn mit konstanter Geschwindigkeit fortschreite.

In Rücksicht auf die wirklichen Verhältnisse werden wir jetzt die Krümmung der Flugbahn und die veränderliche Geschwindigkeit in Rechnung ziehen und den Einfluß feststellen, den sie auf die Geschoßbewegung und die Flugbahn ausüben.

Bei der Berechnung dieser komplizierten Bewegung mit periodischen und aperiodischen Störungsgliedern kann man nun von vornherein nicht wissen, ob eine Lösung möglich ist und welchen Weg man zum Ziele einschlagen muß, um zeitraubende Umwege zu vermeiden. Es wird sich eine Teilung der Arbeit und damit der Schwierigkeiten notwendig machen, um zu prüfen, ob der gewählte Weg der richtige ist, und dann erst das allgemeine Problem in Angriff nehmen.

Die Krümmung der Flugbahn, die wir zunächst, und zwar unter der Voraussetzung konstanter Geschoßgeschwindigkeit, in Rechnung ziehen wollen, verlangt die Integration der Rotationsgleichungen in bezug auf die Variable τ der Flugbahn. Da nach dem Prinzip der Erhaltung der Rotationsebene das Langgeschoß seine ursprüngliche Richtung beizubehalten strebt, so wird seine Achse mit der Flugbahntangente wachsende Winkel bilden, die die Bewegungsverhältnisse wesentlich beeinflussen.

Die Grundgleichungen der allgemeinen Bewegung haben wir im I. Teile aufgestellt. Die Stabilität der Bewegung verlangt eine möglichst große Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Geschosses, damit dessen Schwankungen — die Präzession und Nutation — möglichst klein bleiben. Die Bewegung der Geschoßachse ist indessen keine rein periodische, weil außer den periodischen Gliedern noch aperiodische Störungsfunktionen auftreten, die mit der Zeit zunehmen und zu der bekannten Derivation oder Geschoßablenkung Anlaß geben.

Digitized by Google

9. Die Differentialgleichungen der allgemeinen Rotationsbewegung.

In den Formeln der Rotationsbewegung

$$p = \frac{d\xi}{dt} + \cos\delta\frac{d\nu}{dt} + \sin\delta\sin\nu\frac{d\nu}{dt},$$

$$q = \frac{d\delta}{dt} + \cos\nu\frac{d\tau}{dt},$$

$$r = -\sin\delta\frac{d\nu}{dt} + \sin\nu\cos\tau\frac{d\tau}{dt}$$

ist p von $\frac{d\xi}{dt}$ wenig verschieden, und die Eulerschen Gleichungen gehen über in

$$\xi = pt,$$

$$B\frac{dq}{dt} - Apr = K$$

$$B\frac{dr}{dt} + Apq = 0.$$

Die erste Gleichung setzt die Konstanz der Winkelgeschwindigkeit p voraus, was wir auch vorläufig noch annehmen wollen.

Differentieren wir die letzte Gleichung und eliminieren q mittels der vorletzten, so folgt

$$\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{A^2p^2r}{B^2} = -\frac{ApK}{B^2}.$$

Die Integration dieser linearen Gleichung zweiten Grades führt auf

$$Br = \cos\frac{Apt}{B}\int_0^t K\sin\frac{Apt}{B}\cdot dt - \sin\frac{Apt}{B}\int_0^t K\cos\frac{Apt}{B^2}\cdot dt.$$

Die teilweise Integration ergibt, wenn $\frac{Ap}{B} = n$,

$$\int K\sin nt = -\frac{K}{n}\cos nt + \frac{1}{n}\int\frac{dK}{dt}\cos nt\,.\,dt = -\frac{K}{n}\cos nt +$$

$$+\frac{1}{n^2}\frac{dK}{dt}\sin nt - \frac{1}{n^2}\int\frac{d^2K}{dt^2}\sin nt\,.\,dt,$$

woraus

$$\int_0^t K\sin nt\left(1 + \frac{B^2}{A^2p^2K}\cdot\frac{d^2K}{dt^2}\right)dt = -\frac{BK}{Ap}\cos nt + \frac{B^2}{A^2p^2}\frac{dK}{dt}\sin nt.$$

Digitized by Google

Auf ähnliche Weise ergibt sich, wenn $\left(\frac{dK}{dt}\right)_0$ den Wert von $\frac{dK}{dt}$ bei Beginn der Bewegung bedeutet,

$$\int_0^t K \cos nt \left(1 + \frac{B^2}{A^2 p^2 K} \cdot \frac{d^2 K}{dt^2}\right) dt = \frac{BK}{Ap} \sin nt +$$

$$+ \frac{B^2}{A^2 p^2} \left(\frac{dK}{dt} \cos nt - \left(\frac{dK}{dt}\right)_0\right).$$

Führen wir diese Ausdrücke in die Gleichung für r ein und vernachlässigen das Glied

$$\frac{B^2}{A^2 p^2 K} \cdot \frac{dK}{dt}$$

gegen die Eins, so folgt

$$r = -\frac{K}{Ap} + \frac{B^2}{A^2 p^2} \frac{dK}{dt} \sin \frac{Apt}{B}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit r um die Achse Oz ist also eine Funktion des Kräftepaares K und damit abhängig von der Nutation δ und von dem übrigens sehr kleinen periodischen Zusatzglied. Wir haben also

$$r = -\frac{K}{Ap}.$$

Wird dies in die zweite der obigen Gleichungen eingesetzt, so folgt mit gleicher Annäherung

$$\frac{dq}{dt} = 0.$$

Da nun q zu Anfang Null ist, so ist überhaupt $q = 0$.

Nach diesen Bestimmungen gewinnen wir die folgenden Gleichungen der Geschoßrotation

$$d\delta = -\cos \nu \, d\tau,$$

$$d\nu = \frac{K dt}{Ap \sin \delta} + \frac{\sin \nu}{\operatorname{tg} \delta} d\tau.$$

Sie wurden zuerst von N. Majevski 1872 aufgestellt.

Die Integration ist nur möglich, wenn das Kräftepaar die einfachste Form

$$K = \frac{G}{g} U r \frac{a}{c} \delta, \qquad h = \frac{a}{c},$$

Digitized by Google

also dem Winkel δ einfach proportional ist. Die ganz allgemein gültige Beziehung $v\,d\tau = -g\cos\tau\,dt$ liefert, wenn dt in die zweite obige eingesetzt wird

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{Kv}{gAp\,\delta\cos\tau} + \frac{\sin\nu}{\delta}.$$

Für $\frac{a}{c}$ setzen wir h und so ist wegen $A = u\frac{Gr^2}{g}$, $rp = v_0\,\mathrm{tg}\,\gamma$,

$$\delta\frac{dv}{d\tau} = -\frac{Uvh}{ugrp}\cdot\frac{\delta}{\cos\tau} + \sin\nu.$$

Führen wir noch ein

$$\beta = \frac{ugrp}{Uvh} = \frac{2\pi ug}{U\eta h},$$

so erhalten wir die folgenden Hauptgleichungen der Geschoßrotation:

$$\frac{d\delta}{d\tau} = -\cos\nu, \quad \delta\frac{dv}{d\tau} = -\frac{\delta}{\beta\cos\tau} + \sin\nu.$$

Die Bedeutung der Konstanten ist die frühere. Ist z. B.

$$p = 625, \quad U = 24, \quad v_0 = 520, \quad h = \frac{a}{c} = 10, \quad u = \frac{1}{2},$$

$$g = 10, \quad r = 0{,}1,$$

so ist

$$\beta = \frac{1}{400},$$

also eine kleine Zahl.

Man bemerke, daß die Urvariable, die früher t war, jetzt τ oder die Tangente der Flugbahn ist.

Zum Zwecke der Integration führen wir ein die Funktion

$$Y = \delta\cos\nu + \delta\sin\nu\,.\,z,$$

wo z eine neue Variable ist, über die wir nachher zweckmäßig verfügen werden. Die Ausdrücke $\delta\cos\nu$ und $\delta\sin\nu$ können wir auffassen als die Polarkoordinaten der Geschoßspitze. Wir haben

$$\frac{dY}{d\tau} = -\delta\sin\nu\frac{dv}{d\tau} + \cos\nu\frac{d\delta}{d\tau} + z\,.\,\delta\cos\nu\frac{dv}{d\tau} +$$

$$+ z\sin\nu\frac{d\delta}{d\tau} + \delta\sin\nu\frac{dz}{d\tau}.$$

Digitized by Google

Die Einführung der obigen Hauptgleichungen ergibt

$$\frac{dY}{d\tau} = -\sin\nu\left(-\frac{\delta}{\beta\cos\tau}+\sin\nu\right)-$$

$$-\cos\nu^2 - z\cos\nu\left(\frac{\delta}{\beta\cos\tau}-\sin\nu\right) - z\sin\nu\cos\nu + \delta\sin\nu\frac{dz}{d\tau},$$

woraus

$$\frac{dY}{d\tau} = \frac{\delta\sin\nu}{\beta\cos\tau} - 1 - \frac{z\delta\cos\nu}{\beta\cos\tau} + \delta\sin\nu\frac{dz}{d\tau}$$

oder

$$\frac{dY}{d\tau} = \left(\frac{1}{\beta\cos\tau}+\frac{dz}{d\tau}\right)\delta\sin\nu - \frac{\delta\cos\nu\,.\,z}{\beta\cos\tau} - 1.$$

Über z verfügen wir so, daß es der Bedingung

$$\frac{1}{\beta\cos\tau}+\frac{dz}{d\tau} = -\frac{z^2}{\beta\cos\tau}, \quad \text{woraus} \quad \frac{d\tau}{\beta\cos\tau} = -\frac{dz}{1+z^2},$$

genügt, wobei zu beachten ist, daß β eine Variable. Damit erhalten wir die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dY}{d\tau}+\frac{z}{\beta\cos\tau}\cdot Y + 1 = 0.$$

Die Integration liefert

$$Y = e^{-\int\frac{z\,d\tau}{\beta\cos\tau}}\left\{C - \int e^{\int\frac{z\,d\tau}{\beta\cos\tau}}\,.\,d\tau\right\}.$$

Die Einführung von $z = \operatorname{tg}\varphi$ in die Bedingungsgleichung ergibt

$$d\varphi = -\frac{d\tau}{\beta\cos\tau},$$

$$Y = \frac{1}{\cos\varphi}\left\{C - \int\cos\varphi\,d\tau\right\}.$$

Verfahren wir mit der Kombination

$$Y = \delta\sin\nu - \delta\cos\nu\,.\,z$$

wie vorher, so gewinnen wir für dasselbe z das ähnliche Integral

$$\frac{dY}{d\tau}+\frac{z}{\beta\cos\tau}\cdot Y - z = 0$$

Digitized by Google

und damit

$$Y = \frac{1}{\cos\varphi}\left\{C_1 + \int \sin\varphi\, d\tau\right\}.$$

Unsere Entwicklungen haben uns also auf die folgenden Gleichungen geführt:

$$\delta \sin\nu - \operatorname{tg}\varphi \,.\, \delta\cos\nu = \frac{1}{\cos\varphi}\left\{C_1 + \int \sin\varphi\, d\tau\right\}$$

$$\delta\cos\nu + \operatorname{tg}\varphi\ \ \delta\sin\nu = \frac{1}{\cos\varphi}\left\{C - \int \cos\varphi\, d\tau\right\},$$

die auch wie folgt geschrieben werden können:

$$\delta\sin(\nu - \varphi) = C_1 + \int \sin\varphi\, d\tau$$

$$\delta\cos(\nu - \varphi) = C - \int \cos\varphi\, d\tau.$$

10. Die durch die Krümmung der Flugbahn beeinflußte Geschoßschwankung.

Betreffs der Variable β nehmen wir zunächst an, daß die Beschleunigung U des Luftwiderstandes und die Geschoßgeschwindigkeit v konstant seien, wenigstens für eine kurze Strecke der Flugbahn. Die Bedingungsgleichung für z gibt integriert

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = -\int \frac{d\tau}{\beta\cos\tau},$$

$$\operatorname{arc\,tg}\, z = \frac{1}{\beta}\, ln \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\tau}{2}\right) + \text{Const.}$$

Die Konstante ergibt sich aus dem Anfangszustande, wo $\tau = \alpha$ der Abgangswinkel ist. Ist dann $z_\alpha = 0$, so folgt wegen $z = \operatorname{tg}\varphi$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\, z = \frac{1}{\beta}\, ln \frac{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\tau}{2}\right)}.$$

Es bedarf nur noch der Integration der Ausdrücke $\int \sin\varphi\, d\tau$, $\int \cos\varphi\, d\tau$. Die Integralgleichungen schreiben wir

$$\delta\sin\nu = C_1\cos\varphi + C\sin\varphi + \cos\varphi \int \sin\varphi\, d\tau - \sin\varphi \int \cos\varphi\, d\tau,$$

$$\delta\cos\nu = -C_1\sin\varphi + C\cos\varphi - \cos\varphi \int \cos\varphi\, d\tau - \sin\varphi \int \sin\varphi\, d\tau.$$

Digitized by Google

Wird die erste Gleichung mit $i = \sqrt{-1}$ multipliziert und zur zweiten addiert, so folgt nach gehöriger Zusammenfassung

$$\delta e^{i\nu} = (C + i C_1) e^{i\varphi} - e^{i\varphi} \int e^{-i\varphi} d\tau.$$

Diese einfache Gleichung wird uns die Lösung des Rotationsproblems innerhalb der vorausgesetzten Bedingungen liefern. Zunächst haben wir

$$e^{\beta\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\tau}{2}\right)} = \frac{\operatorname{tg}\left(45 - \frac{\tau}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Setzen wir für einen Augenblick

$$n = \operatorname{tg}\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right),$$

und lösen noch $\cos\tau$ auf, so folgt

$$\cos\tau = \frac{2n e^{\beta\varphi}}{1 + n e^{2\beta\varphi}},$$

und dies eingesetzt in

$$d\tau = -\beta \cos\tau \, d\varphi$$

ergibt schließlich die folgende Integralgleichung:

$$\delta e^{i\nu} = (C + i C_1) e^{i\varphi} + 2\beta e^{i\varphi} \int \frac{n e^{(\beta - i)\varphi} d\varphi}{1 + n^2 e^{2\beta\varphi}}.$$

Dieses verhältnismäßig noch einfache Integral läßt sich nur durch Entwicklung in eine Reihe finden. Die Ausführung ergibt

$$\begin{aligned}
\delta e^{i\nu} &= (C + i C_1) e^{i\varphi} + 2\beta e^{i\varphi} \left\{ \frac{n e^{(\beta - i)\varphi}}{\beta - i} - \frac{n^3 e^{(3\beta - i)\varphi}}{3\beta - i} + \text{etc.} \right\} \\
&= (C + i C_1) e^{i\varphi} + 2\beta \left\{ \frac{n e^{\beta\varphi}}{\beta - i} - \frac{n^3 e^{3\beta\varphi}}{3\beta - i} + \frac{n^5 e^{5\beta\varphi}}{5\beta - i} \cdots \right\} \\
&= (C + i C_1) e^{i\varphi} + 2\beta \left\{ \frac{n(\beta + i) e^{\beta\varphi}}{\beta^2 + 1} - \frac{n^3 (3\beta + i) e^{3\beta\varphi}}{9\beta^2 + 1} + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{n^5 (5\beta + i) e^{5\beta\varphi}}{25\beta^2 + 1} \cdots \right\}.
\end{aligned}$$

Digitized by Google

Die Trennung der reellen und imaginären Glieder liefert endlich die beiden Hauptgleichungen der Bewegung

$$\delta \sin \nu = C_1 \sin \varphi + C \sin \varphi + 2\beta \left\{ \operatorname{tg} \frac{\left(45 - \frac{\tau}{2}\right)}{1+\beta^2} - \operatorname{tg}^3 \frac{\left(45 - \frac{\tau}{2}\right)}{1+9\beta^2} + \right.$$
$$\left. + \operatorname{tg}^5 \frac{\left(45 - \frac{\tau}{2}\right)}{1+25\beta^3} - \cdot \cdot \right\},$$

$$\delta \cos \nu = - C_1 \sin \varphi + C \cos \varphi + 2\beta^2 \left\{ \operatorname{tg} \frac{\left(45 - \frac{\tau}{2}\right)}{1+\beta^2} - 3 \operatorname{tg}^3 \frac{\left(45 - \frac{\tau}{2}\right)}{1+9\beta^2} + \right.$$
$$\left. + 5 \operatorname{tg}^5 \frac{\left(45 - \frac{\tau}{2}\right)}{1+25\beta^2} - \cdot \cdot \right\}.$$

Die Konstanten sind

$$C_1 = -2\beta \left\{ \operatorname{tg} \frac{\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right)}{1+\beta^2} - \operatorname{tg}^3 \frac{\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right)}{1+9\beta^2} + \cdot \cdot \right\},$$

$$C = -2\beta^2 \left\{ \operatorname{tg} \frac{\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right)}{1+\beta^2} - 3 \operatorname{tg}^3 \frac{\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right)}{1+9\beta^2} + \cdot \cdot \right\}.$$

Diese Gleichungen geben die Präzision und Nutation des Geschosses in Funktion des Tangentenwinkels unter der Voraussetzung, daß U und v sich nicht oder doch nur wenig ändern.

Führen wir die rechtwinkligen Koordinaten ein

$$x = \delta \sin \nu, \quad y = \delta \cos \nu,$$

so ist auch

$$x = C_1 \cos \varphi + C \sin \varphi + 2\beta \left\{ \frac{n e^{\beta \varphi}}{1+\beta^2} - \frac{n^3 e^{3\beta \varphi}}{1+9\beta^2} + \cdot \cdot \right\},$$

$$y = - C_1 \sin \varphi + C \cos \varphi + 2\beta^2 \left\{ \frac{n e^{\beta \varphi}}{1+\beta^2} - \frac{3 n^3 e^{3\beta \varphi}}{1+9\beta^2} + \cdot \cdot \right\}.$$

Es ist also $$\frac{dx}{d\varphi} = y.$$

Digitized by Google

Die Tangente der Kurve hat, wie aus den Grundformeln hervorgeht, die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta \cos\tau - x}{y},$$

aus welcher wie auch aus den obigen Hauptformeln sich ergibt, daß die Anfangsrichtung der Kurve senkrecht steht zur horizontalen x-Achse. Die Formeln zeigen weiter, daß für x Maximal- und Minimalwerte existieren. Für $\varphi = \pi$ erhält x seine erste größte Ablenkung rechts, für $\varphi = 2\pi$ die entsprechende links, beide positiv. Die Figur 17 läßt die Art der oszillatorischen Bewegung im allgemeinen erkennen und die extremen Lagen sind durch die Phasen $\varphi = \pi$, 3π, 5π etc. bezw. 2π, 4π, 6π etc. definiert. Die Kurve ist relativ zum Geschoßschwerpunkt zu denken.

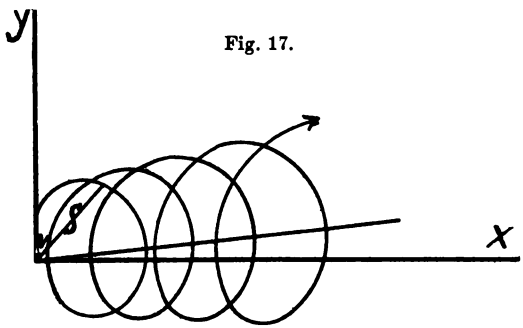


Fig. 17.

Die von der Geschoßspitze beschriebene Kurve gehört der Klasse der zykloidischen Kurven an. Bezeichnen wir mit XY die Koordinaten des Mittelpunktes des Rollkreises, so daß

$$X = 2\beta\left\{\operatorname{tg}\frac{\left(45-\frac{\tau}{2}\right)}{1+\beta^2} - \cdots\right\} \qquad Y = 2\beta^2\left\{\operatorname{tg}\frac{\left(45-\frac{\tau}{2}\right)}{1+\beta^2} - \cdots\right\}$$

so folgt als Gleichung desselben

$$(x-X)^2 + (y-Y)^2 = R^2 = C_1^2 + C^2.$$

Da τ stetig abnimmt, so wachsen X und Y mit der Zeit, und zwar X rascher als Y, weil der hier entscheidende Einfluß durch β bedingt ist. Die Ordinate Y bleibt im ganzen klein, so daß also der Mittelpunkt des Rollkreises der ballistischen Epizykloide sich nur wenig von der X-Achse entfernt.

Der Kreisradius ist nur uneigentlich konstant. Vermöge des Ausdruckes

Digitized by Google

$$\beta = \frac{u g \tau p}{U v h},$$

der im Laufe der Bewegung infolge der Abnahme von U und v zunimmt, nehmen auch die Konstanten C_1 und C zu, und mit ihnen der Radius des Kreises.

Das Geschoß hat also eine pendelnde Bewegung, deren Amplituden fortwährend wachsen und deren Grenzwerte durch $\varphi = \pi$, 2π etc. gegeben sind. Da nun

$$d\varphi = -\frac{d\tau}{\beta \cos\tau}, \quad d\tau = -\frac{g \cos\tau dt}{v},$$

so ist

$$d\varphi = \frac{g\,dt}{\beta v},$$

also wenn $v = \text{Const.}$

$$\varphi = \frac{g t}{\beta v}, \quad t = \frac{\beta v}{g} \cdot \varphi.$$

Der erste Ausschlag nach rechts erfolgt also nach der Zeit

$$T_\pi = \frac{u r p}{p U} \cdot \pi.$$

Die Beziehung zwischen φ und τ ist durch

$$\operatorname{tg}\left(45 - \frac{\tau}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot e^{\beta\varphi}$$

gegeben. Wählen wir die obigen Werte von U, v etc. und $\alpha = 30^0$, so haben wir

$$\operatorname{tg}\left(45 - \frac{\tau}{2}\right) = \operatorname{tg} 30^0 e^{\frac{\pi}{400}}.$$

Die Flugbahntangente bildet also zur Zeit $T_\pi = \frac{25\pi}{192} = 0{\cdot}4$ Sekunden mit der Geschoßachse einen Winkel $\tau = 23'\ 20''$.

In gleicher Weise lassen sich die entsprechenden anderen Winkel für $\varphi = 2\pi$, 3π etc. ermitteln.

Die Bewegungsverhältnisse des Geschosses sind also hinreichend klar. Das Kräftepaar des Luftwiderstandes erteilt gleich zu Anfang der Bewegung der Geschoßspitze einen Impuls nach oben, veranlaßt durch das gleichzeitig mit auftretende Krümmungsdifferential $d\tau$, infolgedessen der Luftwiderstand von unten angreift und das rotierende Geschoß bei Rechtsdrall nach rechts ablenkt. Die aperiodischen Glieder in den Gleichungen für x und y sind die Störungsglieder der Bewegung der Geschoßspitze, deren

Digitized by Google

größeres das für x ist, infolgedessen die Ablenkung unter periodischen Maxima und Minima, und zwar nach rechts hin, in wechselnden Amplituden erfolgt.

Wir bemerken hierzu, daß die Nutationen immer in Beziehung zu dem jeweiligen Geschoßschwerpunkte gedacht werden müssen, den wir in O annehmen, der aber nach und nach immer tiefere Lagen passiert. Anderseits kann man aber auch die aufeinander folgenden Bewegungszustände unmittelbar nach O versetzen und die Bewegung als in der durch Figur 17 dargestellten Art vor sich gehend annehmen.

Das Störungsglied im Ausdruck für y ist sehr klein, weshalb wenigstens praktisch das Hauptglied sich auf $C\cos\varphi$ beschränkt, das bald positiv, bald negativ ist und den y-Werten die gleichen Vorzeichen verleiht. Es können indessen, je nach den Werten der Konstanten, Umstände eintreten, die die Grenzen, zwischen welchen die y-Werte oszillieren, einigermaßen verschieben, z. B. wenn die Kurve, die der Mittelpunkt des variablen Rollkreises verfolgt, diesen mit sich nach oben führt. Ihre Gleichung würde sich mittels Elimination von τ aus den Ausdrücken für X und Y ergeben.

II. Die Präzession und Nutation bei abnehmender Winkelgeschwindigkeit.

Die vorhin durchgeführten Untersuchungen beruhen auf der Annahme, daß außer U und v die Winkelgeschwindigkeit p des Geschoßkörpers konstant sei. Ob letzteres in Wirklichkeit zutrifft, ist nicht bekannt, da hierüber keine direkten Erfahrungen vorliegen. Es ist aber wenig wahrscheinlich, daß die Drehungsgeschwindigkeit sich nicht ändere, wenn man bedenkt, daß die Oberfläche der Geschosse mehr oder weniger rauhe Stellen hat, wo der Reibungswiderstand der Luft ansetzen kann. Jedenfalls ist sicher, daß die Umdrehungsgeschwindigkeit am Ende der Flugbahn kleiner ist als zu Anfang. Nach welchem Gesetze aber die Abnahme erfolgt, ist gänzlich unbekannt und würde eine Annahme hierüber nur sehr hypothetisch ausfallen. Wenn wir trotzdem eine solche zu machen versuchen, so liegt dies daran, daß uns die Struktur der Formel

$$\beta = \frac{\nu g r}{U p} \cdot \frac{p}{v}$$

einigermaßen begünstigend entgegenkommt. Wie man sieht, stehen p und v in einem einfachen Verhältnis zueinander und liegt es nahe, dieses als konstant anzusehen, wenn p die Bedingung erfüllt, in gleichem Verhältnis mit der Geschoßgeschwindigkeit abzunehmen. Dann wäre also an allen Punkten wenigstens einer flachen Flugbahn das Verhältnis $\frac{p}{v}$ nahe unveränderlich. Diese Annahme bietet den

Digitized by Google

Vorteil, die Rechnung zu erleichtern, da jetzt nur noch die Beschleunigung des Luftwiderstandes zu berücksichtigen ist.

Um die Rechnungen zu vereinfachen, wählen wir das Widerstandsgesetz

$$U = \frac{ncv}{1+ct}, \qquad c = \frac{U_0}{nv_0},$$

wo n und c Konstanten sind, und benützen die allgemeinen Formeln

$$dv_x = -U\cos\tau \,.\, dt, \quad d\operatorname{tg}\tau \,.\, v_x = -g\,dt, \quad dy = dx\operatorname{tg}\tau.$$

Hieraus folgt, wenn wir noch einführen

$$T = 1 + ct,$$

$$v_x = \frac{v_0\cos\alpha}{T^n}, \quad U = \frac{ncv}{T}, \quad \operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha - \frac{ng}{(n+1)\,U_0\cos\alpha}(T^{n+1}-1).$$

$n = 1$ gesetzt, liefert die Gleichungen für das quadratische Widerstandsgesetz. Wir greifen wieder auf den Ausdruck

$$d\varphi = -\frac{d\tau}{\beta\cos\tau}, \quad \operatorname{tg}\varphi = z$$

zurück und führen darin ein den Ausdruck für β. Man erhält

$$\varphi = -\frac{hv}{ugrp}\int\frac{U\,d\tau}{\cos\tau}.$$

Führen wir hierin die obigen allgemeinen Ausdrücke für U etc. ein, so folgt:

$$\varphi = \frac{hnv}{urp}\int\frac{dT}{T}, \quad \text{also} \quad \varphi = \frac{hnv}{urp}\ln T.$$

Damit haben wir φ in Funktion der Zeit $1 + ct = T$ erhalten. In der Rotationsgleichung

$$\delta e^{i\nu} = (C + iC_1)e^{i\varphi} - e^{i\varphi}\int e^{-i\varphi}d\tau$$

ist nun $d\tau$ in Funktion von φ auszudrücken. Es ist

$$d\tau = -\beta\cos\tau\,d\varphi = -\frac{ugrp}{hv}\frac{d\varphi}{U}\cos\tau, \quad U\cos\tau = \frac{U_0\cos\alpha}{T^{n+1}},$$

also

$$d\tau = -\frac{ugrp}{pv}\cdot\frac{T^{n+1}\cos\tau^2}{U_0\cos\alpha}d\varphi.$$

Digitized by Google

Hierin ist $\cos\tau^2$ mittels der Formel für $\operatorname{tg}\tau$ umzugestalten. Zur Vereinfachung setzen wir

$$\rho^2 \sin\Theta = (n+1)\frac{U_0 \cos\alpha}{ng},$$

$$\rho^2 \cos\Theta = (n+1)\frac{U_0 \cos\alpha}{ng}\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{ng}{(n+1)\,U_0 \cos\alpha}\right),$$

wonach also ρ und Θ aus den Elementen der Flugbahn ermittelt werden können. Zunächst erhalten wir aus der Formel für $\operatorname{tg}\tau$

$$\rho^4(1+\operatorname{tg}\tau^2)\sin\Theta^2 = \rho^4 - 2\rho^2\cos\Theta\, T^{n+1} + T^{2n+2},$$

$$\rho^4 = 1 + \frac{2(n+1)}{ng}U_0 \sin\alpha + \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{U_0^2}{g^2}.$$

Die Formel für $d\tau$ geht damit über in

$$d\tau = -\frac{ugrp}{h\,U_0 \cos\alpha . v} \cdot \frac{\sin\Theta^2\, T^{n+1}\, d\varphi}{1 - \frac{2\cos\Theta\, T^{n+1}}{\rho^2} + \frac{T^{2n+2}}{\rho^4}}.$$

Es ist aber

$$T = e^{\frac{urp}{nhv}}$$

Führen wir ein

$$\varepsilon = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{urp}{hv}, \qquad T = e^{\frac{\varepsilon\varphi}{n+1}},$$

so folgt nach einigen Umformungen

$$d\tau = -\frac{\varepsilon \sin\Theta . e^{\varepsilon\varphi}\, d\varphi}{\rho^2\left(1 - 2\frac{\cos\Theta}{\rho^2}e^{\varepsilon\varphi} + \frac{e^{2\varepsilon\varphi}}{\rho^4}\right)}.$$

Damit geht das Rotationsintegral über in

$$\delta e^{i\nu} = (C + iC_1)\, e^{i\varphi} + \frac{\varepsilon \sin\Theta}{\rho^2} e^{i\varphi} \int \frac{e^{(\varepsilon - i)\varphi}\, d\varphi}{1 - 2\frac{\cos\Theta}{\rho^2}e^{\varepsilon\varphi} + \frac{e^{2\varepsilon\varphi}}{\rho^4}}.$$

Der Nenner im Integral läßt sich nun leicht in eine bekannte Reihe entwickeln, die nach cos des Vielfachen von 2Θ fortschreitet. Integriert man und trennt die reellen Werte von den imaginären, so folgt

Digitized by Google

$$\delta \sin \nu = C_1 \cos \varphi + C \sin \varphi + \varepsilon \sin \Theta \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{e^{\varepsilon\varphi}}{\rho^2(1+\varepsilon^2)} + \dfrac{e^{3\varepsilon\varphi}}{\rho^6(1+9\varepsilon^2)} + \dfrac{e^{5\varepsilon\varphi}}{\rho^{10}(1+25\varepsilon^2)} + \cdots \\ + 2\cos\Theta \left\{ \dfrac{e^{2\varepsilon\varphi}}{\rho^4(1+4\varepsilon^2)} + \dfrac{e^{4\varepsilon\varphi}}{\rho^8(1+16\varepsilon^2)} \cdots \right\} + \\ + 2\cos 2\Theta \left\{ \dfrac{e^{3\varepsilon\varphi}}{\rho^6(1+9\varepsilon^2)} + \dfrac{e^{5\varepsilon\varphi}}{\rho^{10}(1+25\varepsilon^2)} \cdots \right\} + \end{array} \right| .$$

Durch Differenzieren nach $\dfrac{d(\delta \sin \nu)}{d\varphi} = \delta \cos \nu$ erhält man die Reihe für $\delta \cos \nu$, wobei der Koeffizient vor der Klammer in $\varepsilon^2 \sin \Theta$ übergeht. Man kann die obige Formel auch wie folgt schreiben

$$\delta \sin \nu = C_1 \cos \varphi + C \sin \varphi + \varepsilon \sin \Theta \,.\, P$$

$$P = \frac{e^{\varepsilon\varphi}}{\rho^2(1+\varepsilon^2)} + \frac{2\cos\Theta\, e^{2\varepsilon\varphi}}{\rho^4(1+4\varepsilon^2)} + \frac{(1+2\cos 2\Theta)\, e^{3\varepsilon\varphi}}{\rho^6(1+9\varepsilon^2)} +$$

$$+ \frac{(2\cos\Theta + 2\cos 3\Theta)\, e^{4\varepsilon\varphi}}{\rho^8(1+16\varepsilon^2)} + \frac{(1+2\cos 2\Theta + 2\cos 4\Theta)\, e^{5\varepsilon\varphi}}{\rho^{10}(1+25\varepsilon^2)} +$$

$$+ \frac{(2\cos\Theta + 2\cos 3\Theta + 2\cos 5\Theta)\, e^{6\varepsilon\varphi}}{\rho^{12}(1+36\varepsilon^2)} +$$

$$+ \frac{(1+2\cos 2\Theta + 2\cos 4\Theta + 2\cos 6\Theta + 2\cos 8\Theta)\, e^{7\varepsilon\varphi}}{\rho^{14}(1+49\varepsilon^2)} + \cdots$$

Die Konvergenz dieser Reihe hängt wesentlich von $\dfrac{e^{\varepsilon\varphi}}{\rho^2} = \dfrac{T^{n+1}}{\rho^2}$ ab, welcher Wert immer kleiner als 1 sein muß. Wenn ε sehr klein ist, daß ε^2 vernachlässigt werden kann, so läßt sich die Reihe in folgende einfachere überführen:

$$\delta \sin \nu = C_1 \cos \varphi + C \sin \varphi +$$

$$+ 2\varepsilon \sin\Theta \frac{\dfrac{T^{n+1}}{\rho^2}}{1 - \dfrac{T^{2n+2}}{\rho^4}} \left[\frac{1}{2} + \cos\Theta \cdot \frac{T^{n+1}}{\rho^2} + \cos 2\Theta \cdot \frac{T^{2n+2}}{\rho^4} + \cdots \right].$$

Wählen wir zur Anwendung die Werte $U_0 = 22{,}5$, $\nu_0 = 521$, $l = 9{,}7$, also für $n = 3$, $T = 1{,}1396$ und nach den angegebenen Konstanten $\varepsilon = \dfrac{1}{108}$, so ist zunächst $k = \dfrac{4\,U_0}{3g} = 3$, also wegen $\alpha = 5^0 38'$

Digitized by Google

$$\rho^2 = \sqrt{1 + 2k \sin\alpha + k^2} = 3{,}25,$$

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha + \frac{1}{k}} = 2{,}313, \quad \Theta = 66^\circ 30'.$$

Das aperiodische Glied des letzten Ausdruckes ist demnach

$$\delta \sin\nu = 0{,}0126\left(\frac{1}{2} + 0{,}2079 - 0{,}1837 - 0{,}1318 - 0{,}0080 + \right.$$
$$\left. + 0{,}0334 + 0{,}0152 - 0{,}0027 - 0{,}0052 - 0{,}0014\ldots\right),$$

also $\delta \sin\nu = 0{,}00535$, und zwar für die Normalhyperbel als Flugbahn ($n = 3$).

Man sieht, daß viele Glieder zu summieren sind, um eine hinreichend genaue Zahl für $\delta \sin\nu$ zu erhalten. Für noch größere Flugzeiten ist die Konvergenz der Reihe sehr fraglich.

Die Berechnung speziell des Ausdruckes für $\delta \sin\nu$ ist deshalb von besonderer Wichtigkeit, als die Abweichung der Geschosse von der Flugbahnebene wesentlich davon abhängt.

12. Die Rotationsgleichungen für veränderliche U, v und τ.

Wir geben jetzt für den Fall, daß für größere Flugbahnen mit stark abnehmenden Geschoßgeschwindigkeiten die Annahme $\frac{p}{v} = \text{Const.}$ nicht erfüllt ist, die allgemeine Lösung der Aufgabe, wonach also U und v als variabel, p aber als konstant angesehen wird. v erscheint also mit U unter dem Integralzeichen des Ausdruckes

$$\varphi = -\int \frac{d\tau}{\beta \cos\tau} = -\frac{h}{ugrp}\int \frac{Uv\,d\tau}{\cos\tau}.$$

In der Hauptgleichung

$$\delta e^{i\nu} = (C + iC_1)\, e^{i\varphi} - e^{i\varphi}\int e^{-i\varphi}\, d\tau$$

ist also das Integral

$$J = \int e^{-i\varphi}\, d\tau = -\beta \int e^{-i\varphi} \cos\tau\, d\varphi = -\frac{ugrp}{h}\int \frac{e^{-i\varphi}\cos\tau\, d\varphi}{Uv}$$

in Verbindung mit dem für φ zu ermitteln.

Wir weisen schon hier darauf hin, daß, weil das Produkt Uv im Nenner des vorstehenden Integrals steht, das mit der Zeit rasch abnimmt, hiedurch die Konvergenz der Reihe ungünstig beeinflußt

Digitized by Google

wird. Um auch hier die Rechnungen möglichst zu vereinfachen, legen wir das oben benützte Widerstandsgesetz unter und erhalten zunächst

$$Uv = \frac{U_0 v_0 \cos\alpha^2}{\cos\tau^2 T^{2n+1}}.$$

Es ist aber

$$T^{n+1} = 1 + \rho^2 \sin\Theta \operatorname{tg}\alpha - \rho^2 \sin\Theta \operatorname{tg}\tau,$$

also, wenn gesetzt wird

$$A = 1 + \rho^2 \sin\Theta \operatorname{tg}\alpha, \quad f = \frac{\rho^2 \sin\Theta}{1 + \rho^2 \sin\Theta} = \frac{1}{1 + \frac{ng}{(n+1) U_0 \cos\alpha}},$$

so ist

$$T^{n+1} = A(1 - f \operatorname{tg}\tau).$$

Damit erhalten wir

$$\varphi = -\frac{h U_0 v_0 \cos\alpha^2}{ugrp} \int \frac{d\tau}{\cos\tau^3 T^{2n+1}} = -\frac{1}{b} \int \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}\tau^2}\, d\operatorname{tg}\tau}{(1 - f\operatorname{tg}\tau)^{\frac{2n+1}{n+1}}}.$$

$$J = -b \int (1 - f\operatorname{tg}\tau)^{\frac{2n+1}{n+1}} (1 + \operatorname{tg}\tau^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot e^{-i\varphi} d\varphi,$$

$$b = \frac{urpgA^{\frac{2n+1}{n+1}}}{hU_0 v_0 \cos\alpha^2}.$$

Wählen wir das quadratische Widerstandsgesetz, setzen also $n = 1$ und

$$S = (1 + \operatorname{tg}\tau^2)^{\frac{1}{2}} (1 - f\operatorname{tg}\tau)^{-\frac{3}{2}},$$

so erhalten wir

$$\varphi = -\frac{1}{b} \int S\, d\operatorname{tg}\tau, \qquad J = -b \int \frac{e^{-i\varphi} d\varphi}{S(1 + \operatorname{tg}\tau^2)}.$$

S in eine Reihe entwickelt, gibt

$$S = 1 + \frac{3}{2} f \operatorname{tg}\tau + \left(\frac{15}{8} f^2 + \frac{1}{2}\right) \operatorname{tg}\tau^2 + \left(\frac{35}{16} f^3 + \frac{3}{2} f\right) \operatorname{tg}\tau^3 +$$
$$+ \left(\frac{315}{128} f^4 + \frac{15}{16} f^2 - \frac{1}{8}\right) \operatorname{tg}\tau^4 + \cdots$$

Digitized by Google

Das erste Integral ist also

$$b\,(\varphi_0 - \varphi) = \lambda = \operatorname{tg}\tau + \frac{3}{4} f \operatorname{tg}\tau^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{15}{8} f^2 + \frac{1}{2}\right)\operatorname{tg}\tau^3 + \\ + \frac{1}{4}\left(\frac{35}{16} f^3 + \frac{3}{2} f\right)\operatorname{tg}\tau^4 + \cdots,$$

worin

$$b\,\varphi_0 = \operatorname{tg}\alpha + \frac{3}{4} f \operatorname{tg}\alpha^2 + \cdots$$

Das Zeichen λ dient zur Abkürzung. Das Integral J erhält die Form

$$-J = b\int e^{-i\varphi} d\varphi \left(1 - \frac{3}{2} f \operatorname{tg}\tau + \left(\frac{3}{8} f^2 - \frac{3}{2}\right)\operatorname{tg}\tau^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{f^3}{16} + \frac{3}{2} f\right)\operatorname{tg}\tau^3 + \left(\frac{3}{128} f^4 + \frac{27}{16} f^2 + \frac{15}{8}\right)\operatorname{tg}\tau^4 \ldots\right).$$

Die Umkehrung der Reihe für λ ergibt

$$\operatorname{tg}\tau = \lambda - \frac{3}{4} f.\lambda^2 + \left(\frac{1}{2} f^2 - \frac{1}{6}\right)\lambda^3 - \left(\frac{15}{16} f^3 - \frac{1}{4} f\right)\lambda^4 + \ldots.$$

und dies in das Integral eingesetzt, liefert

$$-J = b\int e^{-i\varphi}\, d\varphi \left(1 - \frac{3}{2} f\lambda + \left(\frac{3}{2} f^2 - \frac{3}{2}\right)\lambda^2 - \right. \\ \left. - \left(\frac{5}{4}\lambda^3 - 4f\right)\lambda^3 + \left(\frac{15}{8} f^4 - \frac{37}{32} f^2 + \frac{19}{8}\right)\lambda^4 - \ldots\right).$$

Da nun

$$\lambda = b\,(\varphi_0 - \varphi),$$

so ist die letzte Integration leicht durchzuführen. Es ist

$$b = \frac{u r p g}{h\, U_0\, v_0 \cos\alpha^2}\left(1 + \frac{2\, U_0 \sin\alpha^2}{g}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Das Endresultat ist

$$\delta \sin\nu = C_1 \cos\varphi + C \sin\varphi + \\ + b\left\{1 - \frac{3}{2} f\lambda + \left(\frac{3}{2} f^2 - \frac{3}{2}\right)\left(\lambda^2 - 2b^2\right) - \left(\frac{5}{4} f^3 - 4f\right)\left(\lambda^3 - 6b^2\lambda\right)\right\} \\ \left. + \left(\frac{15}{8} f^2 - \frac{37}{32} f^3 + \frac{19}{8}\right)\left(\lambda^4 - 12 b^2\lambda^2 + 24 b^2\right)\right\},$$

Digitized by Google

$$\delta \cos \nu = -C_1 \sin \varphi + C \cos \varphi +$$

$$+ b^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} f - \left(3f^2 - 3\right)\lambda + \left(\frac{5}{4} f^3 - 4f\right)\left(3\lambda^2 - 6b^2\right) - \\ \quad - \left(\frac{15}{8} f^4 - \frac{37}{32} f^2 + \frac{19}{8}\right)\left(4\lambda^3 - 24 b^2 \lambda\right) \cdots \end{array} \right\}.$$

Damit sind wenigstens theoretisch die Werte für die Präzession und Nutation der Geschoßbewegung im allgemeinsten Falle der Bewegung aufgestellt und lassen auch die Verwandtschaft mit den früher ermittelten Ausdrücken erkennen. Für den praktischen Gebrauch sind sie indessen wenig geeignet, weil über die Konvergenz der Reihen nichts ausgesagt werden kann.

§ 13. Die Rotationsgleichungen für flache Flugbahnen.

Sind die Flugbahnen sehr gestreckt, so daß die Tangentenwinkel sich nur wenig ändern und $\cos \tau$ der Einheit immer nahe bleibt, so gestaltet sich die Rechnung wesentlich einfacher, weshalb es sich empfiehlt, zum Schlusse auch noch diese Vereinfachung rechnerisch durchzuführen.

In dem Ausdrucke

$$\varphi = -\frac{h}{u g r p} \int \frac{U v d\tau}{\cos \tau}$$

nehmen wir also jetzt $\cos \tau$ als konstant an und führen die Werte für $U, v d\tau$ ein. Es folgt

$$d\varphi = \frac{h n v_0 \cos \alpha \, d T}{u r p \cos \tau \, T^{n+1}}, \quad \varphi = \frac{h v_0 \cos \alpha}{u r p \cos \tau} \left(1 - \frac{1}{T^n}\right)$$

oder

$$\varphi = \frac{h}{u r p \cos \tau} (v_0 \cos \alpha - v_x).$$

Bei größeren τ kann ein Mittelwert $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \tau}\right)$ statt $\frac{1}{\cos \tau}$ gewählt werden. Im Integral der Hauptgleichung

$$\delta e^{i\nu} = (C + i C_1) e^{i\varphi} - e^{i\varphi} \int e^{-i\varphi} d\tau$$

ist $d\tau$ in Funktion von $d\varphi$ zu entwickeln. Setzen wir

$$\beta = \frac{u r p}{p v_0}, \quad \text{so ist} \quad \beta \varphi = \frac{\cos \alpha}{\cos \tau} \left(1 - \frac{1}{T^n}\right),$$

Digitized by Google

und da

$$d\tau = -\frac{ng}{U_0 \cos\alpha} T^n \, dT \cos\tau^2,$$

so geht nach Einsetzen dieser Ausdrücke in das letzte Integral nach Wegschaffung von T letzteres über in

$$\int e^{-i\varphi} d\tau = -\frac{urgp}{\lambda v_0 U_0 \cos\alpha^2} \int \cos\tau^3 \frac{e^{-i\varphi} d\varphi}{\left(1 - \beta \frac{\cos\tau}{\cos\alpha} \varphi\right)^{\frac{2n+1}{n}}}.$$

Setzen wir $\frac{2n+1}{n} = m$ und entwickeln den Nenner in eine Reihe, so läßt sich das Integral nach bekannten Methoden berechnen. Führt man dies aus und sondert die Variablen nach ihren reellen und imaginären Gliedern, so zeigt sich, daß die aperiodischen Ausdrücke für $\delta \sin\nu$ und $\delta \cos\nu$ in ihren wesentlichen Gliedern durch

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{\beta \cos\tau}{\cos\alpha} \varphi\right)^m} \quad \text{bezw.} \quad \frac{m\beta \cos\tau}{\cos\alpha} \frac{1}{\left(1 - \frac{\beta \cos\tau}{\cos\alpha} \varphi\right)^{m+1}}$$

zusammengefaßt werden können. Und da

$$\frac{1}{T^n} = 1 - \frac{\beta \cos\tau}{\cos\alpha} \varphi,$$

so nehmen sie die Form an

$$T^{2n+1} \quad \text{bezw.} \quad \frac{m\beta \cos\tau}{\cos\alpha} T^{3n+1}.$$

Die Restglieder sind, da β bei ihnen in dritter Potenz erscheint, wegen des im ganzen sehr kleinen Wertes von β zu vernachlässigen, und man erhält schließlich nach gehöriger Zusammenstellung

$$\delta \sin\nu = C \sin\varphi + C_1 \cos\varphi + \frac{\beta g \cos\tau^3}{U_0 \cos\alpha^2} T^{2n+1},$$

$$\delta \cos\nu = C \cos\varphi - C_1 \sin\varphi + \frac{2n+1}{n} \frac{\beta^2 g \cos\tau^4}{U_0 \cos\alpha^3} T^{3n+1}.$$

Die Konstanten erhält man für $t = 0$, wofür $T = 1 + \frac{U_0}{n v_0} t$ in 1 und δ und ν in Null übergehen:

$$C_1 = -\frac{\beta g \cos\tau^3}{U_0 \cos\alpha^2}, \quad C = -\frac{(2n+1)\beta^2 g \cos\tau^4}{n U_0 \cos\alpha^3}.$$

Digitized by Google

Damit erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}\delta \sin \nu = {} & \frac{\beta g \cos \tau^3}{U_0 \cos \alpha^2}\left(T^{2n+1} - \cos\frac{\cos\alpha}{\beta\cos\tau}\left(1-\frac{1}{T^n}\right)\right) - \\ & - \frac{(2n+1)\beta^2 g \cos\tau^4}{n U_0 \cos\alpha^3} \sin\frac{\cos\alpha}{\beta\cos\tau}\left(1-\frac{1}{T^n}\right)\cdots\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}\delta \cos \nu = {} & \frac{(2n+1)\beta^2 g \cos\tau^4}{n U_0 \cos\alpha^3}\left(T^{3n+1} - \cos\frac{\cos\alpha}{\beta\cos\tau}\left(1-\frac{1}{T^n}\right)\right) + \\ & + \frac{\beta g \cos\tau^3}{U_0 \cos\alpha^2} \sin\frac{\cos\alpha}{\beta\cos\tau}\left(1-\frac{1}{T^n}\right)\cdots\end{aligned}\right\}.$$

Diese Gleichungen der Geschoßrotation gelten also allgemein für alle flachen Flugbahnen, bei denen $\cos\tau$ von der Einheit nur wenig verschieden ist.

Bei der Normalhyperbel mit senkrechter zweiter Asymptote ist $n = 3$ zu setzen und gehen die Gleichungen in diejenigen über, die wir im Archiv f. d. Art.- u. Ing.-Offiziere d. d. R.-H., 59. Jahrg., S. 193, entwickelt haben.

Für das quadratische Gesetz ist $n = 1$ zu setzen, für das kubische $n = \frac{1}{2}$ u. s. w. Dabei bedeutet $T = 1 + \frac{U_0}{n v_0} t$ und t die Flugzeit.

Man bemerke, daß die periodischen Glieder sich leicht durch eine Funktion der Geschwindigkeit darstellen lassen.

Die Flugbahnelemente der 21 *cm* Kanone werden sehr gut durch die Formeln der Normalhyperbel wiedergegeben, wie sich ergibt, wenn man die Daten

$v_0 = 521/m$, $5^0 38'$, $W = 4097$, $T = 9{,}7$, $\beta = 7^0 16'$, $v_e = 358\ m$

einsetzt in die Formeln

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2 v_0^2 \sin\alpha^2}{gW}, \quad v_e = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} g W \operatorname{tg}\alpha}}{\sin\beta}, \quad T = \frac{\frac{4}{g} v_0 \sin\alpha}{1 + \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}},$$

woraus

$$\beta = 7^0 16', \quad v_e = 355, \quad T = 9{,}6^s.$$

U_0 folgt aus

$$U_0 = \frac{3\left(v_0^2 \sin 2\alpha - gW\right)}{4 W \sin\alpha} = 22{,}5\ m.$$

T bedeutet hier die Flugzeit.

Digitized by Google

Da nun $u = 0{,}53$, $h = 10{,}5$, so erhält man, wenn man nur die Hauptglieder berücksichtigt

$$\delta \sin \nu = 0{,}00277 \left(T^7 - \cos 157 \left(1 - \frac{1}{T^3} \right) \right),$$

$$\delta \cos \nu = 0{,}00277 \left(0{,}0147\ T^{10} + \sin 157 \left(1 - \frac{1}{T^3} \right) \right),$$

$$T = 1 + 0{,}01439\, t.$$

Die Nutation δ oder der Winkel zwischen Geschoßachse und Tangente sowie der Neigungswinkel ν der Stoßebene mit der Vertikalebene sind hiemit in Funktion der Zeit gegeben. Die Präzession ν oszilliert in periodischer Zu- und Abnahme einem gewissen, durch die Formel

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{T^7 - \cos 157 \left(1 - \frac{1}{T^3} \right)}{0{,}0147\ T^{10} + \sin 157 \left(1 - \frac{1}{T^3} \right)}$$

gegebenen Grenzwerte entgegen.

Man beachte, daß die beiden periodischen Ausdrücke in den Hauptgleichungen durch einen trigonometrischen ersetzt werden können. Wegen $\delta \sin \nu = x$, $\delta \cos \nu = y$ kann man mittels Elimination von φ die betreffenden Gleichungen in die folgenden überführen:

$$(x + C_1 T^{2n+1})^2 + (y + C T^{3n+1})^2 = C^2 + C_1^2.$$

Diese Gleichung des Rollkreises der epizykloidischen Bewegung der Geschoßspitze zeigt, daß der Mittelpunkt des Kreises nach rechts hin fortschreitet, da seine Koordinaten

$$X_0 = - C_1 T^{2n+1}, \quad Y_0 = - C T^{3n+1}$$

Funktionen der Zeit sind. Wenn $n = 3$, so ist sehr nahe

$$Y_0^2 = - \frac{C^2}{C_1^3} X_0^3.$$

Der (positive) Koeffizient ist hier proportional β, also eine kleine Größe. Die Kurve des Mittelpunktes ist also annähernd eine Neilsche Parabel. Der Kreisradius $\sqrt{C^2 + C_1^2}$ ist übrigens nicht ganz konstant, da er eine Funktion von $\cos \tau$ ist, infolgedessen er langsam zunimmt.

Das aperiodische Glied $\delta \sin \nu$ hat für die Flugzeit $t = 0{,}97''$ den Wert 0,0069, soforn nur p konstant bleibt. Nimmt aber p im Verein mit v ab, so ist $\delta \sin \nu = 0{,}00535$, wie es sein muß, da z. B. für $p = 0$ diese Störungsglieder verschwinden.

Digitized by Google

14. Die Rotationsgleichungen in Hyperbelfunktionen für flache Flugbahnen.

Wir geben hier noch in Kürze die Rotationsformeln für den allgemeinen Fall der ballistischen Hyperbel, da wir dieselben nachher bei der Berechnung der Rechtsabweichung zu Grunde legen werden. Anstatt φ setzen wir hier ψ. Dann ist

$$\psi = -\frac{h}{u g r p}\int \frac{U v\, d\tau}{\cos\tau},$$

$$\delta e^{i\nu} = (C + i C_1)\, e^{i\psi} - e^{i\psi}\int e^{-i\psi}\, d\tau.$$

Hierin haben wir einzusetzen

$$U\cos\tau = U_0\cos\alpha\cdot\frac{\cos\varphi_0}{\operatorname{tg}\varphi_0}\cdot\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\varphi},\quad v\cos\tau = r_0\cos\alpha\cdot\frac{\cos\varphi_0^{3/2}}{\cos\varphi^{1/2}}$$

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha - \frac{2}{m k\cos\alpha} + \frac{2}{m k\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0},\quad m = \operatorname{cotg}\varphi_0^2,\quad k = \frac{4}{3}\frac{U_0}{g}.$$

Zunächst erhalten wir für flache Flugbahnen

$$d\psi = -\frac{3 v_0 h}{2 u r p}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\tau}\,\frac{\cos\varphi_0^{3/4}}{\cos\varphi^{5/2}}\sin\varphi\, d\varphi,$$

$$\psi = \frac{v_0 h\cos\alpha}{u r p\cos\tau}\left(1 - \frac{\cos\varphi_0^{3/2}}{\cos\varphi^{3/2}}\right).$$

In diesem Integral ist $\frac{\cos\alpha}{\cos\tau}$ konstant angenommen. Bei größeren α kann ein Mittelwert hiefür genommen werden. Ferner ist

$$\int e^{-i\psi}\, d\tau = \frac{\beta g\operatorname{tg}\varphi_0}{U_0\cos\alpha}\int \frac{\cos\tau^3\, e^{-i\psi}\cos\varphi^{5/2}}{\operatorname{tg}\varphi\cos\varphi^{5/2}}\, d\psi,\quad \beta = \frac{u r p}{v_0 h}.$$

Führen wir hier ein

$$\cos\varphi = \frac{\cos\varphi}{\left(1 - \beta\frac{\cos\tau}{\cos\alpha}\psi\right)^{2/3}},\quad \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos\varphi^2} - 1},$$

und entwickeln $\cos\varphi$ in Funktion von ψ, so folgt

$$\int e^{-i\psi}\, d\tau = -\frac{\beta g\cos\tau^3}{U_0\cos\alpha}\int e^{-i\psi}\left(1 + (7 + 2m)\frac{\beta\cos\tau}{3\cos\alpha}\psi + \right.$$

$$\left. + (35 + 21 m + 6 m^2)\frac{\beta^2\cos\tau^2}{9\cos\alpha^2}\psi^2 + \cdots\right),$$

Digitized by Google

wo für $\cos\tau^3$ wieder ein Mittelwert $\frac{1}{2}(\cos\alpha^3+\cos\tau^3)$ gewählt werden kann. Integriert man, so folgt

$$\int e^{-i\psi}\,d\tau = -\frac{\beta g\cos\tau^3}{U_0\cos\alpha}\,e^{-i\psi}\left(i+(7+2m)\frac{\beta\cos\tau}{3\cos\alpha}(\psi i+1)+\right.$$
$$\left.+(35+21m+6m^2)\frac{\beta^2\cos\tau^2}{9\cos\alpha^2}(\psi^2 i+2\psi-2i)\right).$$

Nach Trennung der reellen von den imaginären Gliedern folgt

$$\delta\sin\nu = C\sin\psi + C_1\cos\psi + \frac{g\cos\tau^3}{U_0\cos\alpha}\left(1+(7+2m)\frac{\beta\cos\tau}{3\cos\alpha}\psi+\right.$$
$$\left.+(35+\text{etc.})\frac{\beta^2\cos\tau^2}{9\cos\alpha^2}(\psi^2-2)\cdots\right).$$

Es ist aber

$$\frac{\cos\varphi^{3/2}}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\cos\varphi_0^{3/2}}{\operatorname{tg}\varphi_0}\left(1+(7+2m)\frac{\beta\cos\tau}{3\cos\alpha}\psi+(35+\text{etc.})\frac{\beta^2\cos\tau^2}{9\cos\alpha^2}\psi^2+\cdots\right).$$

Beide Klammerwerte stimmen in den Hauptgliedern überein. Die Nebenglieder sind im Vergleich zu jenen so klein, daß sie vernachlässigt werden dürfen. Statt ψ^2-2 darf also, weil ψ im allgemeinen eine große Zahl ist, ψ^2 gesetzt werden. Daher ist

$$\delta\sin\nu = C\sin\psi + C_1\cos\psi + \frac{urpg\cos\tau^3}{U_0\cos\alpha\, v_0 h}\,\frac{\operatorname{tg}\varphi_0}{\cos\varphi_0^{3/2}}\cdot\frac{\cos\varphi^{3/2}}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Durch Differention nach ψ folgt dann

$$\delta\cos\nu = C\cos\psi - C_1\sin\psi +$$
$$+\beta\cdot\frac{urpg\cos\tau^4}{3U_0\cos\alpha^2 v_0 h}\,\frac{\operatorname{tg}\varphi_0}{\cos\varphi_0^4}\cdot\frac{\cos\varphi^4}{\operatorname{tg}\varphi}(7+2\cot\varphi^2).$$

Da β klein ist, so ist das letzte Glied sehr klein.

Da für $t=0$ φ in φ_0 und τ in α übergeht, ψ aber mit δ und ν verschwindet, so ergeben sich hieraus die Konstanten C und C_1.

$$C_1 = -\frac{\beta g}{U_0}\cos\alpha^2,\quad C = -\beta^2 g\frac{(7+2m)}{3U_0}\cos\alpha^2.$$

Für ψ ist der obige Wert einzusetzen. Die Formeln können noch leicht in Funktion der Geschwindigkeit dargestellt werden So ist

$$\psi = \frac{\cos\alpha}{\beta\cos\tau}\left(1-\frac{v_x}{v_0}\right).$$

Digitized by Google

Das aperiodische Glied im Ausdruck $\delta \sin \nu = x$ hat weitaus die größte Bedeutung, da es der wesentlich bestimmende Faktor für die dadurch bewirkte Rechtsablenkung der Geschosse ist, die mit p wächst.

Die Gleichung der Kurve, die die Geschoßspitze beschreibt, würde sich durch Elimination von φ aus den beiden Gleichungen für x und y ergeben. Die Rechnung ist aber nicht ausführbar. Die Konstruktion dieser und ähnlicher Gleichungen läßt aber deutlich den epizykloidischen Charakter der Kurve erkennen.

15. Die Abweichung der Geschosse von der vertikalen Schußebene (Horizontalprojektion der Flugbahn).

Wenn keine Rotation des Geschosses um seine Längsachse stattfindet, so bleibt das Geschoß fortwährend in der Vertikalebene durch die Anfangstangente. Rotiert es aber, etwa nach rechts in der Schußebene gesehen, so findet eine Rechtsabweichung statt, weil wegen der wachsend schrägen Stellung der Achse der Luftwiderstand am meisten von der linken Seite her wirkt und so das Geschoß von der Vertikalebene abdrängt.

Zur Zeit t habe der Geschoßschwerpunkt von dieser Ebene den Abstand z und die Geschwindigkeit v_z in Richtung von z. Durch den Schwerpunkt legen wir parallel mit der vertikalen Schußebene ein Achsensystem OX, OY, so daß also OXZ in die Horizontalebene fällt (Fig. 10). OT sei die Tangente der Flugbahn in O und OA die Geschoßachse. In der Stoßebene OAT wirkt der Luftwiderstand ρ. Wir zerlegen ihn in Richtung der rückwärts verlängerten Tangente OT_1 und der Normalen ON zur

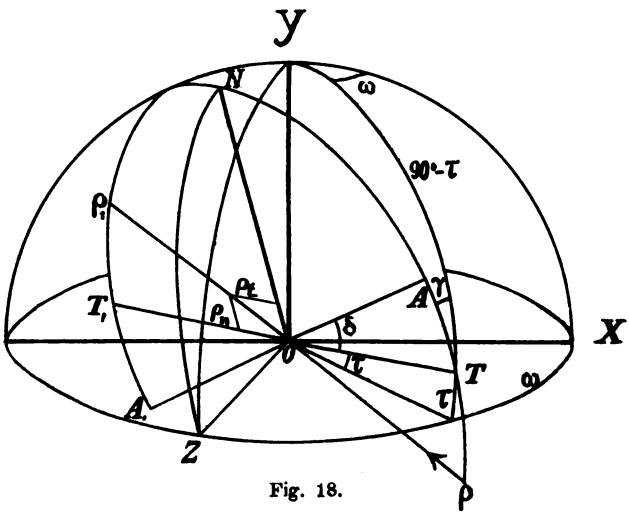


Fig. 18.

Digitized by Google

Tangente bezw. in ρ_t und ρ_n. Beide Komponenten sind auf die Derivationsachse OZ zu projizieren, um die Beschleunigung der Abweichung $\frac{dv_z}{dt}$ zu erhalten. Da die Beschleunigung der Schwere senkrecht zur Achse Z wirkt, so fällt g aus den Formeln heraus.

Wir denken uns um den Schwerpunkt eine Kugelfläche beschrieben und durch OTY, OTN, OTZ Ebenen gelegt. Die erste schließe mit der Vertikalebene OXY den Winkel ω und mit der zweiten die Präzession ν ein. Die Nutation δ ist der Winkel zwischen Geschoßachse OA und Tangente OT, die ihrerseits den Winkel τ mit der Horizontalen bildet.

Die Projektion von ρ_t auf die Z-Achse ist $-\rho_t \cos(TZ)$ oder, wenn wir auf das sphärische Dreieck YZT den Kosinussatz anwenden und beachten, daß YZ und $XZ = 90^0$, wegen $\cos TZ = \cos\nu \sin\omega$, auch $-\rho_t \cos\tau \sin\omega$. Die Projektion von ρ_n auf die Z-Achse ist $\rho_n \cos(NZ)$. Das Dreieck NTZ ergibt aber

$$\cos(NZ) = \sin(TZ)\cos(NTZ) = \sin(TZ)\cos(YTZ - \nu) =$$
$$= \sin(TZ)(\cos YTZ \cos\nu + \sin YTZ \sin\nu).$$

Das Dreieck YTZ liefert aber $\cos(YZ) = 0 = \sin\tau\cos TZ + \cos\tau\sin TZ\cos YTZ$, und ferner $\sin(YZT) : \cos\omega = 1 : \sin(TZ)$. Oben fanden wir $\cos TZ = \cos\tau\sin\omega$, also ist

$$\cos(NZ) = \sin\nu\cos\omega - \cos\nu\sin\tau\sin\omega.$$

Die Vereinigung beider Projektionen ergibt die Differentialgleichung der Rechtsabweichung

$$\frac{G}{g}\frac{dv_z}{dt} = -\rho_t\cos\tau\sin\omega + \rho_n\sin\nu\cos\omega - \rho_n\cos\nu\sin\tau\sin\omega.$$

Die Ausdrücke für ρ_t und ρ_n sind noch umzuformen. Es ist

$$\rho_t = \rho\cos\rho T_1, \quad \rho_n = \rho\sin\rho T_1.$$

Die Komponente des Widerstandes in Richtung der Längsachse ist

$$\rho_A = \rho\cos\rho A',$$

also ist auch

$$\rho_t = \rho_A\frac{\cos\rho T_1}{\cos\rho A'}, \quad \rho_n = \rho_A\frac{\sin\rho T_1}{\cos\rho A'}.$$

Bevor wir diese Ausdrücke in die obige Gleichung einsetzen, beachten wir, daß ω, $\rho A'$ und ρT_1 sehr klein sind, so daß man setzen kann:

$$\rho_t = \rho_A, \quad \rho_n = \rho_A\rho T_1.$$

Digitized by Google

Die Gleichungen in Abschnitt 2 des I. Teiles geben aber

$$\rho T_1 = \rho A' - \delta, \quad \rho A' = \operatorname{tg} \rho A' = \frac{Y}{X},$$

also

$$\rho T_1 = \frac{Y}{X} - \delta,$$

und da

$$K = \frac{a \cos \delta - b \sin \delta}{c + d \sin \delta^2} \cdot \frac{G}{g} U r \sin \delta$$

für kleine δ in

$$K = \frac{G}{g} U r \frac{a}{c} \delta, \quad \frac{a}{c} = h, \quad \frac{G}{g} U = \rho$$

übergeht, so ist

$$\rho_n = \rho_A \left(\frac{Y}{X} - \delta \right).$$

Führen wir ein

$$\varkappa = \frac{Y}{X_\delta} - 1 = \frac{1 + 2 \operatorname{tg} \lambda^2 ln \sin \lambda}{- 2 \operatorname{tg} \lambda^2 ln \sin \lambda} - 1,$$

so ist endlich

$$\rho_n = \rho_A \varkappa \delta,$$

also auch

$$\frac{G}{g} \frac{d v_z}{d t} = - \rho_A \omega \cos \tau + \varkappa \rho_A \delta \sin \nu - \varkappa \rho_A \delta \cos \nu \,.\, \omega \sin \tau.$$

Das letzte Glied ist sehr klein, daher genügt es zu setzen

$$\frac{G}{g} \frac{d v_z}{d t} = - \rho \omega \cos \tau + \varkappa \rho_A \delta \sin \nu.$$

Da nun

$$\frac{G}{g} \frac{d v_x}{d t} = - \rho_A \cos \tau,$$

so ergibt die Elimination von dt aus beiden

$$d v_z = \left(\omega - \frac{\varkappa \delta \sin \nu}{\cos \tau} \right) d v_x.$$

Wegen der Kleinheit von ω ist

$$\omega = \frac{d z}{d x} = \frac{d z}{d t} : \frac{d x}{d t} = \frac{v_z}{v_x}, \text{ also } v_z = \omega v_x,$$

Digitized by Google

und

$$d v_z = \omega d v_x + v_x d \omega .$$

Demnach ist

$$d \omega = - \frac{\varkappa \delta \sin \nu d v_x}{v_x \cos \tau} .$$

Wir fanden aber, wenn wir von den periodischen Gliedern absehen,

$$\delta \sin \nu = \frac{u r p g \cos \tau^3 \operatorname{tg} \varphi_0 \cos \varphi^{5/2}}{U_0 \cos \alpha \, v_0 h \operatorname{tg} \varphi \cos \varphi_0^{5/2}}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{r p}{v_0},$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha \frac{\cos \varphi_0^{3/2}}{\cos \varphi^{3/2}},$$

und eingesetzt in $d \omega$ folgt

$$d \omega = - \frac{3 \varkappa u g \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \varphi_0 \cos \varphi^{3/2} d \varphi}{2 h U_0 \cos \alpha \, . \cos \varphi_0^{5/2}} = - C \cos \varphi^{5/2} d \varphi ,$$

wo C zur Abkürzung dient.

Aus $d z = \omega d x$ folgt als Rechtsabweichung

$$z = \int \omega d x = \omega x - \int x d \omega .$$

Nun ist nach der Hyperbeltheorie

$$x = W \frac{\operatorname{tg} \varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi_e} = b (\operatorname{tg} \varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi), \quad b = \frac{W}{\operatorname{tg} \varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi_e},$$

also

$$z = \omega b (\operatorname{tg} \varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi) - b \int (\operatorname{tg} \varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi) d \omega ,$$

$$z = - \omega b \operatorname{tg} \varphi + b \int \operatorname{tg} \varphi d \omega ,$$

und nach Einsetzen des Wertes von $d \omega$

$$z = - \omega b \operatorname{tg} \varphi - b C \int \cos \varphi^{3/2} \sin \varphi d \varphi ,$$

$$z = \frac{2}{5} b C \left(\cos \varphi^{5/2} - \cos \varphi_0^{5/2} \right) + b C \operatorname{tg} \varphi \int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos \varphi^{5/2} d \varphi .$$

Digitized by Google

Damit sind wir auf ein Integral gestoßen, das sich auf ein elliptisches der zweiten Art zurückführen läßt. Es ist nämlich

$$\int \cos\varphi^{5/2} d\varphi = \frac{2}{5} \sin\varphi \cos\varphi^{3/2} + \frac{3}{5} \int \cos\varphi^{1/2} d\varphi .$$

Da die Auswertung dieses Integrals beschwerlich fällt, haben wir das Integral

$$I = \int_0^{\varphi} \cos\varphi^{5/2} d\varphi$$

von Grad zu Grad berechnet und als Tabelle der Abhandlung zum Schlusse angehängt. Das positive Integral

$$\int_{\varphi_e}^{\varphi_0} \cos\varphi^{5/2} d\varphi$$

ist also leicht zu berechnen.

Die vollständige Formel für die Derivation oder Abweichung des Geschosses von der Vertikalebene durch die Mündung ist also

$$z = \frac{3 \varkappa u g r p}{2 h U_0 \cos\alpha v_0 \cos\varphi_0^{5/2}} \cdot \frac{W \operatorname{tg}\varphi_0}{\operatorname{tg}\varphi^0 - \operatorname{tg}\varphi_e} \left\{ \frac{2}{5} \left(\cos\varphi_e^{5/2} - \cos\varphi_0^{5/2} \right) - \operatorname{tg}\varphi_e \int_{\varphi_e}^{\varphi_0} \cos\varphi^{5/2} d\varphi \right\}.$$

Hierin kommt das Verhältnis $\frac{\varkappa}{h}$ vor, das nach dem obigen Ausdruck für k und $h = \frac{a}{c}$ gemäß den früheren Werten hiefür aus

$$\frac{\varkappa}{h} = \frac{1 + 4 \operatorname{tg}\lambda^2 ln \sin\lambda}{\frac{1}{4}\cot\lambda - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\lambda + (\operatorname{tg}\lambda - \operatorname{tg}\lambda^3) ln \sin\lambda + \frac{f}{r}(1 + 2\operatorname{tg}\lambda^2 ln \sin\lambda)}$$

direkt für die paraboloidische Spitze berechnet werden kann.

Für die ogivale Geschoßspitze der 21 *cm*-Kanone fand sich nach Majevski beim quadratischen Widerstandsgesetz $\frac{\varkappa}{h} = 0{,}31$ und für das 3,4 Geschoßkaliber

$$\frac{f}{r} = 1{,}6, \quad h = 9{,}12, \quad \varkappa = 3{,}037, \quad \frac{\varkappa}{h} = 0{,}337 .$$

Digitized by Google

Setzen wir, da das Geschoß 3,5 Kaliber lang war, $\frac{f}{r} = 1{,}63$ und $\operatorname{tg}\lambda = \frac{1}{4}$, so folgt nach unseren Rechnungen für die parabolische Spitze

$$h = 10{,}5, \quad \varkappa = 3{,}65, \quad \frac{\varkappa}{h} = 0{,}342,$$

wonach diese Verhältnisse mit den Versuchswerten nahe übereinstimmen. In Anwendung dieser Formeln auf die 21 *cm*-Kanone benützen wir die schon bekannten Elemente

W	α	β	v_e	T
4096 *m*	5°38′	7°16	358,3 *m*	9,7″.

Berechnen wir λ aus

$$1 - \lambda = \frac{W g \operatorname{tg}\beta}{2 v_0^2 \sin\alpha^2},$$

so folgt

$$\lambda = 0{,}00364, \quad U_0 = 22{,}776, \quad m = 0{,}16445,$$
$$\varphi_0 = 67°55'36'', \quad \varphi_e = 61°0'34''.$$

Die Tafel liefert

$$\int_{\varphi_e}^{\varphi_0} \cos\varphi^{3/2} = 0{,}7093 - 0{,}6944 = 0{,}0149.$$

Daher ist, weil $u = 0{,}53$, $p = 625$

$$z = \frac{3.0{,}342.0{,}53.10.0{,}105.625.W \operatorname{tg}\varphi_0}{2.22{,}77.521 \quad \cos\varphi_0^{3/2}(\operatorname{tg}\varphi_0 - \operatorname{tg}\varphi_e)}(0{,}0308 - 0{,}0269),$$

also

$$z = 10{,}5\ m$$

als Rechtsablenkung in der Schußweite 4096 *m*.

Die Gleichungen der Rechtsablenkung für flache Flugbahnen erhalten, wenn die Winkelgeschwindigkeit p proportional mit v abnimmt, $\frac{p}{v}$ also konstant bleibt, eine einfachere Form, weil die Integrationen bei Einführung der Hyperbelformeln durchführbar sind. Wir deuten aber hier nur die Entwicklungen an.

Die Grundformeln liefern, wenn ψ für φ geschrieben,

$$d\psi = -\frac{3hv}{2urp} \operatorname{tg}\varphi\, d\varphi, \quad \psi = \frac{3hv}{2urp} ln \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_0},$$

also ist

$$\beta\psi = ln \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_0}, \quad \cos\varphi = \cos\varphi_0\, e^{\beta\psi}, \quad \beta = \frac{2urp}{3hv}.$$

Digitized by Google

Die weitere Ausführung der Integralgleichung gibt

$$\delta \sin \nu = \frac{u r p g \sin \varphi_0 \cos \tau^2}{h U_0 \cos \alpha v \cos \varphi_0^2} \left(\frac{\cos \varphi^2}{1+4\beta^2} + \frac{\cos \varphi^4}{2(1+16\beta^2)} + \frac{3 \cos \varphi^6}{8(1+36\beta^2)} \cdots \right).$$

Da β immer klein bleibt, so ist der Klammerwert von $\frac{\cos \varphi^2}{\sin \varphi}$ wenig verschieden, so daß

$$\delta \sin \nu = \frac{u r p g \operatorname{tg} \varphi_0 \cos \tau^2 \cos \varphi^2}{h U_0 \cos \alpha v \cos \varphi_0 \sin \varphi} = \frac{R \cos \varphi^2}{\sin \varphi},$$

wo R zur Abkürzung dient.

Die Gleichungen der Derivation folgen nun aus

$$d\omega = -\frac{3 \varkappa R}{2 \cos \tau} \cos \varphi \, d\varphi, \quad \omega = \frac{3 \varkappa R}{2 \cos \tau} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi),$$

$$dz = \omega \, dx, \quad dx = -\frac{W \, d \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi_e}.$$

Hieraus

$$z = \frac{3 \varkappa R W}{2 \cos \tau (\operatorname{tg} \varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi_e)} \int \frac{(\sin \varphi - \sin \varphi_0)}{\cos \varphi^2} d\varphi,$$

und integriert

$$z = \frac{3 \varkappa u g r p}{2 h U_0 \cos \alpha v} W \cos \tau \operatorname{tg} \varphi_0 \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi_0 - \varphi_e),$$

und da $\operatorname{tg} \varphi_0 \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi_0 - \varphi_e) = \frac{1}{2} k \sin \alpha$ (S. XV, S. 30 und 141), so ist

$$z = u r \frac{\varkappa p}{h v} \cdot W \sin \alpha, \quad z = u \frac{z}{h} \operatorname{tg} \gamma \, W \sin \alpha, \quad \left(\frac{p}{v} = \text{const.} \right)$$

Die bekannte empirische Formel $z = CW \sin \alpha$ oder $C' v_0^2 \sin \alpha^2$ hat damit ihre theoretische Begründung erhalten.

Der Ausdruck $\frac{\varkappa}{p}$ und alle anderen Konstanten sind nach dem Früheren bekannt. Für das obige Beispiel ist

$$\sin \varphi_e = 0{,}9038, \quad \varphi_e = 64^0 41', \quad \sin \varphi_0 = 0{,}9267$$

und daher

$$z = 9{,}3 \, m \text{ Rechtsablenkung.}$$

Die Winkelgeschwindigkeit, die zu Anfang der Bewegung 625 ist, müßte also zu Ende, wo $v_e = 355$, auf $\frac{355}{521} \cdot 625 = 426$ gesunken sein, wenn 9,3 m Rechtsablenkung eintreten sollte. Bei unveränderlicher Drehung oder $p = \text{Const.}$ ist sie 10,5 m. Der

Digitized by Google

Unterschied ist also nicht groß. Die Formeln sind also anwendbar, wenn v_e von v_0 nicht zu stark abweicht.

Das 140 *kg* schwere 3,5 Kaliber-Geschoß der 21 *cm*-Kanone hat gemäß dem Versuche mit $v_0 = 521\ m$ Anfangsgeschwindigkeit nach 9,7 Sekunden in der horizontalen Schußweite von 4096 *m* eine Rechtsablenkung von 10,5 *m* erhalten. Beim Versuch am 29. Mai 1883 wurden 10 bis 17,5 *m* Seitenabweichung, im Mittel 14,1 *m* gemessen.

Geht man von den Gleichungen im Abschnitt 11 und wieder von der Annahme aus, daß die Winkelgeschwindigkeit mit v proportional abnimmt, so ist in diesem Falle

$$\omega = \varkappa n \int \delta \sin \nu \frac{dT}{T},$$

und der Ausdruck für

$$z = \int \frac{v_0 \cos \alpha \,.\, \omega\, dt}{T^n}$$

läßt sich leicht in eine Reihe von $T = 1 + ct$ entwickeln, die wir aber nicht niederschreiben wollen. Man findet schließlich den Wert $z = 9{,}4\ m$, der mit dem zuletzt entwickelten fast übereinstimmt.

Die Ablenkung der Flugbahn von der Vertikalebene wird 1. durch die Geschoßrotation, 2. durch die Erdrotation und 3. durch seitlichen Wind hervorgerufen. Die durch den Wind bewirkte Seitenbewegung wollen wir hier noch in Kürze berühren.

Die zur Flugbahn senkrecht stehende Komponente des Windes sei ω.

Da das Geschoß dem Winde mit der Seitengeschwindigkeit v ausweicht, so ist die Beschleunigung des Winddruckes in der Flugbahn

$$\frac{dv}{dt} = c\,(\omega - v)^2.$$

Zu Anfang der Bewegung ist sie

$$p = \frac{dv}{dt} = c\,\omega^2,$$

und die Ablenkung ist daher

$$z = \omega t - \frac{\omega^2}{p} ln \left(1 + \frac{p}{\omega^2} \cdot \omega t\right)$$

Die Konstante c läßt sich rechnerisch ermitteln, am besten aus einem Versuche. Die Annahme

$$\frac{dv}{dt} = c\,(\omega - v),$$

Digitized by Google

woraus

$$z = \omega t - \frac{\omega}{c}(1 - e^{-ct}),$$

führt fast zu denselben Ergebnissen.

Diese Formeln sind nur für mäßige Winde brauchbar, da sie die Stetigl eit des Winddruckes voraussetzen, die bei stärkeren Winden, die oft in Stößen wirken, nicht mehr vorhanden ist.

Zu Anfang ist die Beschleunigung des Winddruckes $p = \frac{dv}{dt} = \frac{\text{Druck}}{G:g} = c\,\omega^2$. Der Druck pro cm^2 ist $\left(\frac{\omega}{10}\right)^2 \cdot 0{,}00114$, auf den Längsschnitt f des Zylindergeschosses $\left(\frac{\omega}{10}\right)^2 \cdot 0{,}00114 \cdot \frac{f}{2}$, daher $\frac{p}{\omega^2} = 0{,}00001114 \cdot \frac{f}{2}\frac{g}{G}$.

Für ein Geschoß von 6,85 kg, $2r = 7{,}70$ cm, Länge 25,4 cm, also Längsschnitt f rund 176 cm^2 ist $p = 0{,}001437\ \omega^2$ und also

$$z = \omega t - \frac{ln\,(1 + 0{,}001437\ \omega t)}{0{,}001437}.$$

Die Seitenablenkung durch den Wind von etwa 10 m Geschwindigkeit würde also für dies Geschoß nach 10 Sekunden Flugzeit 6,5 m betragen.

Der Ausdruck für die Rechtsablenkung auf S. 30 läßt sich noch mittels der Formeln

$$\sin\varphi_0 - \sin\varphi_e = \cos\varphi_0\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_e)$$

$$\sin\varphi_e = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi_e)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_e)}, \quad \varphi_e = 64^0 41!$$

zurückführen auf

$$z = \frac{3\varkappa u g r p W \cos\tau}{2 h U_0 \cos\alpha v \cos\varphi}(\sin\varphi_0 - \sin\varphi_e).$$

Gültig bei konstantem Verhältnis $p:v$ für kleine Schußweiten.

Im allgemeineren Fall muß man sich der strengen Formel bedienen, die wir vorhin abgeleitet haben und die wir zur folgenden umformen

$$z = \frac{4\varkappa}{5h} u\,\mathrm{tg}\,\gamma \frac{W\sin\alpha}{k\sin\alpha\left(1 - \frac{\mathrm{tg}\,\varphi_e}{\mathrm{tg}\,\varphi_0}\right)}\left\{\left(\frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right)^{5/2} - 1 - \frac{5\,\mathrm{tg}\,\varphi_e}{2\cos\varphi_0^{5/2}}\int_{\varphi_e}^{\varphi_0}\cos\varphi^{5/2}\,d\varphi\right\},$$

$$k\sin\alpha\left(1 - \frac{\mathrm{tg}\,\varphi_e}{\mathrm{tg}\,\varphi_0}\right) = \frac{\frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha} + \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\beta} - 2(1 - 2\lambda)}{1 - \lambda}.$$

Digitized by Google

Zur Berechnung einer Seitenablenkung müssen v_0, α, W, T gegeben sein, aus welchen dann λ, β, φ_0, φ_e zu ermitteln sind aus

$$1-\lambda=\frac{g\,W}{v_0^2\sin 2\alpha\left\{\left|\sqrt{\frac{8\,W}{g}\operatorname{tg}\alpha}\,\middle/\,T-1\right|\right\}^2},\qquad \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{v_0^2\sin 2\alpha\,(1-\lambda)}{g\,W},$$

$$\cos\varphi_0=\frac{\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}-1+2\lambda}{\sqrt{4\lambda\,(1-\lambda)}},\qquad \operatorname{tg}\varphi_e=\frac{1-2\lambda-\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}}{\sqrt{4\lambda\,(1-\lambda)}}.$$

Sind φ_0 und φ_e berechnet, so ist die z-Formel in Funktion dieser Werte

$$z=\frac{u\,x\operatorname{tg}\gamma\,W\sin\alpha}{h\cos\varphi_0^{5/2}\,(\operatorname{tg}\varphi_0-\operatorname{tg}\varphi_e)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi_0-\varphi_e)}\left\{\frac{2}{5}(\cos\varphi_e^{5/2}-\cos\varphi_0^{5/2})-\right.$$

$$\left.-\operatorname{tg}\varphi_e\int_{\varphi_e}^{\varphi_0}\cos\varphi^{5/2}\,d\varphi\right\}.$$

Das Integral ergibt sich aus der am Schlusse angehängten Tabelle.

Auf S. 255 des „Compendium der Ballistik“ führt Cranz ein Beispiel zur Berechnung der Seitenabweichung nach Vallier rechnerisch durch, was auch wir hier benützen wollen. Gegeben sind:

Kaliber $2r=0{,}27\ m$, Geschoßgewicht $G=180\ kg$, Geschoßlänge $L=H+h=2{,}5$ Kaliber $=5r$, Trägheitsradius des Geschosses um die Längsachse $\rho=0{,}8r$, Drallwinkel an der Mündung $\gamma=4^0$, Anfangsgeschwindigkeit $v_0=505\ m$.

Es fand sich

für $W=1000\ m$, wobei $\alpha=1^0 11'$ ist, $z=0{,}4\ m$,
„ $W=7000\ m$, „ $\alpha=14^0 10'$ „ $z=49{,}9\ m$
(beobachtet 47,7 m).

Da die Flugzeit nicht angegeben ist, so setzen wir für die große Schußweite $U_e=0$, $\varphi_e=0$ und haben $\lambda=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right)$;

$$\frac{v_x}{v_0\cos\alpha}=\left(\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^{3/2},\qquad T=\frac{\sqrt{\frac{8\,W}{g}\operatorname{tg}\alpha}}{1+\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}}}\left(1-\frac{1}{20}\lambda^2\right),$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{8\,g\,W}{v_0^2\sin 2\alpha}}-\frac{1}{2}=\cos\varphi_0.$$

Digitized by Google

Damit erhalten wir $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = 0{,}686$, $\lambda = 0{,}157$, $T = 20{,}63'$, $\beta = 20°12'$, $v_x = 278{,}2\ m$, $v_e = 296{,}5\ m$, $\varphi_0 = 46°40'$, $p = \frac{v_0 \operatorname{tg}\gamma}{r} = 262$, $k \sin\alpha = 2\left(\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} - 1\right) = 0{,}914$, $k = \frac{4\,U_0}{3g}$, $U_0 = 28\ m$, $\cos\varphi_0^{5/2} = 0{,}3902$.

Es ist noch das Verhältnis $\frac{\varkappa}{h}$ zu bestimmen. Wir nehmen, da hierüber nichts mitgeteilt ist, ein Oval von $h = 2r$ an. Die Zylinderlänge wäre also $3r$. Als paraboloidische Spitze ist die Grenztangente λ an der Basis $\operatorname{tg}\lambda = r : 2h = {}^1/_4$. Wir haben nun die (transformierten) Formeln

$$\varkappa = \frac{\cot\lambda^2}{ln\,(1 + \cot\lambda^2)} - 2, \quad h = \frac{\varkappa \cot\lambda}{4} + (\varkappa + 1)\left(\frac{f}{r} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\lambda\right).$$

Da aber auch betreffs $f =$ Abstand des Schwerpunktes von der Basis des Ovals nichts ausgesagt ist, benützen wir eine Angabe Majevskis, nach welcher für Geschosse von 2,5 Kaliber $f = 1{,}06\,r$ ist. (Siehe S. 64 seiner „Lösung der Probleme“ etc.) Ein homogenes Geschoß würde haben $f = \frac{23}{24}r$. Also erhalten wir

$$\varkappa = 3{,}647, \quad h = 7{,}991, \quad \frac{\varkappa}{h} = 0{,}456.$$

Indem wir noch das Trägheitsmoment in der Form schreiben:

$$A = u\,\frac{G\,r^2}{g} = \frac{G}{g}(0{,}8\,r)^2, \quad u = 0{,}64, \quad \operatorname{tg}\gamma = 0{,}07,$$

ist auch u bekannt und damit sind alle Elemente berechnet.

Da $U_e = 0$ angenommen ist, sind wir des Aufschlagens der Tabelle überhoben, und aus der Ablenkungsformel für große Schußweiten

$$z = \frac{2\varkappa}{5h}\,u \operatorname{tg}\gamma\, W \sin\alpha\, \frac{\left(\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^{5/2} - 1}{\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} - 1}$$

erhalten wir schließlich für $W = 7000\ m$

$$z = 47{,}8\ m,$$

was, mit der Beobachtung $z = 47{,}7$ verglichen, ein günstiges Resultat ist. Unsere paraboloidische Geschoßspitze liefert also nahe den gleichen Wert wie die ogivale Spitze, die das Geschoß gehabt haben mag. Man kann daraus schließen, daß die Geschoßformen nur wenig Einfluß auf obiges Verhältnis $\varkappa : h$ haben, dieses also

Digitized by Google

sich nur wenig ändert. Der Einfluß des Geschoßzylinders scheint im ganzen minimal zu sein, wiewohl er gegen das Ende der Flugbahn sich bemerklich machen dürfte. Die Kopfwellen lassen am Zylinderteil eine starke Luftverdünnung erkennen. Den Hauptanteil des Druckes bezw. Widerstandes trägt das Oval.

Bei 1000 *m* Schußweite können wir uns der Formel für konstante $p : v$ bedienen und so erhalten wir

$$z = u \frac{x}{h} \operatorname{tg} \gamma \, W \sin \alpha = 0{,}64 \cdot 0{,}456 \cdot 0{,}07 \cdot 1000 \cdot 0{,}0206 = 0{,}4 \, m.$$

16. Die Rotationsgleichungen für das Widerstandsgesetz $W = \gamma F \cos \varepsilon \, v^2$.

Der Ausgangspunkt der Gleichungen der Geschoßrotation war durch die Annahme gegeben, daß der Luftwiderstand bei schräg auffallender Strömung proportional sei

$$d\sigma \cos \varepsilon^2,$$

wo $d\sigma$ das getroffene Flächenelement und ε der Winkel zwischen dessen Normale und der Strömungsrichtung ist. Im allgemeinen reicht dieses Gesetz auch für die meisten praktischen Fälle aus; doch möchten wir hier daran erinnern, daß die Versuche auch zu anderen Ausdrücken hinführen, die mehr oder weniger einfach sind als der obige und unter welchen der von F. R. v. Lößl gefundene

$$d\sigma \cos \varepsilon$$

der einfachste ist. Hiernach wäre der größere Widerstand

$$W = \frac{1}{8} F \cos \varepsilon \cdot v^2$$

einfach dem Cosinus des Winkels ε proportional. Es dürfte nützlich sein, festzustellen, ob Vorteile für die Rechnung sich aus diesem Gesetz ergeben und ob die entsprechenden Gleichungen die ballistischen Daten wiederzugeben im stande sind. Die Grundformeln des Luftwiderstandes sind jetzt

$$dX = d\sigma \cos \varepsilon \sin \lambda, \quad dY = d\sigma \cos \varepsilon \cos \lambda \cos L,$$

$$dQ = 2 (dY \cdot x - dX \cdot y \cos L).$$

Für das aufgesetzte paraboloidische Oval erhalten wir

$$X = \frac{2 r^2 \pi \sin \lambda}{1 + \sin \lambda} \cdot \cos \delta, \quad Y = \frac{r^2 \pi (1 - \sin \lambda)(1 + 2 \sin \lambda)}{3 \sin \lambda (1 + \sin \lambda)} \cdot \sin \delta,$$

$$Q = \frac{r^3 \pi (1 - \sin \lambda)^2 (1 + 2 \sin \lambda - 7 \sin \lambda^2 - 11 \sin \lambda^3)}{15 \sin \lambda^2 \cos \lambda^3} \sin \delta$$

Digitized by Google

und für den Zylinderteil des Geschosses

$$Y_c = \frac{H r \pi}{2} \sin\delta, \quad Q_c = \frac{H^2 r \pi}{4} \sin\delta.$$

Das Kräftepaar ist $\rho_B \cdot e = \rho_A \frac{Y + Y_c}{X} \cdot e.$

Der Angriffspunkt der Luftwiderstandsresultanten hat vom Schwerpunkt den Abstand

$$e = \frac{Q - Q_c}{Y + Y_c} + f.$$

Daher ist

$$K = \frac{G}{g} U \cdot \frac{Q - Q_c + f(Y + Y_c)}{X} = \frac{G}{g} U r h \operatorname{tg}\delta = M \operatorname{tg}\delta$$

oder das Kräftepaar der Drehung ist proportional der Tangente des Winkels zwischen Strömungsrichtung und Geschoßachse. Dieses einfache Resultat läßt auf eine leichtere Handhabe der Rechnungen schließen. Den Ausdruck für h kann man schreiben

$$h = \frac{\cot\lambda}{30} \cdot \frac{(\cot\lambda^2 - 6)\sqrt{1 + \cot\lambda^2} + 2\cot\lambda^2 - 9}{1 + \sqrt{1 + \cot\lambda^2}} +$$

$$+ \frac{f}{6r}\left(\sqrt{1 + \cot\lambda^2} + \cot\lambda^2 - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \cot\lambda^2} + 1\right)\left(\frac{H^2}{4r^2} - \frac{fH}{2r^2}\right).$$

Das letzte Zusatzglied, das sich auf den Zylinderteil bezieht, kommt nur in Ausnahmefällen in Betracht. Der Ausdruck

$$K = M \operatorname{tg}\delta$$

gewährleistet für die Rotationsverhältnisse eine wesentliche Erleichterung der Rechnungen, weshalb wir hierauf noch in Kürze eingehen wollen. Aus Abschnitt 4 entnehmen wir:

$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 + \sin\delta^2 \left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 = A' - Y, \quad \sin\delta^2 \frac{d\nu}{dt} = C - \frac{Ap}{B}\cos\delta,$$

$$i = -\frac{2}{B}\int K d\delta = -\frac{2M}{B}\int \operatorname{tg}\delta\, d\delta = \frac{2M}{B} ln \cos\delta.$$

Der $ln \cos\delta$ scheint eine Schwierigkeit herbeiführen zu wollen. Es ist aber, wenn $\cos\delta = z$,

$$ln\, z = -2\left(\frac{1-z}{1+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^3 + \cdots\right).$$

Digitized by Google

Für den praktisch schon großen Winkel $\delta = 14^0$ ist $z = 0{,}97$, so daß das zweite Glied in

$$ln \cos \delta = -2\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta^6 + \cdots\right)$$

erst auf die sechste Dezimale Einfluß gewinnt und weggelassen werden darf. Nach Elimination von dv erhalten wir nebst den Konstanten

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = A'(1-z^2) + \frac{4M}{B}(1-z)^2 - \left(\frac{Apz}{B}z - C\right)^2,$$

$$A' = \omega_s^2 + \sin\delta_0^2\,\omega_t^2 + \frac{2M}{B}ln\cos\delta_0, \quad C = \sin\delta_0^2\,\omega_t + \frac{Ap}{B}\cos\delta_0,$$

und das Zeitintegral ist

$$t = \int \frac{dz}{\sqrt{P + 2Qz - Rz^2}}.$$

$$P = \omega_s^2 + \sin\delta_0^2\cos\delta_0^2\,\omega_t^2 - \frac{2Ap}{B}\sin\delta_0^2\cos\delta_0\,\omega_t - \frac{4M}{B}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta^2 +$$

$$+ \frac{4M}{B} - \frac{A^2p^2}{B^2}\cos\delta_0^2,$$

$$Q = \frac{A^2p^2}{B^2}\cos\delta_0 + \frac{Ap}{B}\sin\delta_0^2\,\omega_t - \frac{4M}{B},$$

$$R = \frac{A^2p^2}{B^2} - \frac{4M}{B}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta^2 - \frac{4M}{B} + \omega_s^2 + \sin\delta_0^2\,\omega_t^2.$$

Setzen wir in $P + 2Qz - Rz^2$ für z ein $\cos\delta_0$, so verschwindet alles bis auf $\omega_s^2 \sin\delta_0^2$. Daher ist immer, wenn $\delta_0 = 0$ oder $\omega_s = 0$ ist, $\cos\delta_0$ eine Wurzel des obigen Ausdruckes. Trennen wir darin ω_s von den übrigen Gliedern und lösen nach z auf, so folgt

$$z = \cos\delta = \frac{Q \pm \sqrt{(Q - R\cos\delta_0)^2 + R\omega_s^2\sin\delta_0^2}}{R}.$$

Ist $\cos\delta_0$ gegeben, so folgt $\cos\delta_1$ aus

$$\cos\delta_0 + \cos\delta_1 = \frac{\dfrac{2A^2p^2}{B^2}\cos\delta_0 + \dfrac{2Ap}{B}\sin\delta_s^2\,\omega_t - \dfrac{8M}{B}}{\dfrac{A^2p^2}{B^2} - 4M\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}\delta^2 - \dfrac{4M}{B} + \sin\delta_0^2\,\omega_t^2}.$$

Digitized by Google

Die Integration führt entweder auf trigonometrische oder logarithmische Ausdrücke, entsprechend dem stabilen oder instabilen Zustande der Bewegung. Die Präzession ergibt sich aus

$$\sin\delta^2 \frac{d\nu}{dt} = \sin\delta_0^2\,\omega_t + \frac{Ap}{B}\cos\delta_0 - \frac{Ap}{B}\cos\delta,$$

sobald dt mittels der ersten Gleichung eliminiert wird.

Bevor wir einige Anwendungen bringen, ist es notwendig, betreffs der auf den Zylinderteil entfallenden Ausdrücke des Luftwiderstandes einige Bemerkungen zu machen.

A.

Die Theorie beweist, daß die Resultante des Luftwiderstandes in bezug auf den Zylinderteil des Geschosses durch den Mittelpunkt desselben geht. Das entspricht indessen nicht ganz den Versuchsresultaten, die hierüber erhalten worden sind und die wir namentlich Kummer verdanken. Nach dessen Beobachtungen liegt der Angriffspunkt um so höher, je schräger der Luftstrom die Fläche trifft. (Siehe Cranz a. a. O. S. 157.) Die Normalkomponente $Y_e = \frac{1}{2} Hr\pi$ liefert also, wenn sie in die Basis des Ovals verlegt wird, in Wirklichkeit ein kleineres Drehpaar. Statt des Armes $\frac{1}{2}H$ ist also ein kleinerer n zu setzen als Abstand des variablen Angriffspunktes von jener Basis. Der Ausdruck $\frac{H^2}{4r^2}$, der sich auf das Drehpaar des Zylinders bezieht, müßte also durch $\frac{H^2}{2r^2}\cdot\frac{n}{H}$ ersetzt werden, der nur für $n = \frac{1}{2}H$ in den früheren übergeht, also beim normalen Auftreffen der Strömung. Der Übersicht halber geben wir die Zahlen an, die Kummer mit einem Modell einer Granate, gegen das er einen Luftstrom wirken ließ, ermittelt hat. Die Zylinderhöhe war $H = 112{,}5\,mm$, der Radius $r = 37{,}5$, also $H = 3r$, die Höhe der ellipsoidischen Geschoßspitze war $h = 47{,}5\,mm$. Der Winkel zwischen Strömungsrichtung und Geschoßachse sei δ und ζ der Abstand des Angriffspunktes vom unteren Geschoßboden.

δ^0	86	83	82	79	73	70	69	68	64	55	48
ζ	68	70	72	74	76	78	80	82	84	86	88
δ^0	43	39	36	34	33	32	30	25	23	21	18
ζ	90	92	94	96	98	100	102	104	106	108	110.

Hiernach liegt bei dem dem Rechten naheliegenden Winkel von 86° der Angriffspunkt $11\frac{1}{2}\,mm$ höher als die Mitte und bei dem kleinen Winkel von 18° ist er der oberen Grenze sehr nahe.

Digitized by Google

Es ist klar, daß diese Verhältnisse berücksichtigt werden müssen. Im I. Teile, wo das Gesetz $d\sigma \cos \varepsilon^2$ gilt, konnten wir diesen Einfluß deswegen außer acht lassen, weil die sich auf den Zylinder beziehende Komponente mit den zweiten Potenzen des kleinen Nutationswinkels δ multipliziert sind. Im vorliegenden Falle aber verbinden sie sich unmittelbar mit den Hauptgliedern der Geschoßspitze, die auch $\operatorname{tg} \delta$ proportioniert sind. Man kann also, wenn $\delta < 18^0$, unbedenklich n gleich Null setzen. Wiewohl nun die Normalkomponente $Y_c = \frac{1}{2} H r \pi \sin \delta$ jedenfalls nicht Null sein wird, so dürfte auch sie praktisch wenigstens der Null nahe stehen, mindestens in den Fällen, wo die Geschoßschwankungen sich innerhalb mäßiger Grenzen abspielen, also zu Anfang der Bewegung, weniger aber zu Ende derselben, wo der wirkende Luftstrom schon einen beträchtlichen Winkel mit der Geschoßachse macht.

Die Versuche Kummers bezogen sich auf einen Zylinder mit aufgesetztem Oval. Ohne Spitze würde also der Angriffspunkt tiefer liegen. Wählen wir die paraboloidische Spitze und die obigen Abmessungen, so ist wegen $\operatorname{tg} \lambda = r : 2\lambda = 0{,}3947$, $\lambda = 21^0 30'$, $\sin \lambda = 11/30$. Damit erhalten wir aus

$$\zeta = \frac{Q - Q_c}{Y + Y_c} + H$$

$$\zeta = \frac{r \dfrac{(1 - \sin\lambda)(1 + 2\sin\lambda - 7\sin\lambda^2 - 11\sin\lambda^3)}{15 \sin\lambda^2 (1 + \sin\lambda)\cos\lambda} - \dfrac{n H}{2r}}{\dfrac{(1 - \sin\lambda)(1 + 2\sin\lambda)}{3\sin\lambda(1 + \sin\lambda)} + \dfrac{H}{2r}} + H,$$

nach Einsetzen jener Werte

$$\frac{\zeta}{H} = \frac{0{,}0204 - \dfrac{n}{2r}}{0{,}7302 + 1{,}5} + 1.$$

Für $\zeta = 110\,mm$ folgt hieraus $n = 5{,}2\,mm$.

Der Angriffspunkt des Luftwiderstandes auf den Geschoßzylinder allein liegt also nur 5,2 *mm* unter der Basis der Geschoßspitze. Für $\zeta = 108$ folgt $n = 8{,}2\,mm$. Der Winkel $\rho A'$ zwischen Geschoßachse und Resultante ρ folgt aus

$$\operatorname{tg} \rho A' = \frac{1}{6}\left\{\cot\lambda^2 + \sqrt{1 + \cot\lambda^2} - 1 + \frac{3H}{2r}\left(\sqrt{1 + \cot\lambda^2} + 1\right)\right\} \operatorname{tg} \delta.$$

Für das preußische Feldgeschütz C/73 mit $\operatorname{tg} \lambda = 2/9$, $H = 3r$ würde folgen $\operatorname{tg} \rho A' = 4{,}6 \operatorname{tg} \delta$. Nach dieser Formel, die bis $\operatorname{tg} \delta = 2/9$ genau ist, haben wir gleichwohl noch für größere δ die $\rho A'$ berechnet, die bis auf die letzten Zahlen mit den von v. Wuich auf anderem Wege berechneten gut übereinstimmen.

Digitized by Google

$\delta = 0$	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\rho A' = 0$	23°40′	39°	59°10′	69°20′	76°30′	79°40′	82°50′	86°30′	87°50′	90°
v. Wuich 0	20°44′	39°11′	60°14	69°55′	75°11′	78°22′	80°24′	81°50′	82°52′	83°36′.

Ist also $\delta > \lambda$, so sind die Ausdrücke für die Komponenten nur annähernd genau.

Die an ihre Stelle tretenden sind dann Funktionen von δ und die Formeln werden sehr kompliziert. Wir wollen indessen die Komponenten für den Grenzfall $\delta = 90^0$, wo die Strömung senkrecht zur Geschoßachse gerichtet ist, berechnen. Die Integration bezüglich L geht dann nur von 0 bis $\pi/2$. Die Formeln sind:

$$X = p^2\left(\frac{\cos\lambda}{\sin\lambda^2} - ln\cot\frac{1}{2}\lambda\right), \quad Y = p^3\frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{\sin\lambda} - 1\right)^2\left(\frac{1}{\sin\lambda} + 2\right),$$

$$Q = \frac{p^3\pi}{30}\left(\frac{1}{\sin\lambda} - 1\right)^2\left(\frac{1}{\sin\lambda^3} + \frac{2}{\sin\lambda^2} - \frac{7}{\sin\lambda} - 11\right).$$

Wir bemerken hier beiläufig, daß für $\operatorname{tg}\lambda^2 = \frac{3}{16}$ Q der Null nahe ist, was für $h = \frac{r}{2}\cot\lambda = 1{,}15\,r$ eintritt, die Höhe der (stumpfen) Spitze, also nahe dem Halbmesser ist. Das Kräftepaar für senkrechte Strömungsrichtung ist

$$K = \frac{G}{g}Ur\,\frac{\pi}{2}\,\frac{\frac{\operatorname{tg}\lambda^3}{15}\left(\frac{1}{\sin\lambda} - 1\right)^2\left(\frac{1}{\sin\lambda^3} + \text{etc.}\right) - \frac{H^2}{2r^2} + \frac{f}{r}\left\{\frac{\operatorname{tg}\lambda^2}{3}\left(\frac{1}{\sin\lambda} - 1\right)^2\left(\frac{1}{\sin\lambda} + 2\right) + \frac{H}{r}\right\}}{\left(\frac{\cos\lambda}{\sin\lambda^2} - ln\cot\frac{\lambda}{2}\right)\operatorname{tg}\lambda^2}.$$

Der Abstand des Angriffspunktes von der Basis des Ovals ist

$$\frac{\frac{1}{30}\operatorname{tg}\lambda^3\left(\frac{1}{\sin\lambda} - 1\right)^2\left(\frac{1}{\sin\lambda^3} + \frac{2}{\sin\lambda^2} - \frac{7}{\sin\lambda} - 11\right) - \frac{H}{4r^2}}{\frac{1}{6}\operatorname{tg}\lambda^2\left(\frac{1}{\sin\lambda} - 1\right)^2\left(\frac{1}{\sin\lambda} + 2\right) + \frac{H}{2r}}.r.$$

Das Drehmoment des Zylinders $\frac{H}{2r^2}\cdot\frac{H}{2}$ ersetzen wir durch den allgemeinen Ausdruck $\frac{H}{2r^2}.n$. Daher ist der Angriffspunkt vom Geschoßboden entfernt

$$\frac{\zeta}{H} = \frac{\frac{r}{30H}\left(\frac{1}{\sin\lambda} - 1\right)^2\left(\frac{1}{\sin\lambda^3} + \text{etc.}\right)\operatorname{tg}\lambda^3 - \frac{n}{2r}}{\frac{1}{6}\operatorname{tg}\lambda^2\left(\frac{1}{\sin\lambda} - 1\right)^2\left(\frac{1}{\sin\lambda} + 2\right) + \frac{H}{2r}} + 1.$$

Digitized by Google

Für das Kummersche Modell setzen wir wieder $\sin\lambda = 0{,}367 = \frac{11}{30}$ und erhalten wegen $H = 3r$

$$\frac{\zeta}{H} = \frac{0{,}0102 - \frac{n}{2r}}{0{,}3651 + 1{,}5} + 1.$$

Da nun beim senkrechten Auftreffen der Luftströmung die Resultante für den Zylinderteil durch dessen Mittelpunkt geht, setzen wir wieder $n = \frac{H}{2} = \frac{3r}{2}$ und erhalten

$$\zeta = 67{,}8\ mm$$

als Entfernung des Angriffspunktes vom Geschoßboden für das ganze Geschoß bei senkrechtem Auftreffen. Die Kummersche Tabelle gibt für $\delta = 86^0$ den Abstand 68 *mm*, was mit dem errechneten Werte den Verhältnissen gemäß hinreichend übereinstimmt. Hieraus folgt, daß für nahe senkrechtes Auftreffen der Strömung $n = \frac{H}{2}$ und bei sehr schrägem n der Null nahe ist. Im letzteren Falle, also zu Anfang der Bewegung, liegt also jener Punkt der Basis der Spitze sehr nahe.

Bemerkenswert ist, daß der Angriffspunkt des Luftwiderstandes beim normalen Auftreffen für das Geschoßoval derselbe bleibt wie bei der Achse paralleler Strömung, so daß es wahrscheinlich erscheint, daß auch unter anderer Richtung der genannte Punkt seine Lage nur wenig ändert. Der Abstand von der Basis des Ovals ist bei paralleler Strömung

$$\frac{Q}{Y} = r\frac{1 + 2\sin\lambda - 7\sin\lambda^2 - 11\sin\lambda^3}{5\sin\lambda\cos\lambda(1 + 2\sin\lambda)} =$$

$$= r\frac{(\cot\lambda^2 - 6)\sqrt{1 + \cot\lambda^2} + 2\cot\lambda^2 - 9}{5\cot\lambda(2 + \sqrt{1 + \cot\lambda^2})}.$$

Bei $h = 2r$ ist $\operatorname{tg}\lambda = {}^1/_4$ also jener Abstand $0{,}524\,r = 0{,}262\,h$, also in etwa $^1/_4$ der Geschoßhöhe des Ovals. Beim preußischen schweren Feldgeschütz *C*/73, wofür $\operatorname{tg}\lambda = {}^2/_9$, ist der Abstand $0{,}653\,r = 2{,}87\,cm$. Hiefür ist $\operatorname{tg}\rho A' = \frac{Y + Y_c}{X}$ im Grenzfalle $\delta = 90$, wenn man die obigen Komponenten nebst $p = r\operatorname{tg}\lambda$ einsetzt $\rho A' = 83^0 30'$, was mit dem von v. Wuich ermittelten Werte übereinstimmt. In Fig. 1 wird bei $\delta = 90$ der Winkel ρT_1, negativ $= \rho A' - \frac{\pi}{2}$.

Digitized by Google

B.

Nach diesen Auseinandersetzungen kehren wir wieder zu den Rotationsformeln zurück. Wie immer, betrachten wir den Geschoßschwerpunkt als relativ fest, δ und ν werden wieder als Polarkoordinaten der Geschoßspitze angesehen, deren Kurven wir kennen lernen wollen.

Das Geschoß trete ohne seitliche Neigung aus der Mündung heraus, erhalte aber einen Stoßimpuls $\pm\,\omega_s$ in der Vertikalebene. Die Amplitude der Nutation ergibt sich aus

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta_1 = \frac{\omega_s}{\sqrt{\frac{A^2p^2}{4B^2} - \frac{4M}{B}}},$$

die Periode der Nutation ist

$$T_\delta = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{A^2p^2}{4B^2} - \frac{M}{B} + \frac{\omega_s^2}{4}}} = \frac{\pi}{\sqrt{S}},$$

der Präzessionswinkel

$$\nu = \frac{Ap}{2B\cos\frac{1}{2}\delta_1\sqrt{S}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\cos\frac{1}{2}\delta_1 \operatorname{tg}\sqrt{S}.t\right).$$

Bei kleinen δ gehen diese Ausdrücke in die früheren über. Der Anfangsstoß ω_s ist notwendige Bedingung der Pendelung. Die Stabilität wächst mit $\frac{A^2p^2}{4B^2} - \frac{M}{B}$.

Hat das Geschoß keinen Stoß erhalten, so bewirkt doch der wachsende Einfluß der Krümmung der Flugbahn das Eintreten der Pendelung. ω_s als Winkelgeschwindigkeit ist dann durch

$$\frac{d\tau}{dt} = -g\frac{\cos\tau}{v}$$

gegeben. Wir wollen diese Formeln wieder auf die preußische schwere Feldkanone C/73 anwenden. $G = 7{,}5\,kg$, $r = 0{,}044$, $B = 0{,}0027$, $v_0 = 442\,m$, $U = 50\,m$, $p = 632$. Wir haben $\frac{Ap}{2B} = 75{,}25$, $\operatorname{tg}\lambda = \frac{2}{9}$, $\varkappa = 2{,}976$, $h = 5{,}498$, $H = 0$, weil δ klein, $M = 0{,}1852\,U$, $\frac{M}{B} = 68{,}6\,U$. Es sei $\alpha = 16^0$, also $\frac{d\tau}{dt} = 0{,}0213$ bei Beginn der Bewegung.

Damit erhalten wir $\delta_1 = 0{,}00045 = 1\frac{1}{2}'$, $T_\delta = 0{,}0668$ Sek., also 15 Pendelungen in einer Sekunde. Weiter ist $\nu = 75{,}25\,t$. also nach einer vollen Nutationsperiode $= 1{,}6\,\pi$. Die Geschoßspitze

Digitized by Google

beschreibt eine der Fig. 5 ähnliche Kurve. Die Präzessionsperiode folgt aus

$$T_\tau = \frac{2\pi T_\delta}{1{,}6\pi - \pi},$$

wonach also nach etwa $3\frac{1}{3}$ Nutationsperioden der volle Präzessionskreis in 0,223 Sekunden durchlaufen ist. In einer Sekunde laufen also gegen $4\frac{1}{2}$ Präzessionspendelungen ab.

Da die Widerstandsbeschleunigung U mit der Zeit abnimmt, so nimmt infolge des kleiner werdenden M die Stabilität zu. Wegen der Abnahme von v nimmt aber die Winkelgeschwindigkeit $d\tau$ rasch zu, was mit dem gleichzeitigen Anwachsen von δ unter Umständen auch ein Anwachsen von h und damit von M zur Folge hat, womit dann wieder eine Abnahme der Stabilität verbunden ist. Das letzte Glied im Ausdrucke für h

$$-\left(\frac{H^2}{4r^2} - f\frac{H}{2r^2}\right),$$

ist den Versuchen gemäß durch den modifizierten $-\left(\frac{H}{2r^2}n - f\frac{H}{2r^2}\right) = -\frac{H}{2r^2}(n-f)$ zu ersetzen und da n sehr wohl kleiner als f werden kann, so kann jener Ausdruck positiv werden. Bei tiefer Lage des Schwerpunktes ist überhaupt die Möglichkeit vorhanden, daß das Kräftepaar für den Geschoßzylinder mit dem des Ovals gleichsinnig ist.

Diese sich gegenseitig kompensierenden Einflüsse bringen es mit sich, daß die Berechnung der Rotationsverhältnisse des Geschosses nur schrittweise geschehen kann, indem man die Flugbahn in solche Teile zerlegt, innerhalb deren die Elemente als nahe konstant angenommen werden dürfen. Eine Erleichterung der Rechnungen bieten die zu Anfang gegebenen Entwicklungen, in welchen τ, v und U als veränderliche Größen eingeführt sind.

C.

Findet keine Geschoßdrehung statt, ist p also $= 0$, so liefert die Hauptgleichung in Abschnitt 4, wenn die Bewegung in der Vertikalebene vor sich geht, ν also Null ist, die Gleichung

$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 + Y = -2\int \frac{d^2\tau}{dt^2}\, d\delta.$$

Differenziert gibt dies

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{M}{B}\operatorname{tg}\delta + \frac{d^2\tau}{dt^2} = 0.$$

Digitized by Google

Geht die Resultante des Luftwiderstandes durch den Schwerpunkt, so ist $h = 0$ und $M = 0$ und es ist $\delta + \tau = \alpha + \omega_e t$.

Ohne Stoßimpuls ist $\delta = \alpha - \tau$ oder die Geschoßachse bleibt sich immer parallel.

Ist M aber nicht Null, δ aber klein, und wird gesetzt $\delta + \tau = y$, $k^2 = \frac{M}{B}$, so ist

$$\frac{d^2y}{dt^2} - k^2 y + k^2 \tau = 0,$$

woraus

$$y = \delta + \tau = e^{kt}\left(C_1 - \frac{k}{2}\int \tau e^{-kt}\,dt\right) + e^{-kt}\left(C_2 + \frac{k}{2}\int \tau e^{kt}\,dt\right).$$

Diese Exponentialfunktion läßt die Instabilität der rotationslosen Bewegung für den Fall erkennen, daß die Resultante vor dem Schwerpunkt angreift. δ wächst mit der Zeit und das Geschoß schlägt schließlich um. Die Integration kann im Anschluß an

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2\,U_0 \cos\alpha}\left\{\left(1 + \frac{U_0}{v_0}t\right)^2 - 1\right\}$$

erfolgen. Greift die Resultante hinter dem Schwerpunkt an, dann ist h und M negativ. Das Integral wird trigonometrisch

$$\delta = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + g\cos kt \int \frac{\cos\tau \cos kt\,dt}{v} +$$

$$+ g \sin kt \int \frac{\cos\tau \sin kt\,dt}{v}$$

und die Bewegung ist stabil und entspricht der des Pfeiles, bei dem der Schwerpunkt der Spitze nahe liegt. Der hinter ihm wirkende Luftwiderstand drängt also das Pfeilgeschoß immer wieder in die Tangente seiner Flugbahn, um welche es hin- und herpendelt. Zur Integration kann man benützen

$$v_x = \frac{v_0 \cos\alpha}{1 + \frac{U_0}{v_0}t}.$$

Findet zu Anfang ein seitlicher Stoß statt, so tritt ν in die Gleichung ein und die Bewegung ist die eines Raumpendels.

D.

Im allgemeinen Falle erfolgen die Nutationen zwischen zwei Grenzkreisen, von welchen $\delta_0 > \delta_1$ sein möge, und die Geschoßspitze beschreibt epizykloidische Kurven, deren Gleichungen bei $\omega_e = 0$ aus

Digitized by Google

$$\sqrt{R}t = \int \frac{dz}{\sqrt{-\cos\delta_0 \cos\delta_1 + (\cos\delta_0 + \cos\delta_1)\, z - z^2}},$$

$$\nu = C\int \frac{dt}{\sin\delta^2} - \frac{Ap}{B}\int \frac{\cos\delta\, dt}{\sin\delta^2}$$

hervorgehen. Die erste ergibt integriert

$$\cos\delta = \frac{1}{2}(\cos\delta_1 + \cos\delta_0) - \frac{1}{2}(\cos\delta_1 - \cos\delta_1)\cos\sqrt{R}t.$$

Die zweite schreiben wir, wenn $\varphi = \sqrt{R}t$

$$2\sqrt{R}\nu = C\left\{\int \frac{d\varphi}{1-\cos\delta} + \int \frac{d\varphi}{1+\cos\delta}\right\} - \frac{Ap}{B}\left\{\frac{d\varphi}{1-\cos\delta} - \frac{d\varphi}{1+\cos\delta}\right\}$$

und erhalten hieraus

$$2\sqrt{R}\cdot\nu = \left(C - \frac{Ap}{B}\right)\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{\sin\frac{1}{2}\delta_1}{\sin\frac{1}{2}\delta_0}\operatorname{tg}\sqrt{R}t}{\sin\frac{1}{2}\delta_0 \sin\frac{1}{2}\delta_1} +$$

$$+\left(C + \frac{Ap}{B}\right)\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{\cos\frac{1}{2}\delta_1}{\cos\frac{1}{2}\delta_0}\operatorname{tg}\sqrt{R}t}{\cos\frac{1}{2}\delta_0 \cos\frac{1}{2}\delta_1}.$$

Für $\sqrt{R}t = \pi$ erhält man die halbe Nutationsperiode von δ_0 bis δ_1 (s. Fig. 12).

Der Präzessionswinkel ist demnach, wenn die Geschoßspitze wieder bis zu demselben Präzessionskreise zurückgekehrt ist,

$$\nu = \frac{4\pi}{\sin\delta_1\sqrt{R}}\left\{\sin\delta_0 \cos\frac{1}{2}(\delta_0 - \delta_1)\,\omega_t - \frac{Ap}{B}\sin\frac{1}{2}(\delta_0 - \delta_1)\right\},$$

und zwar nach der Nutationsperiode

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{A^2p^2}{B^2} - \dfrac{4M}{B\cos\frac{1}{2}\delta_0^2} + \sin\delta_0^2\,\omega_t^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{R}}.$$

Digitized by Google

Daher ist der ganze Kreis durchlaufen nach der Präzessionsperiode

$$T_\nu = \frac{\pi \sin \delta_1}{\sin \delta_0 \cos \frac{1}{2}(\delta_0 - \delta_1)\,\omega_t - \frac{Ap}{B} \sin \frac{1}{2}(\delta_0 - \delta_1)}.$$

Der Wendepunkt der Schleife läßt sich leicht bestimmen, wenn man in

$$\sin \delta^2 \frac{d\nu}{dt} = \sin \delta_0^2\, \omega_t + \frac{Ap}{B} \cos \delta_0 - \frac{Ap}{B} \cos \delta$$

$d\nu = 0$ und $\delta = \delta_m$ setzt. Dann ist für die geschweifte Zykloide

$$\cos \delta_m = \cos \delta_0 + \frac{B}{Ap} \sin \delta_0^2\, \omega_t,$$

$$\cos \delta = \cos \delta_0 + (\cos \delta_1 - \cos \delta_0) \sin^2 \frac{\sqrt{R}t}{2}.$$

Die Zeit vom äußeren Kreise bis zum Wendepunkte folgt aus

$$\sin^2 \frac{\sqrt{R}t_m}{2} = \frac{B \sin \delta_0^2\, \omega_t}{Ap\,(\cos \delta_1 - \cos \delta_0)}.$$

Für die einfache Zykloide, bei welcher der Wendepunkt in den inneren Kreis fällt, gilt die Bedingung

$$\omega_t = \frac{Ap\,(\cos \delta_1 - \cos \delta_0)}{B \sin \delta_0^2}, \quad T_\omega = \frac{\pi}{\sqrt{R}}$$

und es ist

$$T_\nu = \frac{2B \sin \delta_0\, \pi}{Ap \sin \frac{1}{2}(\delta_0 - \delta_1)}$$

die Präzessionsperiode für die einfach zykloidale Nutation ohne Wendepunkt. Wenn

$$\omega_t > \frac{Ap}{2B \cos \frac{1}{2}\delta_0^2} \left(1 - \frac{\sin \frac{1}{2}\delta_1^2}{\sin \frac{1}{2}\delta_0^2}\right),$$

so treten Nutationen mit Wendepunkten und Knoten nicht mehr auf. Die Winkelgeschwindigkeit der Geschoßspitze ist im allgemeinsten Falle durch

$$\omega^2 = \omega_s^2 + \sin \delta_0^2 \omega_t^2 + \frac{4M}{B}\left(\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta^2 - \operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta_0^2\right)$$

Digitized by Google

gegeben und wächst mit δ. Diese Formel folgt aus

$$\omega^2 \sin \delta^2 = P + 2Qz - Rz^2 + \left(C + \frac{Ap}{B} z\right)^2,$$

wenn man darin die bekannten Werte einsetzt.

Der allgemeine Fall $\omega_s > 0$ läßt sich in ähnlicher Weise erledigen. Hat die Gleichung $P + 2Qz - Rz^2$ zwei gleiche Wurzeln, so verschwinden die Nutationen und es bleibt nur eine reine Präzessionsbewegung als konische Pendelung übrig. Entwickelt man die betreffende Bedingungsgleichung $\delta_0 = \delta_1$, so folgt, da jetzt $\omega_s =$ Null sein muß,

$$\omega_t^2 - \frac{Ap\,\omega_t}{B \cos \delta_0} + \frac{M}{B \cos \delta_0 \cos \frac{\delta_0^4}{2}} = 0,$$

aus welcher sich die Winkelgeschwindigkeit ω_t der Kreisbewegung leicht berechnen läßt. Ist diese gegeben, so ist die Amplitude δ_0 aus

$$\frac{1}{\cos \frac{\delta_0^6}{2}} - \left(\frac{Ap}{B} + \frac{B}{M}\omega_t\right) \frac{\omega_t}{\cos \frac{\delta_0^2}{2}} + 2\omega_t^2 = 0$$

zu berechnen. Die Präzessionsperiode ergibt sich wegen $\nu = \omega_t t$ aus $T = \frac{2\pi}{\omega_t}$ oder

$$T = \frac{2\pi \cos \delta_0}{\frac{Ap}{2B} - \sqrt{\frac{A^2p^2}{4B^2} - \frac{M}{B} \frac{\cos \delta_0}{\cos \frac{\delta_0^4}{2}}}}.$$

E.

Es ist von Interesse, noch den Fall zu betrachten, wo die Resultante des Luftwiderstandes das Geschoß hinter dem Schwerpunkt angreift. Dann ist h und $M = -M'$ negativ. Der Einfachheit halber sei $\omega_s = \omega_t = 0$, δ_0 also > 0, so daß die Strömungsrichtung das Geschoß unter δ_0 trifft. Die Geschoßspitze wird sich also zuerst senken und es ist festzustellen, wie die weitere Bewegung verläuft. Die Integrale sind

$$\cos \delta = \frac{1}{2}(\cos \delta_1 + \cos \delta_0) - \frac{1}{2}(\cos \delta_1 - \cos \delta_0) \cos \sqrt{R}\, t,$$

Digitized by Google

$$\sqrt{R}\,\nu = -\frac{Ap}{B}\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}\delta_0}{\cos\frac{1}{2}\delta_1}\operatorname{arctg}\frac{\sin\frac{1}{2}\delta_1}{\sin\frac{1}{2}\delta_0}\operatorname{tg}\sqrt{R}\,t - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos\frac{1}{2}\delta_0}{\cos\frac{1}{2}\delta_1}\operatorname{arctg}\frac{\cos\frac{1}{2}\delta_1}{\cos\frac{1}{2}\delta_0}\operatorname{tg}\sqrt{R}\,t\right\}.$$

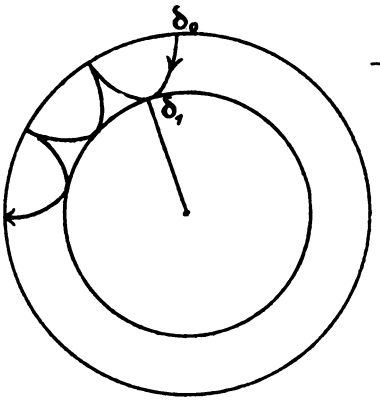


Fig. 19.

Mit t nimmt δ zunächst ab bis δ_1 und da ν negativ ist, so bewegt sich die Geschoßspitze nach links, wie dies Fig. 19 andeutet. Hieraus folgt, daß, wenn bei Rechtsdrehung des Geschosses die Luftwiderstandsresultante hinter dem Schwerpunkte angreift, die Nutationen nach links erfolgen, während bei Linksdrehung, wo p negativ, dieselben nach rechts stattfinden. Das kleinere δ dieser hypozykloidischen Bewegung ergibt sich aus

$$\sin\frac{1}{2}\delta_1 = \frac{\frac{Ap}{B}\sin\frac{1}{2}\delta_0}{\sqrt{\frac{A^2p^2}{B^2} + \frac{4M'}{B\cos\frac{1}{2}\delta_0^2}}}.$$

Die Perioden der Nutationen sind durch die Beziehung $\sqrt{R}\,t = \pi,\ 2\pi$ etc. gegeben. Die erste Formel kann man auch wie folgt schreiben:

$$\sin\frac{1}{2}\delta = \sin\frac{1}{2}\delta_0\sqrt{1 - \frac{\sin^2\frac{1}{2}\sqrt{R}\,t}{1 + \frac{A^2p^2\cos\frac{1}{2}\delta_0^2}{4BM'}}},$$

$$R = \frac{A^2p^2}{B^2} + \frac{4M'}{B\cos\frac{1}{2}\delta_0^2}.$$

Digitized by Google

Ist $p = 0$, rotiert also das Geschoß nicht, so pendelt dasselbe um die Gleichgewichtslage $\delta_1 = 0$, also um die Tangente der Flugbahn gemäß den Formeln

$$\sin\frac{1}{2}\delta = \sin\frac{1}{2}\delta_0 \cos\frac{1}{2}\sqrt{R}\,t, \quad R = \frac{4M'}{B\cos\frac{1}{2}\delta_0^2}$$

mit der Periode

$$T_\delta = \frac{2\pi\cos\frac{1}{2}\delta_0}{\sqrt{\frac{M}{B}}}$$

hin und her.

Führt man hierin ein $M' = \frac{G}{g}Urh$, so ist

$$T = 2\pi\cos\frac{1}{2}\delta_0\sqrt{\frac{gB}{GUrh}}.$$

Die Schwingungsdauer ist also um so kürzer, je größer der Luftwiderstand $\frac{G}{g}U$ ist und je tiefer der Angriffspunkt des Drehungsmomentes liegt. Leichte Körper mit kleinem Trägheitsmoment B haben ebenfalls eine raschere Schwingungszeit als schwere.

Rückt dagegen der Angriffspunkt dem Schwerpunkte näher, nimmt also h bis Null ab, so wächst die Schwingungszeit fortwährend bis zu dem Moment, wo die Resultante durch den Schwerpunkt geht und $h = 0$ und T unendlich ist, eine pendelnde Bewegung also nicht mehr vorkommt, da die Geschoßachse parallel bleibt.

F.

Die bisher abgeleiteten Gleichungen ergeben für das Gesetz

$$d\sigma\cos\varepsilon$$

günstige Resultate. Es dürfte sich aber empfehlen, nachzusehen, ob die nach diesem Gesetze berechnete Ablenkung der Geschosse mit der Erfahrung übereinstimmt. Maßgebend hiefür ist das Verhältnis $\frac{x}{h}$, das jetzt ein anderes wird. Es ist

$$x = \frac{1}{6}(\cot\lambda^2 + \sqrt{1+\cot\lambda^2} - 7),$$

$$h = \frac{\cot\lambda}{30}\cdot\frac{(\cot\lambda^2 - 6)\sqrt{1+\cot\lambda^2} + 2\cot\lambda^2 - 9}{\sqrt{1+\cot\lambda^2}+1} + \frac{f}{r}(x+1).$$

Digitized by Google

Für das Vallier'sche Beispiel haben wir $\operatorname{tg}\lambda = \frac{1}{4}$, $f = 1{,}06\,r$, woraus $x = 2{,}184$, $h = 5{,}046$, also $\frac{x}{h} = 0{,}433$ gegen 0,456 des quadratischen Gesetzes $d\sigma \cos\varepsilon^2$. Das Verhältnis ist also um $\frac{1}{20}$ kleiner, und die frühere Rechtsabweichung von 47,8 sinkt jetzt auf 45,4 *m*, die von der beobachteten 47,7 *m* nur um 2,3 *m* abweicht. Das ist ein noch immer annehmbares Resultat, wenn man beachtet, daß die Versuche mindestens um diese Differenz vom Mittelwert abweichen, und man berücksichtigt, daß das Oval des Geschosses wohl kein Paraboloid war. Das von v. Lößl aufgestellte Gesetz des Normalwiderstandes kann also ballistischen Rechnungen zu Grunde gelegt werden.

17. Zur Abweichung durch die Erdrotation.

Im Anschluß an die Seitenabweichung durch die Geschoßrotation wollen wir noch einige ergänzende Formeln zur Seitenabweichung durch die Erdrotation ableiten, die unabhängig sind von elliptischen Funktionen und rascher zum Ziele führen. Es handelt sich dabei um den Ausdruck

$$Y = 2\,\omega \sin\psi \int_0^t x\,dt + 2\,\omega \cos\psi \cos E \int_0^t y\,dt,$$

wo ψ die geographische Breite und E der vom Meridian von Süden über Osten gezählte Azimut ist. $\omega = 0{,}0000729$.

Vermöge

$$x = \frac{3\,v_0^2 \cos\alpha}{2\,U_0\,(1+m)}\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi_0}\right), \quad n\,dt = -\int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos\varphi}},$$

$$n = \frac{g \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_e)}{v_0 \sin\alpha \sqrt{2\cos\varphi_0}} = \frac{U_0\sqrt{2\cos\varphi_0}}{3\,v_0 \sin\varphi_0}, \quad \cos\varphi = \cos\Theta^2,$$

erhalten wir für das erste Integral

$$\int_0^t x\,dt = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha \sin\varphi_0 \cos\varphi_0}{2g \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_e)}\left(t - \frac{3\,v_0}{U_0}\left\{1 - \sqrt{\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi}}\right\}\right).$$

In 19 beweisen wir, daß für das obige Zeitintegral der Ausdruck

$$1 - \sqrt{\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi}} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi)}{\sqrt{2\cos\varphi}}.nt$$

Digitized by Google

gültig ist. Eingeführt in den letzten Ausdruck und unter Beachtung, daß

$$\sin\frac{1}{2}(\varphi_0-\varphi_e)=\operatorname{tg}\varphi_s\sqrt{\cos\varphi_0\cos\varphi_e}$$ (s. Abschn. 19 des ball. Probl.)

folgt nach einigen Reduktionen

$$\int_0^T x\,dt=\frac{v_0^2\sin 2\alpha\cos\varphi_0\sin(\varphi_0-\varphi_s)\,.\,T}{2g\cos\varphi_s\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi_0-\varphi_e)}$$

welcher Ausdruck mittels

$$W=\frac{v_0^2\sin 2\alpha\cos\varphi_0}{g\cos\varphi_e}\cos\frac{1}{2}(\varphi_0-\varphi_e)^2$$

übergeht in

$$\int_0^T x\,dt=\frac{\cos\varphi_0\sin(\varphi_0-\varphi_s)}{\cos\varphi_s\sin(\varphi_0-\varphi_e)}\,.\,WT.$$

Für das zweite Integral benützen wir

$$y=\frac{v_0^2\sin\alpha^2}{g}\cot\frac{1}{2}(\varphi_0-\varphi_e)^2\left\{1-\left(1-\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi_e}\right)\frac{x}{W}-\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi}\right\}$$

und erhalten schließlich nach Zusammenfassen der beiden ersten Glieder

$$\int_0^T y\,dt=\frac{v_0^2\sin\alpha^2}{g}\cot\frac{1}{2}(\varphi_0-\varphi_e)^2\left\{\sqrt{\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi_e}}\cos\frac{1}{2}(2\varphi_s-\varphi_0-\varphi_e)\,.\,T-\right.$$

$$\left.-\frac{v_0\sin\alpha\cos\varphi_0^{3/2}}{g\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi_0-\varphi_e)}\int_{\varphi_e}^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\cos\varphi^{3/2}}\right\}.$$

Die Tabelle II am Schlusse liefert rasch den Wert des letzten Integrals, das sich übrigens auch konstruktiv mittels einer gleichseitigen Hyperbel für $a=2$, $b=2$, $c=2\sqrt{2}$ (am besten in *dm*) als Bogen dieser Kurve leicht ermitteln läßt. Zu setzen ist $\cos\varphi=\cos\Theta^2$. Für $\varphi=60^0$ ist $\Theta=45^0$ und das Integral hiefür ist 1,5. Die Formeln $\sin\frac{1}{2}(\varphi_0-\varphi_e)=\sqrt{\lambda}$ nebst

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\cos\varphi_s}{\cos\varphi_0},\quad \sin\varphi_s=\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_0+\varphi_e)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_0-\varphi_s)},$$

Digitized by Google

lassen die obigen Ausdrücke noch etwas vereinfachen. Man hat

$$\int_0^T x\,dt = \frac{1}{2} W T \sin(\varphi_0 - \varphi_e) \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\lambda \operatorname{tg}\beta}},$$

$$\int_0^T y\,dt = \frac{v_0^2 \sin\alpha^2}{g} \cdot \frac{1-\lambda}{\lambda} \left\{ \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}} \cos\frac{1}{2}(2\varphi_e - \varphi_0 - \varphi_e)\, T - \right.$$

$$\left. - \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \cos\varphi_0^{3/2} \int_{\varphi_e}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\cos\varphi^{3/2}} \right\}.$$

Zur Anwendung diene das Vallier'sche Beispiel: $W = 7000\,m$, $T = 20{,}63'$, $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = 0{,}686$, $\lambda = 0{,}157$, $\varphi_0 = 46^0\,40'$, $\varphi_e = 0$, $\varphi_s = 25^0\,34'$. Wir wählen $E = 90^0$ bezw. 270^0, also den Schuß im Parallelkreis. Die Abweichung ist dann an den sehr einfachen Ausdruck

$$Y = \omega \sin\psi \sin(\varphi_0 - \varphi_s) \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\lambda \operatorname{tg}\beta}} \cdot W \cdot T$$

geknüpft, wonach in 50^0 nördlicher geographischer Breite bei einer Schußweite von 7000 m eine Rechtsabweichung von 5 m erfolgt. In der südlichen Hemisphäre findet Linksabweichung statt. Bei der Hyperbel $\lambda = 0$ würde die Abweichung durch den Ausdruck

$$Y = \frac{32\,\omega \cos\psi\, v_0^3 \sin\alpha^3}{3 g^2 (\sqrt{1 + k \sin\alpha} + 1)^3} \left\{ \cos E + \frac{3 \operatorname{tg}\psi}{2 \operatorname{tg}\alpha} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + k \sin\alpha}} \right) \right\}$$

gegeben sein.

Der Schuß in der Vertikalen nach oben kommt kaum vor. Für den Fall, daß dies vielleicht doch einmal geschehe und man auch das Geschoß wiederfindet, schreiben wir noch die nötigen Gleichungen hier nieder.

Die Grundgleichungen sind für ein Koordinatensystem, dessen x-Achse nach Osten, y-Achse im Radius des Parallels nach außen, z-Achse parallel der Erdachse ist

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -2\omega \frac{dy_1}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 2\omega \frac{dx_1}{dt} - (g + U) \cos\psi,$$

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} = -(g + U) \sin\psi.$$

Digitized by Google

In den folgenden Ausdrücken ist $\alpha = 90^0$ zu setzen

$$U = \frac{U_0 \cos\varphi_0 \sin\alpha \operatorname{tg}\varphi (\sin\varphi - \sin\varphi_e)}{\operatorname{tg}\varphi_0 \sin\tau \cos\varphi (\sin\varphi_0 - \sin\varphi_e)},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{3g \operatorname{tg}\varphi}{2\cos\varphi}(\sin\varphi - \sin\varphi_e),$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y = v_0 \left(\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi}\right)^{3/2} \frac{\sin\varphi - \sin\varphi_e}{\sin\varphi_0 - \sin\varphi_e}.$$

Die Grundgleichungen geben integriert

$$\frac{dx_1}{dt} = -2\omega y_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = 2\omega x_1 + \frac{dy}{dt}\cos\psi, \quad \frac{dz_1}{dt} = \frac{dy}{dt}\sin\psi,$$

und wieder in die ersten eingeführt und $\omega^2 = 0$ gesetzt

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -2\omega\left(2\omega x_1 + \frac{dy}{dt}\cos\psi\right) = -2\omega\cos\psi\frac{dy}{dt},$$

also

$$\frac{dx_1}{dt} = -2\omega\cos\psi\, y \qquad \text{und} \qquad x_1 = -2\omega\cos\psi\int y\,dt.$$

Beim Vertikalschuß findet also überall eine westliche Ablenkung statt. Das Geschoß kehrt also nicht mehr zu seinem Ausgangspunkt zurück, sondern es bleibt ein wenig hinter demselben zurück. Die Ablenkung im Meridian (nach Norden) ist sehr gering. Die Formeln für die Steighöhe, Steige- und Fallzeit sind

$$Y = \frac{2v_0^2}{g\left(k + 2 + 2\sqrt{k + \frac{1-2\lambda}{1-\lambda}}\right)}$$

$$t_s = \frac{\frac{4v_0}{g}\sin\alpha}{\left(1 + \sqrt[4]{k\sin\alpha + \frac{1-2\lambda}{1-\lambda}}\right)\sqrt{k\sin\alpha + 2 + 2\sqrt{k\sin\alpha + \frac{1-2\lambda}{1-\lambda}}}}$$

$$t_e = \frac{\frac{4v_0}{g}\sin\alpha}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}\sqrt[4]{k\sin\alpha + \frac{1-2\lambda}{1-\lambda}}}\right)\sqrt{k\sin\alpha + 2 + 2\sqrt{k\sin\alpha + \frac{1-2\lambda}{1-\lambda}}}}$$

Digitized by Google

Ist Y und t_s nebst v_0 gegeben, so läßt sich k, λ und daraus

$$v_e = \frac{v_0}{\sqrt{1 - 2\lambda + k(1-\lambda)}}, \quad \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = 1 - 2\lambda + k \sin\alpha (1-\lambda)$$

berechnen.

18. Über den Geschoßkörper vom kleinsten Widerstand.

Je nach der Form der aufgesetzten Spitze sind die Komponenten des Luftwiderstandes mehr oder weniger von einander verschieden, so daß die Frage entsteht, ob es einen Körper kleinsten Widerstandes gibt. Das setzt nun wieder die Kenntnis des Gesetzes des Luftwiderstandes voraus. Da nun der aufgestellten Gesetze nicht wenige sind, die hinreichend genau die Versuche wiedergeben, so ist eine endgültige Entscheidung dieser Frage nicht möglich oder doch nur innerhalb der gegebenen Verhältnisse und dann auch nur annähernd, weil die tatsächlichen Strömungserscheinungen, wie sie bei den Kopfwellen bei $v > 340\ m$ auftreten, wohl anders gerichtete Resultante haben, als die nach den theoretischen einfachen Gesetzen berechneten.

Außerdem zwingen technisch-ballistische Gründe zur Beibehaltung der durch viele Versuche erlangten ogivalen Form der Spitze. Im allgemeinen sind die ballistischen Elemente bei mäßiger Veränderung der Form nur wenig von einander verschieden, wie wir dies an dem hier zu Grunde gelegten Gesetze $d\sigma \cos\varepsilon$ nachgewiesen haben, nach welchem also der Normaldruck dem Kosinus des Winkels zwischen Strömung und Normale proportional ist. Wir wollen darum noch nach diesem Gesetze die Gleichung der Meridiankurve des Rotationskörpers des kleinsten Widerstandes ermitteln und ihre Komponente mit der des paraboloidischen Ovals vergleichen. Es handelt sich dabei nur um die Komponente in Richtung der Achse, in der parallel die Strömung erfolgt und die für Kugel, Paraboloid und Kegel, deren Höhe gleich dem Halbmesser ist, folgende Werte haben:

	Kugel	Paraboloid	Kegel
für $\int d\sigma \cos\varepsilon^2$	0,500	0,402	0,500
„ $\int d\sigma \cos\varepsilon$	0,666	0,618	0,707

Das Oberflächendifferential des Rotationskörpers ist $2\pi y\, ds$, die Strömungsrichtung parallel der Achse bildet mit der Normalen auf ds den Winkel $\varepsilon = 90 - \tau$, wo τ der Tangentenwinkel in x, y ist. Die Widerstandskomponente ist also proportional

$$W = \int 2\pi y \sin\tau\, ds \,.\, \sin\tau = 2\pi \int \frac{y y'^2 dx}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

Digitized by Google

und dieses Integral ist zu einem Minimum zu machen. Nach den Regeln der Variationsrechnung erhalten wir als Bedingungsgleichung

$$y = \frac{c\,(1+y'^2)^{3/2}}{y'^2}, \quad y' = \operatorname{tg}\tau = u,$$

$$y = \frac{c}{\sin\tau^2\cos\tau} = \frac{c\,(1+u^2)^{3/2}}{u^2}, \quad x = c\int \frac{(u^2-2)\sqrt{1+u^2}}{u^4}\,du.$$

Es ist zu integrieren zwischen $x_0 = 0$ und x bezw. zwischen τ_0 und τ, wo wegen $u_0^2 = 2$, $\sin t_0 = \sqrt{2/3}$. Das Integral ist

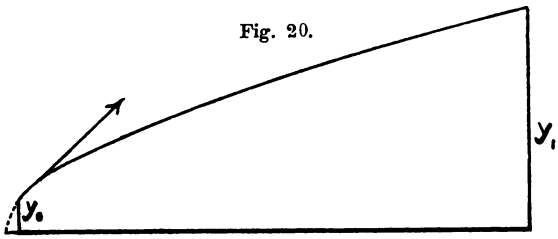
$$\frac{2x}{c} = ln\frac{(1+\sin\tau)(1-\sin\tau_0)}{(1-\sin\tau)(1+\sin\tau_0)} - \frac{2}{\sin\tau} + \frac{4}{3\sin\tau^3}.$$

Zur oberen Grenze wählen wir $\sin\tau = \frac{1}{4}$, wonach $x_1 = 37{,}78\,c$,

$$y_1 = \frac{46}{\sqrt{15}}\,c = 16{,}52\,c, \quad y_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,c = 2{,}598\,c. \text{ Fig. 20.}$$

Die Fläche oder deren Erzeugungskurve besteht aus zwei Teilen, die im Anfangspunkt eine Spitze bilden, von welchen aber nur der eine Kurventeil der Aufgabe genügt. Die Fläche schließt sich also nicht zu einem vollständigen Oval, sondern sie ist ringförmig, also hohl, weshalb sie noch ein Ergänzungsstück erhalten muß, das wieder einer besonderen Berechnung bedarf.

Fig. 20.



Koordinaten der Fläche kleinsten Widerstandes.

$x = 0$	$1{,}05\,y_0$	$2{,}77\,y_0$	$5{,}50\,y_0$	$9{,}98\,y_0$	$14{,}54\,y_0$
$y = y_0$	$1{,}77\,y_0$	$2{,}62_5\,y_0$	$3{,}65\,y_0$	$5{,}11\,y_0$	$6{,}35\,y_0$
$\tau = 54^0\,44'$	30_0	$23^0\,35'$	$19^0\,28'$	$16^0\,16'$	$14^0\,29'$

Die Kurve entspricht einem 12,7 *cm*-Geschoß. Asymptoten besitzt sie nicht. Wir vervollständigen sie daher durch einen Parabelabschnitt so, daß die Grenztangenten in $x_0\,y_0$ zusammenfallen. Der Scheitel hat dann die Abszisse $-0{,}3535\,y_0$.

Digitized by Google

Die Komponente ergibt sich aus dem Integral

$$W = 2\pi c^2 \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\sin\tau^2 - 2\cos\tau^2}{\sin\tau^4 \cos\tau^3}\, d\tau,$$

$$\frac{W}{2\pi c^2} = \frac{4 + 2\sin\tau^2 - 3\sin\tau^4}{6\sin\tau^3\cos\tau^2} - \frac{1}{4} ln \frac{1+\sin\tau}{1-\sin\tau} + C.$$

Die Ausrechnung liefert für die Grenzen $\sin\tau_0 = \sqrt{2/3}$, $\sin\tau_1 = 1/4$

$$W = 43{,}57 \,.\, 2\pi c^2.$$

Zum Vergleiche mit dem Paraboloid legen wir durch den Scheitel und die obere Grenze eine Parabel und berechnen für den zwischen y_0 und y_1 liegenden Teil des Ovals die X-Komponente des Widerstandes. Die Parabel geht von y_1 an etwas über die Kurve des kleinsten Widerstandes hinweg, schneidet sie später und geht in x_0, da hier ihre Ordinate $= 0{,}964\, y_0$, ein wenig unter y_0 zum Scheitel. Wir fanden

$$W_p = \frac{2r^2\pi\sin\lambda}{1+\sin\lambda}.$$

Wir werden der Genauigkeit halber durch die Punkte y_0 und y_1 eine Parabel legen und bedürfen hiefür der Grenzwinkel $12^0\,2'\,30''$ und $53^0\,36''\,30''$ die nebst $r_1 = y_1$ und y_0 in W_p einzusetzen sind. Es folgt schließlich für das Paraboloid

$$W_p = 46{,}12 \,.\, 2\pi c^2.$$

Das Verhältnis der beiden Widerstände ist also

$$43{,}57 : 46{,}12$$

mit einer Differenz von etwa $5^1/_2\,^0/_0$, um welche die Komponente des kleinsten Widerstandes kleiner ist als die der Parabel. Beide Kurven stehen sich also verhältnismäßig nahe.

Vielleicht ist es nützlich, noch zum Vergleich eine Hyperbel heranzuziehen. Wir legen durch y_0, $3{,}65\, y_0$ und $6{,}35\, y_0$ eine Hyperbel und bestimmen ihre Achsen. Sie sind $a = 18{,}53$, $b = 4{,}20$. Der Abstand des Schnittpunktes der Asymptoten von der Y-Achse der ersten Kurve ist $n = 19{,}05$, und ferner $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{b}{a} = 0{,}2267$. Der Winkel zwischen den Asymptoten ist also $2 \,.\, 12^0\,46' = 25^0\,32'$ für die gegebenen Verhältnisse. Eine Winkelöffnung von etwa $25^1/_2{}^0$ liefert also die Asymptoten aller derjenigen Hyperbeln, die der Kurve kleinsten Widerstandes innerhalb der gewählten Grenzen nahekommen, bei welchen also das Verhältnis der Höhe des vollen

Digitized by Google

Ovals zum Durchmesser sich wie $14{,}9 : 12{,}7 = 1{,}173 : 1$ verhält. Die Komponente für das Hyperboloid ist

$$W_h = \pi b^2 \sin\varepsilon \left\{ \frac{x}{a}\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - \cos\varepsilon^2} - \sin\varepsilon + \cos\varepsilon^2 \, ln \frac{\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - \cos\varepsilon^2}}{1 + \sin\varepsilon} \right\}$$

und gibt nahe dasselbe Resultat wie das für den Körper kleinsten Widerstandes.

Die Unterschiede zwischen Hyperbel und Parabel sind gering, die Rechnung für die Parabel ist aber, wie man an der letzten Formel erkennt, bei weitem einfacher. Inwieweit aber die Rechnungsresultate mit den wirklichen Verhältnissen der Strömung beim scharfen Schusse übereinstimmen, läßt sich zurzeit nicht übersehen. Im allgemeinen aber werden vielleicht doch die Verschiedenheiten nicht allzu groß sein, so daß die vorgetragene Theorie mindestens für die praktischen Fälle ausreichen dürfte.

Ergänzungen zur ballistischen Hyperbeltheorie.

19. Ableitung einfacherer Zeitformeln.

In der Flugbahn als Hyperbel ist das Element der Zeit mit einem elliptischen Integral verknüpft, dessen Argument aus den übrigen Elementen zu berechnen ist. Die Tafel hiefür erleichtert wesentlich diese Rechnungen und gibt in kürzester Zeit die Lösung der Aufgabe. Trotzdem nehmen wir diese Zeitbestimmungen noch einmal auf, um, wenn möglich, noch einige einfache Formeln zu gewinnen, die unabhängig sind von den elliptischen Integralen und ohne Tafel zum Ziele führen. Es handelt sich also jetzt darum, das Argument u in den früheren Funktionen auszuschalten und die damit verknüpften Reihen zu umgehen. Besonders wünschenswert ist die Entwicklung einer einfachen Formel für die Flugzeit bis zum Scheitel und von da bis zum Ende der Flugbahn.

Wir fanden als sehr einfache Formel die Flugzeit für die horizontale Wurfweite gegeben durch

$$T = \frac{\sqrt{\frac{8}{g} W \operatorname{tg}\alpha}}{1 + \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}}} \left(1 - \frac{1}{20}\lambda^2\right),$$

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\cos\varphi_e}{\cos\varphi_0}, \quad W = \frac{2 v_0^2 \sin\alpha^2}{g \operatorname{tg}\beta}(1-\lambda), \quad \lambda = \sin\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_e)^2.$$

$$T = \frac{4 v_0 \sin\alpha \cos\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_e)\sqrt{\cos\varphi_0}}{g\left(\sqrt{\cos\varphi_0} + \sqrt{\cos\varphi_e}\right)} \cdot i, \quad i = 1 - \frac{1}{20}\lambda^2.$$

Digitized by Google

Den variablen Faktor i, der von 1 kaum verschieden ist, werden wir gleich genauer zu bestimmen haben, da er von dem Orte des Geschosses in der Flugbahn abhängt. Die Grundgleichung der Zeit ist

$$n t = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos\varphi}} - \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos\varphi}} = u_0 - u,$$

$$n = \frac{U_0}{3 v_0}\left[4m(1+m)\right]^{\frac{1}{4}}, \quad m = \operatorname{cotg}^2 \varphi_0, \quad k = \frac{4 U_0}{3 g},$$

$$k \sin\alpha = 2 \operatorname{tg}\varphi_0 \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_e), \quad n = \frac{g \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_e)}{v_0 \sin\alpha \sqrt{2\cos\varphi_0}}.$$

Es ist also

$$n T = u_0 - u_e = \frac{2\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_e)}{\sqrt{\cos\varphi_0} + \sqrt{\cos\varphi_e}}\, i.$$

Wir führen nun ein

$$u_1 = n T = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{2\cos\varphi_1}},$$

und suchen eine Beziehung von φ_1 zu φ_0 und φ_e und damit zum Integral für t. Zunächst ist

$$\int \frac{d\varphi_0}{\sqrt{\cos\varphi_0}} - \int \frac{d\varphi_e}{\sqrt{\cos\varphi_e}} = \int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{\cos\varphi_1}}.$$

Die Theorie der elliptischen Integrale geben in ihren Transformationen (siehe Schloemilch II) u. a. die Relationen

$$F_\varphi + F_\psi = F_\sigma,$$

$$\Delta_\varphi + \Delta_\psi = \frac{\Delta_\sigma + 1}{\sin\sigma}\sin(\varphi + \psi).$$

Wenden wir diese auf die obige Integralformel an und bemerken, daß $\cos\varphi = 1 - 2\sin\frac{1}{2}\varphi^2$, so folgt unter Beachtung der Vorzeichen

$$\sqrt{\cos\varphi_0} + \sqrt{\cos\varphi_e} = \frac{\sqrt{\cos\varphi_1} + 1}{\sin\frac{1}{2}\varphi_1}\sin\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_e),$$

Digitized by Google

woraus

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_0-\varphi_e)}{\sqrt{\cos\varphi_0}+\sqrt{\cos\varphi_e}}=\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi_1}{\sqrt{\cos\varphi_1}+1}.$$

Nach Umformung des letzten Ausdruckes folgt

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_0-\varphi_e)}{\sqrt{\cos\varphi_0}+\sqrt{\cos\varphi_e}}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{\cos\varphi_1}}{1+\sqrt{\cos\varphi_1}}},$$

und dies ist die gesuchte Beziehung zwischen $\varphi_0\,\varphi_e\,\varphi_1$. Setzen wir sie ein in den Ausdruck für u_0-u_e, so folgt

$$u_1=u_0-u_e=2\sqrt{\frac{1-\sqrt{\cos\varphi_1}}{1+\sqrt{\cos\varphi_1}}}\,.\,i.$$

Diese Formeln gelten allgemein für alle Werte von φ. Aus

$$u_1=2\sqrt{\frac{1-\sqrt{\cos\varphi_1}}{1+\sqrt{\cos\varphi_1}}}\,.\,i$$

ergibt sich die Möglichkeit, i zu berechnen. Demzufolge benützen wir $\cos\varphi=\cos\Theta^2$, $\cos\Theta=1-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{8}u^4\ldots$ und erhalten

$$u_1=i\,u_1\sqrt{\frac{1-\frac{1}{4}u_1^2+\frac{3}{40}u_1^4\ldots}{1-\frac{1}{2}u_1^2+\frac{1}{16}u_1^4\ldots}},$$

woraus

$$i=\sqrt{1-\frac{u_1^4}{80}+\frac{u_1^8}{19200}\cdots}=1-\frac{u_1^4}{160}+\frac{u_1^8}{153600},$$

und damit gewinnen wir wegen $u_1=u_0-u_e$ die allgemeinere Funktion

$$u_0-u=\frac{2\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}(\varphi_0-\varphi)}{\sqrt{\cos\varphi_0}+\sqrt{\cos\varphi}}\left(1-\frac{(u_0-u)^4}{160}+\frac{(u_0-u)^8}{153600}\cdots\right);$$

wo u für u_e geschrieben ist. Da nun $n\,t=u_0-u$, so erhalten wir nach Umkehrung der Reihe die allgemeine Flugzeitformel

Digitized by Google

$$t = 4 v_0 \sin\alpha \cot\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_e) \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi)}{1 + \sqrt{\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_0}}} \left\{ 1 - \frac{2\sin\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi)^4}{(\sqrt{\cos\varphi_0} + \sqrt{\cos\varphi})^4} + \cdots \right\},$$

die uns der Mühe überhebt, die Konstanten der elliptischen Funktionen zu berechnen.

Das Korrektionsglied ist immer sehr klein und hat nur Einfluß auf die zweite Dezimale der Zeit. Für $\varphi = \varphi_e$ erhält man die Formel für T:

$$T = \frac{\sqrt{\frac{8W \operatorname{tg}\alpha}{g}}}{1 + \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}}} \left(1 - \frac{2\lambda^2}{5(\sqrt{\cos\varphi_0} + \sqrt{\cos\varphi_e})^4} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3} \frac{\lambda^4}{(\sqrt{\cos\varphi_0} + \sqrt{\cos\varphi_e})^8} \cdots \right),$$

wo der Klammerausdruck von $1 - \frac{1}{20}\lambda^2$ kaum verschieden ist.

Um festzustellen, welchen Einfluß das Korrektionsglied bei kleineren Flugzeiten ausübt, wählen wir wieder die Flugbahn für $v_0 = 600\,m$, $\alpha = 45^0$, $W = 10544\,m$ etc. und wollen hiefür die Flugzeit bis zum Scheitel berechnen. Wir haben nach früheren Ermittlungen

$$\varphi_0 = 65^0 31' 50'', \quad \varphi_e = 0, \quad \varphi_s = 40^0 3' 37''$$

wo

$$\sin\varphi_s = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi_e)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_e)} \cdot \qquad \varphi = \varphi_s.$$

Das Korrektionsglied in der Formel für t ist hiernach 0,000178 und also so klein, daß es auf die zweite Dezimale der Zeit keinen Einfluß hat. Die Formel kommt also fast einem geschlossenen Ausdruck nahe.

Zur Prüfung der oben gefundenen Reihe für $u_0 - u$ setzen wir darin $u = 0$ und erhalten

$$u = \frac{2\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}\varphi}{1 + \sqrt{\cos\varphi}} \left(1 - \frac{u^4}{160} + \frac{u^8}{153600} \cdots \right).$$

Wir wählen $\varphi = 90^0$, also $u = K = 1{,}8540$ und erhalten

$$u = 2\,(1 - 0{,}07384 + 0{,}00090 - 0{,}00005 + \cdots) = 1{,}8541.$$

Digitized by Google

Wir lösen noch folgende Aufgabe:

Die Flugbahn für $v_0 = 548\ m$, $\alpha = 18^0 2'$, $W = 10338\ m$ sei gegeben und $\varphi_0 = 46^0 15' 30''$. φ_e werde $= 0$ angenommen. Es soll für die horizontale Schußdistanz $x = 5832{,}3\ m$ die Flugzeit ermittelt werden. Vermöge

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi_0 - (\operatorname{tg} \varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi_e) \frac{x}{W}$$

erhalten wir

$$\varphi = 24^0 29' 7'', \quad \frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi) = 10^0 53' 12'';$$

$$\sqrt{\cos \varphi_0} = 0{,}83151, \quad \sqrt{\cos \varphi} = 0{,}95397,$$

und damit

$$t = 13{,}973 \text{ Sekunden}.$$

Wir können diese Zahl auf ihre Richtigkeit prüfen. Im Abschnitt 37 betreffend die Flugbahn als Schallquelle haben wir diese Aufgabe schon behandelt und fanden dort durch ein Näherungsverfahren $t = 13{,}98$. Der Unterschied $0{,}007^s$ kommt also kaum in Betracht. Die Korrektion im Ausdruck für t hat hier nur auf die vierte Dezimale Einfluß, kommt also ganz in Wegfall.

Berichtigung. Auf Seite 231 unserer ballistischen Abhandlung im XV. Jahrgang dieser Zeitschrift muß das größere Wurzelzeichen in t_s gestrichen werden (siehe S. 193 unten).

Bemerkung. Berechnet man für $u_0 - u = u_1 = nt$, wenn φ_0 und φ gegeben, die Formeln

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi' = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi_0 \sqrt{\cos \varphi}, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi'' = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi \sqrt{\cos \varphi_0},$$

so liefert $\varphi' - \varphi''$ das Argument u_1 aus der Tabelle für u und die Zeit t ergibt sich aus $t = \frac{u_1}{n}$.

Außer der Formel für die Flugzeit bis zur Wurfweite kommen besonders noch diejenigen für den Scheitelpunkt und für den absteigenden Ast der Kurve in Frage, weshalb wir sie hier noch ableiten wollen. Die grundlegenden Gleichungen sind

$$n t_s = u_0 - u_s, \quad n t_e = u_s - u_e,$$

$$u_0 - u_s = \frac{2\sqrt{2} \sin \frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_s)}{\sqrt{\cos \varphi_0} + \sqrt{\cos \varphi_s}}, \quad u_s - u_e = \frac{2\sqrt{2} \sin \frac{1}{2}(\varphi_s - \varphi_e)}{\sqrt{\cos \varphi_s} + \sqrt{\cos \varphi_e}}.$$

Digitized by Google

Die Zeit bis zum Scheitel folgt also aus

$$t_s = \frac{v_0 \sin\alpha \sqrt{2\cos\varphi_0}}{g \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_e)} \cdot \frac{2\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_s)}{\sqrt{\cos\varphi_0} + \sqrt{\cos\varphi_s}}$$

und ist eine Funktion von $\varphi_0\, \varphi_e\, \varphi_s$, die wir aber jetzt durch andere und bequemere ersetzen wollen. Dazu benützen wir

$$\sin\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_e) = \sqrt{\lambda}, \quad \cos\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_e) = \sqrt{1-\lambda}, \quad \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\cos\varphi_e}{\cos\varphi_0},$$

$$\cos\varphi_s = \frac{\sqrt{\cos\varphi_0 \cos\varphi_e}}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_e)} \sin\varphi_s = \sin\varphi_0 \left(1 - \frac{1}{2} m k \sin\alpha\right),$$

$$\cos^2\varphi_0 = \frac{1}{1+m}, \quad \sin^2\varphi_0 = \frac{1}{1+m}.$$

Nun ist wegen

$$\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_s) = \sqrt{1 - \cos\varphi_0\cos\varphi_s - \sin\varphi_0\sin\varphi_s},$$

$$t_s = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} 2\sqrt{\frac{2(1-\lambda)}{\lambda}} \frac{\sqrt{1 - \cos\varphi_0\cos\varphi_s - \sin\varphi_0\sin\varphi_s}}{1 + \sqrt{\frac{\cos\varphi_s}{\cos\varphi_0}}},$$

und nach Einführung von $\sin\varphi_s$ nach einigen Umformungen

$$t_s = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} \sqrt{\frac{2m(1-\lambda)}{(1+m)\lambda}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{2} k \sin\alpha - \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}}}{1 + \sqrt[4]{\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha(1-\lambda)}}}.$$

Vermöge

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = 1 - 2\lambda + k\sin\alpha(1-\lambda)$$

läßt sich k aus der Formel wegschaffen, und nach einigen weiteren Vereinfachungen resultiert endlich

$$t_s = \frac{4 v_0 \sin\alpha}{g\left(1 + \sqrt[4]{\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha(1-\lambda)}}\right)\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha(1-\lambda)} + 2\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha(1-\lambda)}} + \frac{1}{1-\lambda}}}.$$

Digitized by Google

Legen wir wieder unter $v_0 = 600$, $\alpha = 45^0$ etc., so folgt $t_s = 24{,}638$ Sekunden. Die genaue Rechnung liefert $24{,}633^s$ (Differenz $0{,}005^s$).

Die obige Formel ist noch verhältnismäßig einfach, so daß sie sich ungezwungen und ohne elliptische Integrale den früheren anschließt. Dabei kann man setzen

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha(1-\lambda)} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{gW}.$$

Nach derselben Methode erhält man die Zeit vom Scheitel bis zur Wurfweite:

$$t_e = \frac{4 v_0 \sin\alpha}{g\left(1+\sqrt[4]{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta(1-\lambda)}}\right)\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha(1-\lambda)}+2\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha(1-\lambda)}}+\frac{1}{1-\lambda}}}.$$

Das Verhältnis beider Scheitelzeiten ist also sehr einfach

$$\frac{t_e}{t_s} = \frac{1+\sqrt[4]{\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha(1-\lambda)}}}{1+\sqrt[4]{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta(1-\lambda)}}}.$$

Da nun $t_s = 24{,}638$, so ist $t_e = 31{,}004$ anstatt des genauern Wertes 30,989, wonach eine Differenz von nur $0{,}015^s$ vorliegt.

Die ganze Flugzeit bis zur Wurfweite ist also $T = 55{,}64$, die um 0,02 Sekunden größer ist als die genau berechnete. Praktisch haben diese Unterschiede wenig Bedeutung.

Die Addition der beiden Ausdrücke liefert noch eine neue Formel für die Flugzeit T.

Die Scheiteldistanzen vom Anfang und Ende der horizontalen Flugbahn sind noch wegen $X + X_1 = W$

$$X_s = \frac{W\cos\varphi_e \sin(\varphi_0-\varphi_s)}{\cos\varphi_s \sin(\varphi_0-\varphi_e)}, \quad X_e = \frac{W\cos\varphi_0 \sin(\varphi_s-\varphi_e)}{\cos\varphi_s \sin(\varphi_0-\varphi_e)},$$

woraus

$$\frac{X_s}{X_e} = \frac{\cos\varphi_e}{\cos\varphi_0}\cdot\frac{\sin(\varphi_0-\varphi_s)}{\sin(\varphi_s-\varphi_e)}, \quad \sin\varphi_s = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_0+\varphi_e)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_0-\varphi_e)}.$$

Die Scheitelgeschwindigkeit ist

$$v_s = v_0\cos\alpha\left(\frac{gW}{v_0^2\sin 2\alpha}\right)^{3/4}.$$

Digitized by Google

Die allgemeine Gleichung für t zeigt, daß das zugehörige φ aus gegebenem t und damit x aus

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi_0 - (\operatorname{tg}\varphi_0 - \operatorname{tg}\varphi_e)\frac{x}{W}$$

leicht zu berechnen ist. Die oben entwickelten Formeln bilden also noch einige nützliche Erweiterungen und Vereinfachungen unserer früheren ballistischen Formeln.

Für praktische Fälle, bei welchen es darauf ankommt, möglichst rasch aus der Erhöhung und der Wurfweite die Flugzeit zu berechnen, kann man mit praktisch hinlänglicher Genauigkeit sich der Formel

$$T = \sqrt{\frac{W}{4}\operatorname{tg}\alpha}$$

bedienen, wenn eine Tangententafel zur Verfügung steht. So ist z. B., wenn $W = 4000$, $\alpha = 8^0 34'$, $T = 12{,}27$ statt 12,24 der Tafel.

Ebenso kann annähernd aus

$$W = \frac{4T^2}{\operatorname{tg}\alpha}$$

aus Flugzeit und Erhöhung die horizontale Wurfweite ermittelt werden.

20. Spezielle Fälle der ballistischen Hyperbel.

Wenn über den Wert von m in der Beschleunigungsformel des Luftwiderstandes

$$U\cos\tau = U_0\cos\alpha\sqrt{\left(1+m\right)\left(\frac{v_x}{v_0\cos\alpha}\right)^{4/3} - m\left(\frac{v_x}{v_0\cos\alpha}\right)^{8/3}}$$

nichts weiteres bekannt ist, so müssen außer v_0 immer noch drei Bestimmungsdaten der Flugbahn gegeben sein, etwa α, W, T, um die übrigen berechnen zu können. Hat man aber über m, dessen Wert zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 schwankt, eine bestimmte, den Flugbahnverhältnissen gemäße Annahme gemacht, die einer größeren Serie von α genügt, so bedarf es nur der Kenntnis von α und W. Da nämlich

$$m = \frac{4\lambda}{(1-\lambda)k^2\sin\alpha^2},\quad \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = 1 - 2\lambda + (1-\lambda)k\sin\alpha,$$

so ist auch

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = 1 - 2\lambda + \sqrt{\frac{4\lambda(1-\lambda)}{m}},$$

Digitized by Google

und wegen $$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g\,W}(1-\lambda)$$

nach Gleichsetzen beider Glieder und Auflösen nach λ

$$\lambda = 1 - \frac{m}{2(1+m) - m\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g\,W} - 2\sqrt{1 - m\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g\,W} + m}}.$$

Bei gegebenem oder ermitteltem m ist also λ und damit auch β und

$$v_e \cos\beta = v_0 \cos\alpha \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right)^{3/2}, \quad T = \frac{\sqrt{\frac{8}{g}\,W \operatorname{tg}\alpha}}{1+\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}}}\left(1 - \frac{1}{20}\lambda^2\right)$$

bekannt. Solange also innerhalb eines gewissen Intervalls m als nahezu konstant angenommen werden kann, ist λ aus der obigen Formel zu berechnen.

Aus den beiden Ausgangsdaten v_0 und α die übrigen Elemente, wie W, T, β, v_e abzuleiten, ist unmöglich. Es bedarf hierzu immer noch eines dritten Bestimmungsstückes, um die Aufgabe vollständig lösen zu können. Mit anderen Methoden steht es übrigens nicht viel besser. Die mit der Höhe wechselnde Dichte der Luftschichten ist hier wesentlich mit Ursache der Unsicherheit der Rechnung.

Je nach den verschieden zu Grunde gelegten Theorien und Rechnungsmethoden erhält man entsprechend verschiedene Resultate. Unter Umständen kann es nützlich sein, deren Unterschiede festzustellen, um die Grenzen des Anwendungsbezirkes der zu Grunde gelegten Theorien zu erfahren. Die Kruppsche Gußstahlfabrik benützt, wie es scheint, vielfach das quadratische Gesetz. Siaccis Tafeln sind hervorgegangen aus den Daten empirischer Versuche und umfassen alle Widerstandsgesetze, während wir die Hyperbel als Mittellinie benützen.

Wir wollen im folgenden die Data einer Kruppschen Schußtafel für einen einzelnen Fall nach Siaccis und unserer Methode berechnen und miteinander vergleichen. Wir wählen als feste Ausgangspunkte v_0, α und T und bestimmen hiernach W, β, v_e und y in der Schußweite W.

7,5 *cm* Schnellade-Feldkanone *L*/28/30.
Geschoßgewicht 6,5 *kg*.

	$v_{0(m)}$	α	T	$W_{(m)}$	β	v_e	$y_{(m)}$
Krupp	500	16° 27′	21,25	6000	25° 47′	226	0,0
Siacci	500	16° 27′	21,25	6050	25° 9′	235	— 1,0
Hyperbel	500	16° 27′	21,25	6000	26° 43′	241	0,0

Digitized by Google

Die Werte der zweiten Reihe ermittelten wir aus den Ausgangsdaten $U = 500$, $u = 221{,}8$ und den entsprechenden Tafelwerten

D	J	A	T	u
8990	1,15771	2983,52	19,211	221,8
4928	0,21297	636,20	5,524	500,0

Zur Berechnung von

$$\frac{\delta i \beta}{C} = 1000 \left(\frac{\delta}{1{,}206}\right) . i \beta \frac{a^2}{p}$$

haben wir angenommen $a = 0{,}075\ m$, $p = 6{,}5\ kg$ $\frac{\delta}{1{,}206} = 0{,}94$, $\beta = 0{,}95$, $i = 0{,}8592$, wonach $\frac{\delta i \beta}{C} = 0{,}6714$.

Diese Werte haben wir deshalb gewählt, um möglichste Übereinstimmung der Tafelwerte mit denjenigen Krupps und der Hyperbel herbeizuführen.

Also bei gleicher Anfangsgeschwindigkeit, gleichem Abgangswinkel und gleicher Flugzeit überschreitet Siaccis Flugbahn die anderen um 50 m. Sein Fallwinkel ist kleiner und seine Endgeschwindigkeit hält ungefähr die Mitte der anderen. Daß seine Kurve bei $x = 6050\ m$ rund 1 m unter der Horizontalen liegt, ist hier ziemlich belanglos. Unser v_e ist 6 m größer, also noch annehmbar, da die sonst noch verbleibenden Differenzen bei den anderen Elementen sich ebenfalls in den zulässigen Grenzen halten.

Die Größe λ, die den Winkel der zweiten Asymptote gegen die Horizontale bedingt und für jede Flugbahn ihren besonderen Wert hat, läßt sich am sichersten aus W und T berechnen. Aus

$$A = \frac{4 v_0 \sin \alpha}{g T}, \quad B = \sqrt{\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g W}}, \quad \lambda_0 = 1 - \frac{1}{(A-B)^2},$$

$$\varepsilon = \frac{A \lambda_0}{10 (A-B)^3}$$

läßt sich dann, wie leicht nachzuweisen ist, der genauere Ausdruck aus

$$\lambda = \lambda_0 . \frac{1+\varepsilon}{1+2\varepsilon}$$

bald ermitteln. Wir geben noch eine Anwendung der Formeln auf die

Deutsche Feldkanone C/96, $v_0 = 465\ m$

für die Schußweite $W = 4000\ m$. Der Schußtafel entnehmen wir

W	α	β	T	v_e
4000	9°30′	13°30′	13,7″	257 m

und wollen β und v_e aus unseren Formeln berechnen.

Digitized by Google

Zunächst haben wir $A = 2{,}41722$, $B = 1{,}32661$, $\lambda_0 = 0{,}15926$, $\varepsilon = 0{,}02967$ und damit $\lambda = 0{,}1548$ als Richtungskoeffizient der Asymptote. Die Formeln

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{gW}(1-\lambda), \quad v_e = \frac{1}{\sin\beta}\sqrt{\frac{gW\operatorname{tg}\alpha}{2(1-\lambda)}}, \quad \frac{v_e\cos\beta}{v_0\cos\alpha} = \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right)^{3/2}$$

liefern

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = 1{,}48746, \quad \beta = 13^0\,58'40'', \quad v_e = 260{,}5\ m.$$

Unser β oder der errechnete Fallwinkel ist also um 28'40'' und v_e um 3,5 m größer als der Tafelwert.

Aus

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = 1 - 2\lambda + (1-\lambda)\,k\sin\alpha, \quad m = \frac{4\lambda}{(1-\lambda)\,k^2\sin\alpha^2}$$

folgt ferner

$$k\sin\alpha = 0{,}94297, \quad m = 0{,}82389.$$

Mittels dieser Werte können wir die Flugzeit T u. a. aus

$$nT = u_0 - u_e$$

berechnen und mit der Tafelziffer vergleichen. Aus

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{m}}, \quad \sin\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_e) = \sqrt{\lambda}$$

gewinnen wir

$$\varphi_0 = 47^0\,46'\,13'', \quad \varphi_e = 1^0\,25'\,55''$$

Unsere Tabelle für die Flugzeiten gibt hierfür

$$u_0 = 0{,}6286, \quad u_e = 0{,}0176.$$

Vermöge

$$n = \frac{g\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_e)}{v_0\sin\alpha\sqrt{2\cos\varphi_0}} = \frac{1}{20{,}791}$$

erhalten wir schließlich

$$T = 20{,}791\,.\,0{,}6110 = 12{,}70 \text{ Sekunden}$$

wie oben. Die Widerstandsformel für den vorliegenden Schuß

$$U\cos\tau = U_0\cos\alpha\sqrt{1{,}8239\left(\frac{v}{500}\right)^{2/3} - 0{,}8239\left(\frac{v}{500}\right)^{4/3}}$$

entspricht hinreichend genau den ermittelten Tafelwerten.

Digitized by Google

Innerhalb der Zone der Flugbahnweiten von 3000 bis 5000 m kann man $m = 0{,}8239$ als nahe konstant annehmen und aus den gemessenen α und W die übrigen Elemente berechnen und T mit der beobachteten vergleichen. Es empfiehlt sich, die λ-Werte durch eine Kurve zu verbinden. Man bemerke auch, daß φ_e der Null nahe ist. Setzen wir φ_e geradezu $=$ Null, so liefern die früheren Formeln

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{8gW}{v_0^2 \sin 2\alpha}} - 1\right) = 0{,}67745, \quad \lambda = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right),$$

$$T = \frac{\sqrt{\frac{8W}{g}\operatorname{tg}\alpha}}{1+\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}}}\left(1 - \frac{1}{20}\lambda^2\right) = 12{,}68^s,$$

also für T fast den früheren Wert.

Bei größeren Flugbahnen kann man also unbedenklich $\varphi_e = 0$ setzen. Wir bestimmen noch rechnerisch die Scheitelwerte der Flugbahn von 4000 m. Aus

$$\sin\varphi_s = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi_e)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_e)}$$

folgt $\varphi_s = 26^0 55' 30''$ und die Tabelle gibt $u = 0{,}3386$, also

$$t_s = 20{,}791 \,.\, 0{,}2900 = 6{,}03^s$$
$$t_e = \qquad\qquad 6{,}67^s,$$

welche Werte auch aus den entwickelten folgen.

Die Scheiteldistanzen und die Scheitelhöhe sind

$$X_s = 2206{,}1, \quad X_e = 1793{,}9, \quad Y = 210{,}5\ m$$

und die Scheitelgeschwindigkeit

$$v_s = v_0 \cos\alpha\,(1-\lambda)^{3/4}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right)^{3/4} = v_0\cos\alpha\left(\frac{gW}{v_0^2\sin 2\alpha}\right)^{3/4} = 300{,}1\ m.$$

Will man noch die Art und die Größe der kleinsten Geschwindigkeit wissen, so ergeben sich diese aus

$$v\cos\tau = v_0\cos\alpha\left(\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi}\right)^{3/2}, \quad \operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha - \frac{2}{mk\cos\alpha}\left(1 - \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\right).$$

Die Bedingungsgleichung

$$\operatorname{tg}\tau^3 - \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{2\lambda}\operatorname{tg}\tau^2 + \left(3 + \frac{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\lambda}\right)\operatorname{tg}\tau + \frac{3(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha)}{2\lambda} = 0$$

Digitized by Google

liefert in der negativen Wurzel $\operatorname{tg}\tau = -0{,}21705$ den Tangentenwinkel jenes Ortes und mittels

$$\frac{\operatorname{tg}\tau}{\operatorname{tg}\alpha} = 1 - \frac{\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} - 1 + 2\lambda}{2\lambda}\left(1 - \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\right)$$

die Amplitude $\varphi = 4^0 34' 36''$ und endlich auch $v = 259{,}8\ m$. Da $v_e = 260{,}5\ m$ ist, so befindet sich der Ort kleinster Geschwindigkeit in der Nähe der horizontalen Wurfweite. Von da an nimmt die Geschwindigkeit unendlich zu.

21. Die Kopfwellen beim scharfen Schuß.

Wir kommen noch einmal auf die Begleiterscheinungen beim Schuß, die Kopfwellen, zurück, um die Theorie etwas zu vereinfachen und zu verallgemeinern.

Statt der früher benützten Formel für die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{dt} = s\sqrt{1 + \frac{c^2 \cot\tau_0^2}{(r+c)^2}}$$

worin s die Schallgeschwindigkeit, r der Radius der Kugelwelle zur Zeit t, τ_0 ein Grenzwinkel und c eine Konstante bezeichnet, benützen wir jetzt die folgende

$$v = \frac{dr}{dt} = s\sqrt{1 + \cot\tau_0^2\, e^{-nr}},$$

die einfacher ist und dasselbe leistet. n ist aus den Versuchen zu bestimmen, die wir Machs Untersuchungen der Funkenwellen verdanken. Aus dem Integral

$$t = \int \frac{dr}{s\sqrt{1 + \cot\tau_0^2\, e^{-nr}}}$$

erhalten wir

$$nst = ln f \frac{\sqrt{1 + \cot\tau_0^2\, e^{-nr}} + 1}{\sqrt{1 + \cot\tau_0^2\, e^{-nr}} - 1}, \quad f = \frac{1 - \sin\tau_0}{1 + \sin\tau_0}$$

und hieraus nach einigen Umformungen

$$\frac{2\sin\tau_0}{1+\sin\tau_0}\, e^{\frac{nr}{2}} = e^{+\frac{nst}{2}} - \frac{1-\sin\tau_0}{1+\sin\tau_0}\, e^{-\frac{nst}{2}},$$

$$\frac{1-\sin\tau_0}{1+\sin\tau_0} = \frac{1 - e^{-\frac{n}{2}(r-st)}}{1 - e^{-\frac{n}{2}(r+st)}} = \frac{1 - e^{-\frac{n}{2}(r'-st')}}{1 - e^{-\frac{n}{2}(r'+st')}}.$$

Digitized by Google

Die Beobachtungen geben nun, wie die nachstehende Tabelle zeigt, für die Abstände r, r' etc. die entsprechenden Zeiten t, t' etc. der Wellenbewegung. Aus zwei Gleichungen lassen sich also n und τ_0 berechnen, und zwar aus

Machs Tabelle

über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Explosionswellen

Abstand (m)	Zeit (Sek.)	Mittlere Geschwindigkeit
0,080	0,000106	756
0,137	0,000235	583
0,254	0,000560	453
0,400	0,000960	416
0,977	0,002621	373

Die Ausdrücke $r \mp st$ in der letzten Gleichung sind leicht zu berechnen, wenn s bekannt ist. Wählen wir zuerst $s = 333{,}3\ m$ und benützen die Zahlen der ersten und vierten Beobachtung, dann ist

$$\frac{1 - \sin\tau_0}{1 + \sin\tau_0} = \frac{1 - e^{-n.0{,}02233}}{1 - e^{-n.0{,}05766}} = \frac{1 - e^{-n.0{,}04}}{1 - e^{-n.0{,}36}}.$$

Die Auflösung ergibt $n = 18$ und $f = 0{,}513$ bezw. $0{,}514$, also

$$\sin\tau_0 = 0{,}3213,\quad \tau_0 = 18^0 45' \text{ für } f = 0{,}5135.$$

Wir haben also

$$(1 - f)\, e^{\frac{nr}{2}} = e^{\frac{nst}{2}} - f\, e^{-\frac{nst}{2}},$$

und

$$0{,}4865\, e^{9r} = e^{9st} - 0{,}5135\, e^{-9st},$$

$$0{,}4865\, e^{9r} = e^{3000t} - 0{,}5135\, e^{-3000t}.$$

Für jedes t läßt sich also das entsprechende r berechnen.

Das Resultat ergibt

$r =$	0,080	0,143	0,264	0,400	0,954
Diff.	0,000	− 0,006	− 0,008	0,000	+ 0,023.

Für $n = 18$ und $s = 340$ ergeben sich die Werte

$r =$	0,077	0,139	0,260	0,400	0,964
Diff.	0,003	− 0,002	− 0,006	0,000	0,013,

welchen entsprechen

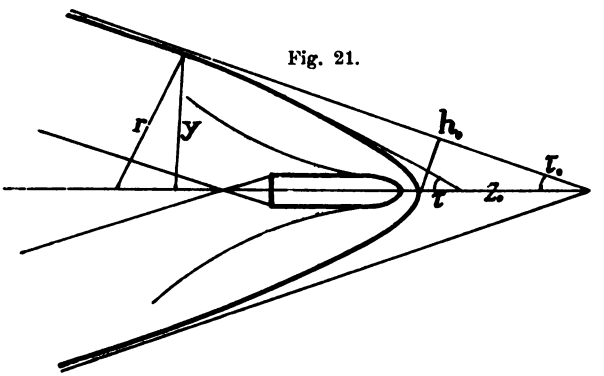
$$f = 0{,}4839,\quad \sin\tau_0 = 0{,}3478,\quad \tau_0 = 20^0 21'.$$

Andere Annahmen über n und s lassen möglicherweise noch größere Annäherungen der Formelwerte an die Versuchsdata zu. Wir lassen es bei dem letzten Ausdrucke bewenden, da im all-

Digitized by Google

gemeinen die Formel die Machschen Resultate für unsere Zwecke hinreichend genau wiedergibt. Die Figur 17 gibt eine Anschauung über den Verlauf der Bewegung der Luftverdichtung am Geschoßkörper, wie ihn die Lichtbilder im allgemeinen zeigen. Die Geschoßspitze ist der Mittelpunkt der konzentrischen Funkenwellen, von dem sich die Fortpflanzungswellen mit abnehmender Dichte und Geschwindigkeit ausbreiten. Der an der Geschoßspitze sich entwickelnde unendlich kleine Kreis hat sich nach der Zeit t zu einem solchen vom Radius r ausgebildet, dessen radiale Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch die obige Gleichung gegeben ist,

Fig. 21.



wobei wir voraussetzen, daß die Geschoßspitze die Luft nach gleichem Gesetz wie der elektrische Funke in Bewegung setzt. Die Figur liefert die Beziehung

$$r^2 = (v_0 t - x)^2 + y^2.$$

Die Einhüllende aller Kugelwellen verlangt die Ableitung

$$r \frac{dr}{dt} = (v_0 t - x) v_0,$$

woraus

$$x = v_0 t - \frac{r}{v_0} \frac{dr}{dt},$$

$$y^2 = r^2 - \frac{r^2}{v_0^2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

folgt. Hieraus ergibt sich weiter unter Benützung der ersten Hauptformel

$$y^2 = r^2 \cos \tau_0^2 (1 - e^{-nr}),$$

$$y = r \cos \tau_0 \sqrt{1 - e^{-nr}}.$$

Digitized by Google

Da nun $y = r\cos\tau$, wo τ der Tangentenwinkel, so haben wir

$$\operatorname{tg}\tau = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2\tau_0 + e^{-nr}}{1 - e^{-nr}}}, \quad \cos\tau = \cos\tau_0 \sqrt{1 - e^{-nr}}.$$

τ_0 ist der halbe Asymptotenwinkel der einhüllenden Kurve.

Das Zeitintegral läßt sich noch schreiben

$$e^{\frac{n}{2}(r-st)} = \frac{1 + \sin\tau_0}{2\sin\tau_0} - \frac{1 + \sin\tau_0}{2\sin\tau_0} e^{-nst}.$$

Die Tangente schneidet die X-Achse in einem Punkte, der vom Scheitel der Kurve die Entfernung z hat. Dann ist

$$r = (v_0 t + z)\sin\tau.$$

Der Abstand des Scheitels von der Tangente ist also

$$h = z\sin\tau.$$

Da nun

$$\sin\tau = \sin\tau_0 (1 + \cot\tau_0^2 e^{-nz})^{\frac{1}{2}},$$

so folgt

$$z\sin\tau_0 = \frac{r}{\sqrt{1 + \cot\tau_0^2 e^{-nr}}} - st.$$

Für $r = \infty$ erhalten wir hieraus zunächst

$$z_0 = \frac{r - st}{\sin\tau_0}$$

und nach der obigen Formel weiter bei gleicher Grenze

$$r - st = \frac{2}{n} ln \frac{1 + \sin\tau_0}{2\sin\tau_0}.$$

Der Abstand des Schnittpunktes beider Asymptoten vom Scheitel der einhüllenden Kurve ist damit

$$z_0 = \frac{2}{n\sin\tau_0} ln \frac{1 + \sin\tau_0}{2\sin\tau_0}$$

und der Abstand des Scheitels von den Asymptoten ist

$$h_0 = z_0 \sin\tau_0 = \frac{2}{n} ln \frac{1 + \sin\tau_0}{2\sin\tau_0}.$$

Wenden wir diese Formeln an auf den obigen ersten Rechnungsfall mit $\sin\tau_0 = 0{,}3215$, so erhalten wir

$$z_0 = 0{,}25\ m, \quad v_0 = 333 : \sin\tau_0 = 1040\ m,$$

Digitized by Google

während der zweite mit $\sin \tau_0 = 0{,}3478$ liefert

$$z_0 = 0{,}218\ m, \quad v_0 = 977\ m, \quad h_0 = 0{,}076\ m.$$

Man kann also annehmen, daß die Funkenwellen im Zentrum eine Geschwindigkeit von rund 1000 m besaßen. Demnach würde also auch ein Geschoß von etwa $v_0 = 977\ m$ eine Kopfwelle, wie die in der Figur skizzierte, erzeugen, bei welcher der Schnittpunkt der Asymptote um 21,8 cm vom Scheitel entfernt ist.

Hat man aus einem Lichtbild der obigen Art den Asymptotenwinkel nebst z_0 ermittelt, so ergibt $v_0 = s : \sin \tau_0$ die Geschwindigkeit und

$$n = \frac{2}{z_0 \sin \tau_0} ln \frac{1 + \sin \tau_0}{2 \sin \tau_0} = \frac{2 v_0}{z_0 s} ln \frac{v_0 + s}{2 s}$$

die Größe der Exponenten für den vorliegenden Schuß. Ob n eine Konstante ist für alle Bewegungsverhältnisse dieser Bewegung, müßte erst aus verschiedenen Versuchen festgestellt werden. Im allgemeinen wird die Bewegung der Luftteilchen am fliegenden Geschosse derjenigen der Explosionswellen ähnlich sein.

Der Winkel τ_0 läßt sich am besten am Geschoßboden messen. Wenn $\tau_0 = 37\,^1/_2{}^0$, $s = 340\ m$, so wäre $v_0 = 530\ m$. Die Schenkel des Winkels im Schußkanal der Wirbelbewegung sind den Asymptoten parallel. Für $n = 18$ wird jetzt $z_0 = 0{,}042\ m$. Man bemerke noch die Formeln

$$v = \frac{s \sin \tau}{\sin \tau_0}, \quad v = v_0 \sin \tau, \quad r = h + vt.$$

Die Gleichung der asymptotischen Kurve läßt sich noch in Funktion der Zeit aufstellen.

Aus den Bestimmungsgleichungen erhält man leicht

$$x = v_0 t - r \sin \tau_0 \sqrt{1 + \cot \tau_0^2 e^{-nr}}, \quad y = r \cos \tau_0 \sqrt{1 - e^{-nr}},$$

worin r sich in Funktion von t und t in Funktion von r ausdrücken läßt. Ebenso kann die Ausbreitungsgeschwindigkeit $v_r = dr : dt$ in Funktion der Zeit dargestellt werden.

Je größer die Geschoßgeschwindigkeit ist, um so enger legen sich die Kopfwellen an das Geschoß an, während bei abnehmender Geschwindigkeit die einhüllenden Flächen mehr auseinandertreten. Sinkt sie unter die Schallgeschwindigkeit, so ist eine Kopfwellenbildung nicht mehr möglich, da alsdann die Schallwellen dem Geschosse vorauseilen.

Nachtrag.

Die Gleichungen für auf- und absteigende Gelände.

Bevor wir die Hyperbeltheorie schließen, möchten wir noch darauf hinweisen, daß auch der Ableitung der Formeln für schräge Wurfweiten sich keine große Schwierigkeiten entgegenstellen.

Digitized by Google

Es wird sich also empfehlen, diesen allgemeinsten Fall noch in Kürze zu behandeln.

Wir ziehen vom Anfangspunkte eine Gerade, die mit der Horizontalen einen Winkel γ (positiv nach oben gerechnet) macht und betrachten sie als X-Achse eines Koordinatensystems, das um den Winkel γ der Bodenerhebung gegen das ursprüngliche System gedreht ist und auf das wir den Hyperbelpunkt xy beziehen. Die Bewegungsgleichungen nehmen dann die folgende Form an:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{U\,dx}{ds} - g\sin\gamma, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{U\,dy}{ds} - g\cos\gamma,$$

aus welchen dann wie früher die Formeln für U, v, W, T etc. abzuleiten sind. Der Anfangswinkel α und der Fallwinkel β werden jetzt von der schrägen Wurfweite W an gemessen.

Es ist nun bemerkenswert, daß das Zeitintegral

$$t = \int \sqrt{-\frac{d^2y}{g\,dx^2}}\,\frac{dx}{\sqrt{\cos\gamma - \sin\gamma\,\mathrm{tg}\,\tau}}$$

sich wieder auf ein lemniskatisches zurückführen läßt.

Da indessen die Rechnungen etwas weitläufig ausfallen, so schreiben wir die Resultate hier gleich nieder. Die früheren Transformationen können übrigens hiefür wieder Verwendung finden. Das erste Gleichungssystem umfaßt die Formeln:

$$W = \frac{2v_0^2\sin\alpha^2}{g\,\mathrm{tg}\,\beta}(1-\lambda)\frac{\cos\alpha}{\cos(\gamma+\alpha)}, \quad \frac{v_e^2}{v_0^2} = \frac{\sin\alpha^2}{\sin\beta^2}\frac{\cos(\gamma-\beta)}{\cos(\gamma+\alpha)},$$

$$U_0 = \frac{3v_0^2\cos\alpha}{2W}\left(1-(1-2\lambda)\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\beta}\right) - \frac{3g\sin\gamma}{2\cos\alpha}, \quad k = \frac{4U_0}{3g},$$

$$\frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha} = 1 - 2\lambda + (1-\lambda)(k\sin\alpha + 2\sin\gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha)\frac{\cos\alpha}{\cos(\gamma+\alpha)}.$$

Führen wir den mit x gegebenen Winkel φ ein, so lassen sich die Elemente der Flugbahn in Funktion dieses Winkels darstellen:

$$\frac{x}{W} = \frac{\frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha} - 1 + 2\lambda - \sqrt{4\lambda(1-\lambda)}\,.\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha} + \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\beta} - 2(1-2\lambda)} = \frac{\mathrm{tg}\,\varphi_0 - \mathrm{tg}\,\varphi}{\mathrm{tg}\,\varphi_0 - \mathrm{tg}\,\varphi_e}.$$

Für $\mathrm{tg}\,\varphi_0$ und $\mathrm{tg}\,\varphi_e$ gelten die früheren Werte nebst $\sin\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_e) = \sqrt{\lambda}$ und die Formeln für τ und v_x sind

Digitized by Google

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha - \frac{2}{2\lambda}(\operatorname{tg}\beta - [1-2\lambda]\operatorname{tg}\alpha)\left(1 - \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\right),$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha \left(\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{\cos\gamma - \sin\gamma\operatorname{tg}\tau}{\cos\gamma - \sin\gamma\operatorname{tg}\alpha}}, \qquad \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\cos\varphi_e}{\cos\varphi_0}.$$

Das Zeitintegral ist nun

$$nt = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos\varphi(\cos\gamma - \sin\gamma\operatorname{tg}\tau)}}, \quad n = \frac{g\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_e)}{v_0 \sin\alpha\sqrt{2\cos\varphi_0}} \sqrt{\frac{\cos(\gamma+\alpha)}{\cos\alpha}}.$$

Nach Einführung von $\operatorname{tg}\tau$ und

$$C = \frac{\cos(\gamma+\alpha)}{\cos\alpha} + \frac{\sin\gamma\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi_0}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_e)},$$

$$\sin\varepsilon = \frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\varphi_0\sin\gamma + \cos\varphi_0\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_e)\cos(\gamma+\alpha)}$$

erhält man

$$nt = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2C\cos\varphi(1 - \sin\varepsilon\sin\varphi)}}.$$

Unter Benützung der Relationen

$$\cos\psi = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi - \varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi + \varepsilon)}, \qquad \cos\sigma = \cos\psi^2,$$

erhalten wir

$$t = \sqrt{\frac{W\operatorname{tg}\beta\cos\varphi_0}{\lambda g C\cos\varepsilon}} \int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin\psi^2}}$$

oder

$$Nt = \int \frac{d\sigma}{\sqrt{2\cos\sigma}}, \quad N = \sqrt{\frac{\lambda y C\cos\varepsilon}{W\operatorname{tg}\beta\cos\varphi_0}}.$$

Daher ist wieder wie früher

$$Nt = u_0 - u = \frac{2\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}(\sigma_0 - \sigma)}{\sqrt{\cos\sigma_0} + \sqrt{\cos\sigma_e}}\left(1 - \frac{1}{160}(u_0 - u)^4 + \cdots\right).$$

Die Korrektion ist so klein, daß sie vernachlässigt werden darf.

Digitized by Google

$$Nt = \frac{2\sqrt{2\cos\varepsilon}\,\sin\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi).i}{\sqrt{\cos\varphi_0\,(1-\sin\varepsilon\sin\varphi)} + \sqrt{\cos\varphi\,(1-\sin\varepsilon\sin\varphi_0)}}$$

$$t = \sqrt{\frac{8W\,\mathrm{tg}\,\beta}{\lambda g C\cos\varepsilon}} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi)}{\sqrt{1-\sin\varepsilon\sin\varphi} + \sqrt{(1-\sin\varepsilon\sin\varphi_0)\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_0}}}.$$

Wird t zur Flugzeit T für W, so ist

$$T = \frac{\sqrt{\frac{8W}{g}\,\mathrm{tg}\,\alpha}}{\sqrt{\frac{\cos(\gamma+\alpha)}{\cos\alpha}} + \sqrt{\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\beta}\,\frac{\cos(\gamma-\beta)}{\cos\beta}}} \cdot \left(1 - \frac{1}{160}(u_0 - u_e)^4 \ldots\right),$$

welche Formel für $\gamma = 0$ in die für die horizontale Wurfweite übergeht.

Anwendung: $v_0 = 600$, $\alpha = 12^0 1' 21''$, $\gamma = 32^0 58' 39''$, $\beta = \gamma$.

Es folgt $T = 24{,}639$, der genaue Wert ist 24,633 Sekunden. Die letzte Gleichung ist von Bedeutung, da sie unabhängig von λ ist. Aus W und T etc. folgt β, hieraus λ und v_e.

Die Grundformeln für schräge Wurfweiten sind also auch noch von großer Einfachheit und Allgemeinheit und sie überheben uns der Mühe, aus den Gleichungen für horizontale Wurfweiten nachträglich die für schräge abzuleiten. Aus unseren bisherigen Entwicklungen geht hervor, daß die ballistische Hyperbel reich ist an vorzüglichen Eigenschaften, die sie zur Anwendung auch auf schwierigere Fälle der Bewegung besonders geeignet erscheinen lassen.

Verbesserung: S. 210, Zeile 6 im XV. Jahrg. ist statt $y_1 + 2y_2 - 3y$ zu setzen $y_1 + 2y_4 - 3y_3$.

Digitized by Google

I. Tabelle für das Integral

$$J = \int_0^{\varphi} \cos \varphi^{5/2} d\varphi .$$

φ_0	J	Diff.	φ	J	Diff.	φ	J	Diff.
90	0,7190	0	60	0,6914	33	30	0,4681	123
89	0,7190	0	59	0,6881	35	29	0,4558	126
88	0,7190	0	58	0,6846	37	28	0,4432	130
87	0,7190	0	57	0,6809	40	27	0,4302	132
86	0,7190	0	56	0,6769	42	26	0,4170	135
85	0,7190	1	55	0,6727	45	25	0,4035	138
84	0,7189	1	54	0,6682	47	24	0,3897	141
83	0,7188	1	53	0,6635	51	23	0,3756	143
82	0,7187	1	52	0,6584	53	22	0,3613	145
81	0,7186	2	51	0,6531	56	21	0,3468	148
80	0,7184	2	50	0,6475	59	20	0,3320	151
79	0,7182	3	49	0,6416	63	19	0,3169	153
78	0,7179	4	48	0,6353	65	18	0,3016	155
77	0,7175	5	47	0,6288	69	17	0,2861	157
76	0,7170	5	46	0,6219	71	16	0,2704	159
75	0,7165	7	45	0,6148	75	15	0,2545	161
74	0,7158	7	44	0,6073	78	14	0,2384	163
73	0,7151	9	43	0,5995	82	13	0,2221	164
72	0,7142	10	42	0,5913	85	12	0,2057	166
71	0,7132	11	41	0,5828	88	11	0,1891	168
70	0,7121	13	40	0,5740	91	10	0,1723	168
69	0,7108	14	39	0,5649	95	9	0,1555	170
68	0,7094	16	38	0,5554	98	8	0,1385	171
67	0,7078	18	37	0,5456	101	7	0,1214	172
66	0,7060	19	36	0,5355	104	6	0,1042	172
65	0,7041	21	35	0,5251	107	5	0,0870	173
64	0,7020	23	34	0,5144	111	4	0,0697	174
63	0,6997	25	33	0,5033	114	3	0,0523	174
62	0,6972	28	32	0,4919	117	2	0,0349	174
61	0,6944	30	31	0,4802	121	1	0,0175	175
60	0,6914		30	0,4681		0	0,0000	

Digitized by Google

II. Tabelle für das Integral zur Erdrotation

$$J = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi^{3/2}}$$

φ	J	Diff.	φ	J	Diff.	φ	J	Diff.
75	2,688		50	1,095		25	0,459	
		126			33			21
74	2,562		49	1,062		24	0,438	
		116			33			20
73	2,446		48	1,029		23	0,418	
		106			31			19
72	2,340		47	0,998		22	0,399	
		97			31			20
71	2,243		46	0,967		21	0,379	
		91			30			19
70	2,152		45	0,937		20	0,360	
		84			29			19
69	2,068		44	0,908		19	0,341	
		79			28			19
68	1,989		43	0,880		18	0,322	
		74			27			19
67	1,915		42	0,853		17	0,303	
		69			27			18
66	1,846		41	0,826		16	0,285	
		65			27			19
65	1,781		40	0,799		15	0,266	
		62			25			18
64	1,719		39	0,774		14	0,248	
		59			25			18
63	1,660		38	0,749		13	0,230	
		56			25			18
62	1,604		37	0,724		12	0,212	
		52			24			18
61	1,552		36	0,700		11	0,194	
		51			24			18
60	1,501		35	0,676		10	0,176	
		48			24			18
59	1,453		34	0,652		9	0,158	
		46			23			18
58	1,407		33	0,629		8	0,140	
		44			22			17
57	1,363		32	0,607		7	0,123	
		43			22			18
56	1,320		31	0,585		6	0,105	
		41			22			18
55	1,279		30	0,563		5	0,087	
		39			21			17
54	1,240		29	0,542		4	0,070	
		38			22			18
53	1,202		28	0,520		3	0,052	
		37			21			17
52	1,165		27	0,499		2	0,035	
		36			20			18
51	1,129		26	0,479		1	0,017	
		34			20			17
50	1,095		25	0,459		0	0,000	

Digitized by Google

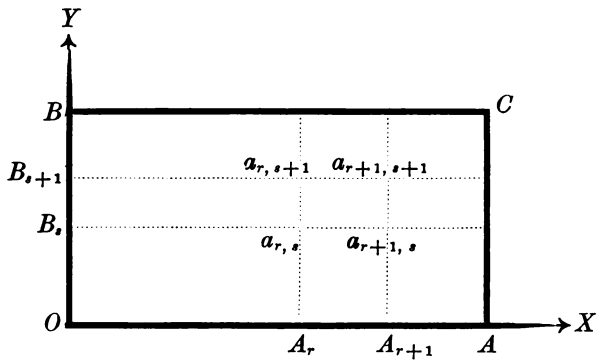
Zur Theorie der freien Schwingungen einer rechteckigen Membran.

Von **R. Wagner** in Innsbruck.

Rayleigh[1]) nimmt in seiner Theorie des Schalles Sätze, welche für Systeme von endlichem Freiheitsgrade entwickelt worden sind, auch für Systeme von unendlich hohem Freiheitsgrade als giltig in Anspruch. Der direkte Grenzübergang von der ersten zu der zweiten Voraussetzung ist bisher nur für den Fall der Saite durchgeführt worden.[2]) Die folgenden Zeilen beschäftigen sich mit der Ausführung dieses Grenzüberganges in dem Falle der Membran mit rechteckiger Begrenzung.

I.

Die Membran sei in der XY-Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems so ausgespannt, daß ihre Seiten $\overline{OA} = a$ und



$\overline{OB} = b$ in die X- bezw. Y-Achse fallen. Ihre als variabel angenommene Flächendichte sei ρ. Man teilt die Seite a in $(k+1)$ Teile von der Größe ε, die Seite b in $(l+1)$ Teile von der

[1]) Rayleigh, „Die Theorie des Schalles", übersetzt von Neesen.

[2]) Vergl.: Fr. Pockels, „Über die partielle Differentialgleichung $\Delta(u) + k^2 . u = 0$". Leipzig 1891. I. Teil, § 2, S. 39.

Digitized by Google

Größe δ, zieht durch alle Teilpunkte A_r, B_s Parallele zu den Begrenzungen der Membran und halbiert die so erhaltenen kleinen Rechtecke durch eine Diagonale. Dadurch wird die Membran mit einem Netz kleiner Dreiecke $(a_{r,s}, a_{r,s+1}, a_{r+1,s})$ überzogen.

Um ein System endlich vieler Massenpunkte zu erhalten, das beim Grenzübergang in die kontinuierliche Membran übergeht, bringt man in allen Punkten $a_{r,s}$ die Masse $m_{r,s} = \rho_{r,s} \cdot \frac{\varepsilon . \delta}{2}$ an und denkt sich diese Punkte durch massenlose Fäden verbunden. In der X-bezw. Y-Richtung mögen auf $m_{r,s}$ die Kräfte $\frac{T_2 . \delta}{2}$ bezw. $\frac{T_1 . \varepsilon}{2}$ wirken. Von diesen sei angenommen, daß sie für alle Massenpunkte konstant und so groß sind, daß die bei einer Dehnung der Membran auftretenden elastischen Kräfte ihnen gegenüber vernachlässigt werden können. Außerdem seien die Schwingungen so klein, daß longitudinale Verschiebungen der Massenpunkte außer Betracht kommen.

II.

Die Lage jedes Massenpunktes ist unter diesen Annahmen durch die Koordinaten: $x = r.\varepsilon \quad y = s.\delta \quad z = \eta_{r,s}$ gegeben. Der Rand der Membran sei in Ruhe. Es sind daher die Grenzbedingungen durch die Gleichungen

$$\eta_{r,0} = \eta_{0,s} = \eta_{k+1,s} = \eta_{r,l+1} = 0 \; (r = 1,2 \ldots k+1; \; s = 1,2 \ldots . l+1)$$

ausgedrückt.

Erhalten die Massenpunkte beliebige Ausweichungen aus ihrer Ruhelage, so ist die Arbeit bei der Dehnung der Strecke $(a_{r,s}, a_{r+1,s})$ auf die neue Länge gleich

$$\frac{T_2 . \delta}{2} \cdot \left\{ \sqrt{\varepsilon^2 + (\eta_{r,s} - \eta_{r+1,s})^2} - \varepsilon \right\}.$$

Ebenso ist die Arbeit, welche zu der Dehnung der Strecke $(a_{r,s}, a_{r,s+1})$ benötigt wird, gleich

$$\frac{T_1 . \varepsilon}{2} \cdot \left\{ \sqrt{\delta^2 + (\eta_{r,s} - \eta_{r,s+1})^2} - \delta \right\}.$$

Daher erhält man unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung für das Potential des ganzen Systems in der neuen Lage

$$V = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{k+1} \sum_{s=0}^{l+1} \left\{ \frac{T_1 . \varepsilon}{2\delta} \cdot (\eta_{r,s+1} - \eta_{r,s})^2 + \frac{T_2 . \delta}{2\varepsilon} \cdot (\eta_{r,s} - \eta_{r+1,s})^2 \right\}.$$

Die gesamte lebendige Kraft des Systems ist

$$L = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{k+1} \sum_{s=0}^{l+1} m_{r,s} \cdot \left(\frac{d\eta_{r,s}}{dt} \right)^2.$$

Digitized by Google

Nach den Lagrangeschen Differentialgleichungen zweiter Art

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_{r,s}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_{r,s}} + \frac{\partial V}{\partial \eta_{r,s}} = 0$$

bestehen daher die Gleichungen

$$(1)\quad m_{r,s} \cdot \ddot{\eta}_{r,s} + \frac{T_2 \cdot \partial}{2\varepsilon} \cdot \left\{2\eta_{r,s} - \eta_{r-1,s} - \eta_{r+1,s}\right\} + \\ + \frac{T_1 \cdot \varepsilon}{2 \cdot \partial} \cdot \left\{2\eta_{r,s} - \eta_{r,s-1} - \eta_{r,s+1}\right\} = 0, \quad \begin{matrix} r = 1, 2 \ldots . k \\ s = 1, 2 \ldots . l \end{matrix}$$

in welchen $\frac{d\eta_{r,s}}{dt} = \eta_{r,s}$ und $\frac{d^2\eta_{r,s}}{dt^2} = \ddot{\eta}_{r,s}$ gesetzt worden ist.

III.

Die Schwingungen der Membran sind durch die Größen $\eta_{r,s}$ bestimmt, welche aus den Gleichungen (1) als Funktionen der Zeit zu berechnen sind. Diese Rechnung läßt sich in Anlehnung an die Behandlung des Problems der schwingenden Saite bei Helmholtz[1]) durchführen, wenn man annimmt, daß die Dichte der Membran konstant, also $m_{r,s} = m$ ist.

Um ein partielles Integral der Differentialgleichungen (1) zu finden, setzt man $\eta_{r,s}$ in der Form $\eta_{r,s} = A_{r,s} \cdot e^{\nu \cdot t}$ an und erhält durch Umstellen der Glieder die Gleichungen:

$$(2)\quad A_{r+1,s} - A_{r,s} \cdot \left[\frac{2m \cdot \varepsilon}{T_2 \cdot \partial} \cdot \nu^2 + 2 + 2\,\frac{T_1 \cdot \varepsilon^2}{T_2 \cdot \partial^2} - \frac{T_1 \varepsilon^2}{T_2 \partial^2} \cdot \frac{A_{r,s-1}}{A_{r,s}} - \right. \\ \left. - \frac{T_1 \cdot \varepsilon^2}{T_2 \cdot \partial^2} \cdot \frac{A_{r,s+1}}{A_{r,s}}\right] + A_{r-1,s} = 0, \quad \begin{matrix} r = 1, 2 \ldots k+1 \\ s = 1, 2 \ldots l+1 \end{matrix}$$

aus welchen unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen die Konstanten $A_{r,s}$ und ν^2 zu berechnen sind.

Da die Membran hier durch ein System vom $k.l^{\text{ten}}$ Freiheitsgrad ersetzt worden ist, erhält man nach der Theorie schwingender Systeme von endlichem Freiheitsgrad $k.l$ Eigentöne, d. h. $k.l$ negative Werte für ν^2, welche die Wurzeln der Determinante dieser Gleichungen sind.

Führt man für ν^2 die erhaltenen Lösungen in (2) ein, so gelangt man für jeden solchen Wert zu einem von Null verschiedenen System der Konstanten $A_{r,s}$, welche die Amplituden der betreffenden Eigenbewegung bestimmen.

Man sucht zunächst jene Eigenschwingungen, bei welchen alle Schnitte parallel zur XZ-Ebene Kurven desselben Typus

[1]) S.: „Vorlesungen über die mathematischen Prinzipien der Akustik" von H. v. Helmholtz, II. Teil, § 35, S. 76.

Digitized by Google

liefern, die sich nur durch die Werte des Parameters s unterscheiden, sodann jene Partialschwingungen, bei denen alle Schnitte der Membran parallel zur YZ-Ebene Kurven geben, welche sich nur durch die Parameterwerte r unterscheiden. Aus beiden Gruppen von Lösungen lassen sich alle vorhandenen Eigenschwingungen des Systems zusammensetzen.

Zur ersteren Gruppe gelangt man, indem man in (2) den Ausdruck in der Klammer:

$$\frac{2m.\varepsilon}{T_2.\partial}\cdot\nu^2+2+2\frac{T_1.\varepsilon^2}{T_2.\partial^2}-\frac{T_1\,\varepsilon^2}{T_2\,\delta^2}\cdot\frac{A_{r,s-1}}{A_{r,s}}-\frac{T_1.\varepsilon^2}{T_2.\partial^2}\cdot\frac{A_{r,s+1}}{A_{r,s}}=q_s+q_s^{-1}$$

setzt, wobei die q_s nur vom Index s abhängen sollen. Dann erhält man ganz analog wie bei dem Problem der Saite[1]) durch Auflösung der Reduktionsformeln

$$A_{r+1,s}-q_s\cdot A_{r,s}=q_s^{-1}\cdot[A_{r,s}-q_s\cdot A_{r-1,s}] \qquad r=1,2\ldots k+1$$

den Ausdruck

$$A_{r,s}=A_{1,s}\cdot\frac{q_s^r-q_s^{-r}}{q_s-q_s^{-1}}\cdot \qquad \begin{matrix} r=1,2\ldots k+1 \\ s=1,2\ldots l+1 \end{matrix} \tag{3}$$

Anderseits kann man die ursprünglichen Gleichungen auch in der Form schreiben:

$$A_{r,s+1}-A_{r,s}\cdot\left[2\frac{m.\partial}{T_1.\varepsilon}\cdot\nu^2+2+2\frac{T_2.\partial^2}{T_1.\varepsilon^2}-\frac{T_2.\partial^2}{T_1.\varepsilon^2}\cdot\frac{A_{r-1,s}}{A_{r,s}}-\right.$$
$$\left.-\frac{T_2.\partial^2}{T_1.\varepsilon^2}\cdot\frac{A_{r+1,s}}{A_{r,s}}\right]+A_{r,s-1}=0.$$

Man nimmt, um die zweite Gruppe der Lösungen zu erhalten, den Ausdruck in der Klammer als eine vom Index s unabhängige Größe in der Form $p_r+p_r^{-1}$ an und erhält

$$A_{r,s}=A_{r,1}\cdot\frac{p_r^s-p_r^{-s}}{p_r-p_r^{-1}}\cdot \qquad \begin{matrix} r=1,2\ldots k+1 \\ s=1,2\ldots l+1 \end{matrix} \tag{4}$$

In dieser und der vorangehenden Rechnung ist bereits

$$A_{o,s}=A_{r,o}=0 \qquad \begin{matrix} r=1,2\ldots k+1 \\ s=1,2\ldots l+1 \end{matrix}$$

gesetzt worden. Führt man für q_s und p_r die Werte

$$q_s=e^{i.\beta_s} \text{ und } p_r=e^{i.b_r}$$

[1]) Vergl.: Helmholtz, l. c., S. 76.

Digitized by Google

ein, so erhält man aus (3) und (4) unter Benützung der Grenzbedingungen: $A_{k+1,s} = A_{r,l+1} = 0$ zur Bestimmung von β_s und b_r die Gleichungen:

$$\frac{\sin[(k+1)\,.\,\beta_s]}{\sin(\beta_s)} = 0 \text{ und } \frac{\sin[(l+1)\,.\,b_r]}{\sin(b_r)} = 0.$$

Es ergeben sich somit als zulässige Werte von β_s und b_r:

$$\beta_s = \frac{\lambda\,.\,\pi}{k+1} \text{ und } b_r = \frac{\mu\,.\,\pi}{l+1} \qquad \begin{matrix}\lambda = 1, 2 \ldots k \\ \mu = 1, 2 \ldots l\end{matrix}$$

β_s und b_r sind also von s beziehungsweise r unabhängige Zahlen. Indem man $A_{r,1}$ aus (3) berechnet und in Gleichung (4) einführt, erhält man endlich

$$(5) \qquad A_{r,s} = A_{1,1} \cdot \frac{\sin(r\,.\,\beta_s)}{\sin(\beta_s)} \cdot \frac{\sin(s\,.\,b_r)}{\sin(b_r)} \cdot \qquad \begin{matrix}r = 1, 2 \ldots k \\ s = 1, 2 \ldots l\end{matrix}$$

Dies ist für jede zulässige Wahl von β_s und b_r ein Lösungssystem der Gleichungen (2); und zwar stellen diese $k\,.\,l$ von einander verschiedenen Systeme (5) zugleich alle Lösungen dar, da es, wie bereits erwähnt, nach einem Satze der Theorie der Schwingungen materieller Systeme nur $k\,.\,l$ Eigenschwingungen überhaupt gibt.

Es erübrigt noch, aus den Werten von β_s und b_r auf die Werte von ν^2 zurückzugehen. Hiefür findet man übereinstimmend aus den beiden Gleichungen

$$q_s + q_s^{-1} = 2\cos\left(\frac{\lambda\,.\,\pi}{k+1}\right) = 2\,\frac{m\,.\,\varepsilon}{T_2\,.\,\partial}\,.\,\nu^2 + 2 + 2\,\frac{T_1\,.\,\varepsilon^2}{T_2\,.\,\partial^2} - \\ - 2\,\frac{T_1\,.\,\varepsilon^2}{T_2\,.\,\partial^2}\,.\,\cos\left(\frac{\mu\,.\,\pi}{l+1}\right)$$

$$p_r + p_r^{-1} = 2\cos\left(\frac{\mu\,.\,\pi}{l+1}\right) = 2\,\frac{m\,.\,\partial}{T_1\,.\,\varepsilon}\,.\,\nu^2 + 2 + 2\,\frac{T_2\,.\,\partial^2}{T_1\,.\,\varepsilon^2} - \\ - 2\,\frac{T_2\,.\,\partial^2}{T_1\,.\,\varepsilon^2}\,.\,\cos\left(\frac{\lambda\,.\,\pi}{k+1}\right)$$

die $k\,.\,l$ Wurzeln

$$\nu^2 = -\frac{4}{\rho}\,.\left\{\frac{T_2}{\varepsilon^2}\,.\,\sin^2\left[\frac{\lambda\,.\,\pi}{2(k+1)}\right] + \frac{T_1}{\partial^2}\,.\,\sin^2\left[\frac{\mu\,.\,\pi}{2(l+1)}\right]\right\} = -n^2_{\lambda,\mu} \qquad \begin{matrix}\lambda = 1, 2 \ldots k \\ \mu = 1, 2 \ldots l\end{matrix}$$

Digitized by Google

Hiebei ist entsprechend den früheren Bezeichnungen $\frac{m}{\frac{1}{2}.\varepsilon.\partial} = \rho$ gesetzt worden.

Das allgemeine Integral der Differentialgleichungen (1) ist somit

$$(6)\quad \eta_{r,s} = \sum_{\lambda=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{l} w_{\lambda,\mu}.\sin\left(r.\frac{\lambda.\pi}{k+1}\right).\sin\left(s.\frac{\mu.\pi}{l+1}\right).\cos\left(n_{\lambda,\mu}.t+\varepsilon_{\lambda,\mu}\right),$$

wobei $$w_{\lambda,\mu} = \frac{A_{1,1}}{\sin\left(\frac{\lambda\pi}{k+1}\right).\sin\left(\frac{\mu\pi}{l+1}\right)}$$

ebenso wie $\varepsilon_{\lambda,\mu}$ willkürliche, von r und s unabhängige Zahlen sind.

IV.

Die Gleichungen (6) stellen die allgemeinste freie Bewegung des Systems dar. Durch Anwendung der Hilfsformeln

$$(7)\quad \sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{l}\sin\left(r.\frac{\lambda.\pi}{k+1}\right).\sin\left(s\frac{\mu\pi}{l+1}\right).\sin\left(r.\frac{\sigma\pi}{k+1}\right)\sin\left(s\frac{\tau\pi}{l+1}\right)=0$$

für $\lambda \neq \sigma$ und $\mu \neq \tau$ und

$$(7')\quad \sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{l}\sin^2\left(r.\frac{\lambda\pi}{k+1}\right).\sin^2\left(s\frac{\tau\pi}{l+1}\right)=\frac{(k+1).(l+1)}{4}$$

ist es möglich, die $2k.l$ willkürlichen Konstanten $w_{\lambda,\mu}$ und $\varepsilon_{\lambda,\mu}$ so zu bestimmen, daß jeder beliebige Anfangszustand dargestellt werden kann. Wählt man z. B. die Anfangsbedingungen

$$\eta_{r,s} = g_{r,s},\ \dot{\eta}_{r,s} = 0 \text{ zur Zeit } t = 0,$$

so ist die zweite Bedingung erfüllt für $\varepsilon_{\lambda,\mu} = 0$ und man findet mit Hilfe der Gleichungen (7) und (7')

$$(8)\quad \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{l} g_{r,s}.\sin\left(r\frac{\sigma\pi}{k+1}\right).\sin\left(s\frac{\tau\pi}{l+1}\right)=w_{\sigma,\tau}.\frac{(k+1).(l+1)}{4}$$

$\sigma = 1, 2 \ldots k$
$\tau = 1, 2 \ldots l$

wodurch alle $w_{\sigma,\tau}$ eindeutig bestimmt sind.

V.

Da die Wahl von k und l nicht beschränkt ist, so gelten die Grenzwerte der erhaltenen Formeln für die kontinuierliche Membran, wenn nur die Ausdrücke beim Grenzübergang zum unendlich hohen Freiheitsgrad konvergieren. Man setzt

Digitized by Google

(9) $$r.\varepsilon = x, \quad s.\partial = y, \quad (k+1).\varepsilon = a, \quad (l+1).\partial = b,$$

wobei x, y, a, b gegebene Werte sind. Läßt man dann ε und ∂ in der Weise zu Null konvergieren, daß immer die Gleichungen (9) erfüllt werden, so erhält man

$$L = \lim_{\varepsilon=0,\partial=0} \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{k} \sum_{s=0}^{l} m_{r,s} \cdot \left(\frac{d\eta_{r,s}}{dt}\right)^2 = \frac{1}{4} \int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{b} \rho(x,y) \cdot \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 dx\,dy$$

$$V = \lim_{\varepsilon=0,\partial=0} \frac{1}{4} \sum_{r=0}^{k} \sum_{s=0}^{l} \left\{ \frac{T_2 \cdot \partial}{\varepsilon} \cdot (\eta_{r,s} - \eta_{r+1,s})^2 + \frac{T_1 \cdot \varepsilon}{\partial} \cdot (\eta_{r,s+1} - \eta_{r,s})^2 = \right.$$

$$= \frac{1}{4} \int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{b} \left\{ T_2 \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + T_1 \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\,dy.$$

Statt der $k.l$ totalen Differentialgleichungen (1)

$$\rho_{r,s} \cdot \ddot{\eta}_{r,s} + T_2 \cdot \frac{2\eta_{r,s} - \eta_{r-1,s} - \eta_{r+1,s}}{\varepsilon^2} + T_1 \cdot \frac{2\eta_{r,s} - \eta_{r,s-1} - \eta_{r,s+1}}{\partial^2} = 0 \qquad \begin{matrix} r = 1, 2 \ldots k+1 \\ s = 1, 2 \ldots l+1 \end{matrix}$$

erhält man beim Grenzübergang eine einzige partielle Differentialgleichung

$$\rho(x,y) \cdot \frac{\partial^2 \eta}{dt^2} - T_2 \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - T_1 \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0.$$

Zur Bestimmung der $A_{r,s}$ mußte die Flächendichte $\rho(x, y)$ als konstant angenommen werden. Dann war die Bewegung bestimmt durch die Gleichungen (6)

$$\eta_{r,s} = \sum_{\lambda=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{l} w_{\lambda,\mu} \cdot \sin\left(r \cdot \frac{\lambda \cdot \pi}{k+1}\right) \sin\left(s \frac{\mu \pi}{l+1}\right) \cdot \cos(n_{\lambda,\mu} \cdot t + \varepsilon_{\lambda,\mu}) \cdot \qquad \begin{matrix} r = 1, 2 \ldots k \\ s = 1, 2 \ldots l \end{matrix}$$

Wählt man die Anfangsbedingungen $\eta_{r,s} = g_{r,s}$, $\dot{\eta}_{r,s} = 0$ für $t = 0$ und nimmt man ferner an, daß die Zahlen $g_{r,s}$ sich bei dem Grenzübergange zu einer stetigen Funktion $g(x, y)$ zusammenschließen, so geht die Gleichung (8), welche unter den getroffenen Voraussetzungen die Werte der Konstanten $w_{\sigma,\tau}$ liefert, über in die Gleichung

$$w'_{\lambda,\mu} = \frac{4}{a.b} \int_{\alpha=0}^{a} \int_{\beta=0}^{b} g(\alpha, \beta) \cdot \sin\left(\frac{\lambda \pi}{a} \cdot \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\mu \pi}{b} \cdot \beta\right) d\alpha\,d\beta,$$

Digitized by Google

so daß, die Konvergenz der Reihe zunächst vorausgesetzt, die Bewegung der kontinuierlichen Membran unter den Anfangsbedingungen: $\eta = g(x\,y)$, $\dot{\eta} = 0$ für $t = 0$, bestimmt ist durch

$$(10) \qquad \eta = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} w^1_{\lambda,\mu} . \sin\left(\frac{\lambda\pi}{a} . x\right) . \sin\left(\frac{\mu\pi}{b} y\right) . \cos\left(\overline{n}_{\lambda.\mu} . t\right).$$

Hier ist für $n_{\lambda,\mu}$ der Grenzwert $\overline{n}_{\lambda,\mu}$ einzusetzen. Es ist

$$\overline{n}^2_{\lambda,\mu} = \lim_{\varepsilon=0,\,\delta=0} \frac{4}{\rho} . \left\{ \frac{T_2}{\varepsilon^2} . \sin^2\left[\frac{\lambda\pi}{2(k+1)}\right] + \frac{T_1}{\delta^2} . \sin^2\left[\frac{\mu\pi}{2(l+1)}\right] = \right.$$

$$= \frac{\pi^2}{\rho} \left\{ T_2 . \frac{\lambda^2}{a^2} + T_1 . \frac{\mu^2}{b^2} \right\}.$$

Entwickelt man, um die Konvergenz der Reihe (10) nachzuweisen, $g(x, y)$ als eine ungerade Funktion von y im Intervall $(-b, b)$ in eine Fouriersche Reihe, so ist, weil $g(x, y)$ überall stetig ist und am Rande der Membran verschwindet, die Reihe

$$f(x, y) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{2}{b} . \int_{\beta=0}^{b} g(x, \beta) . \sin\left(\frac{\mu\pi}{b} \beta\right) d\beta . \sin\left(\frac{\mu\pi}{b} . y\right)$$

absolut konvergent.[1]) Sie stellt innerhalb des Intervalls $(0, b)$ die Funktion $g(x, y)$ dar und liefert bei gliedweiser Integration nach x den Wert $\int_a^a f(\alpha, y)\, d\alpha$.[2]) Entwickelt man daher $f(x, y)$ als ungerade Funktion von x im Intervall $(-a, a)$ in eine Reihe, so ist auch die Reihe

$$(11) \quad h(x, y) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{2}{a} . \int_{\alpha=0}^{a} f(\alpha, y) . \sin\left(\frac{\lambda\pi}{a} . \alpha\right) d\alpha \sin\left(\frac{\lambda\pi}{a} . x\right) =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{2}{a} \sin\left(\frac{\lambda\pi}{a} . x\right) \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{2}{b} \int_{\alpha=0}^{a} \int_{\beta=0}^{b} g(\alpha, \beta) . \sin\left(\frac{\lambda\pi}{a} . \alpha\right) . \sin\left(\frac{\mu\pi}{b} . \beta\right) d\alpha\, d\beta$$

$$. \sin\left(\frac{\mu\pi}{b} y\right)$$

absolut konvergent und hat im Intervall $(0, a)$ den Wert $g(x, y)$. Infolge der absoluten Konvergenz sind in (11) die Glieder der Reihe zu vertauschen, so daß für $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$

$$h(x, y) = g(x, y) = \eta_{t=0}$$

ist. Daher konvergiert die Reihe (10) für jeden Wert der Zeit.

[1]) Vergl.: H. v. Helmholtz, l. c., S. 96.

[2]) Vergl.: O. Stolz, „Grundzüge der Differential- und Integralgleichungen", I. Teil, S. 425.

Digitized by Google

Über Dreiecks- und Vielecksсystеme als Träger der Kurve dritter Ordnung.

Von **Dr. Hermann Oppenheimer**, Neustadt a. H. (Rheinpfalz).

Einleitung.

Denken wir uns in bekannter Weise die Punkte einer C_3 durch Parameter elliptischer Funktionen dargestellt, derart, daß einem Wendepunkte der Parameter 0 zukommt, und seien die Parameter der Eckpunkte irgend eines der C_3 einbeschriebenen Dreiecks ABC bezw. a, b, c; ist nun K irgend ein Punkt der C_3 mit dem Parameter k, so liefern die dritten Schnittpunkte der Geraden AK, BK, CK mit der C_3 ein weiteres Dreieck $A'_k B'_k C'_k$ mit bezw. den Parametern $-(a+k)$, $-(b+k)$, $-(c+k)$; projizieren wir dieses Dreieck $A'_k B'_k C'_k$ wieder von einem Punkte der C_3, am einfachsten von dem Wendepunkte mit dem Parameter 0 aus, so erhalten wir das Dreieck $A_k B_k C_k$ mit den Parametern der Eckpunkte bezw. $a+k$, $b+k$, $c+k$ (und beliebigen Vielfachen der Periodizitätsmoduln). Lassen wir nun den Projektionspunkt K sich auf der Kurve entlang bewegen, so bekommen wir ein System von Dreiecken $A_k B_k C_k$, die sich mit den Punkten der C_3 in eine vollständige Analogie bringen lassen; ja mehr noch als das: ich werde zeigen, daß die Mannigfaltigkeit der Punkte der C_3 einen speziellen Fall eines Systems von Dreiecken der geschilderten Art darstellt.

Die Beziehungen und Sätze, zu denen ein solches System von Dreiecken $A_k B_k C_k$ Anlaß gibt, und ihre Vergleichung mit den bekannten Punktsätzen der C_3 sind der Gegenstand der nachfolgenden Arbeit; den Schluß derselben bildet eine kurze Erörterung der Vielecksсystеme, die eine gleiche Verwertung wie die eben genannten Dreiecksсystеme zulassen.

1. Wir wollen ein solches Dreieck $A_k B_k C_k$ mit bezw. den Parametern $a+k$, $b+k$, $c+k$ den „Tripelpunkt k“ nennen. Verbinden wir nun zwei solche Tripelpunkte k_1 und k_2, so geben sie in folgender eindeutiger Weise Anlaß zu einem weiteren Tripelpunkte k_3: Es ist $-(a+k_1+b+k_2) \equiv -(b+k_1+a+k_2)$ (mod ω, ω'), wenn ω und ω' die beiden Moduln der Kurve sind;

Digitized by Google

ebenso $-(b+k_1+c+k_2) \equiv -(b+k_2+c+k_1)$; $-(c+k_1+a+k_2) \equiv -(c+k_2+a+k_1)$, d. h. $A_{k_1}B_{k_2}$ und $A_{k_2}B_{k_1}$ schneiden sich in demselben Punkte C_{k_3} der Kurve, $B_{k_1}C_{k_2}$ und $B_{k_2}C_{k_1}$ in demselben Punkte A_{k_3}, $C_{k_1}A_{k_2}$ und $C_{k_2}A_{k_1}$ in demselben Punkte B_{k_3}. Man erhält also in eindeutiger Weise aus den beiden Dreiecken $A_{k_1}B_{k_1}C_{k_1}$ und $A_{k_2}B_{k_2}C_{k_2}$, die dem Dreieckssystem $(a+k, b+k, c+k)$ angehören, das Dreieck $A_{k_3}B_{k_3}C_{k_3}$. Dabei ist z. B. das Punktpaar $A_{k_3} - B_{k_3}$ die Projektion des Punktpaares $A_{k_2} - B_{k_2}$ von C_{k_1} aus oder die Projektion des Punktpaares $A_{k_1} - B_{k_1}$ von C_{k_2} aus u. s. w.

2. Es ist nun leicht zu erkennen, daß das Dreieck $A_{k_3}B_{k_3}C_{k_3}$ ebenfalls ein Tripelpunkt, d. h. in dem System der Dreiecke $(a+k, b+k, c+k)$ enthalten ist. Die Parameter seiner Eckpunkte sind, wie wir gesehen haben, $-(b+k_1+c+k_2)$, $-(c+k_1+a+k_2)$, $-(a+k_1+b+k_2)$ oder, wenn wir $a+b+c$ jedesmal addieren und subtrahieren: $a-[a+b+c+k_1+k_2]$, $b-[a+b+c+k_1+k_2]$, $c-[a+b+c+k_1+k_2]$. Dieser Form der Parameter sieht man sofort an, daß das Dreieck unserem System angehört. Gleichzeitig ergibt sich folgender Satz: Verbinden wir zwei Tripelpunkte k_1 und k_2 miteinander, so ergibt sich in eindeutiger Weise der Tripelpunkt $k_3 = -(a+b+c+k_1+k_2)$. Die Ähnlichkeit dieses Ergebnisses mit dem Ergebnis der Verbindung einfacher Punkte liegt auf der Hand; die Übereinstimmung in der Form läßt sich, wie wir später sehen werden, dadurch zu einer vollständigen machen, daß wir als Ausgangsdreieck ABC ein solches ausfindig machen, dessen Eckpunktparametersumme $a+b+c=0$ ist. Mit Rücksicht auf diese Ähnlichkeit können wir uns auch so ausdrücken: Die drei Tripelpunkte k_1, k_2, k_3 liegen auf einer Tripelgeraden.

3. Sind die beiden Tripelpunkte k_1 und k_2 unendlich benachbart, ist also $k_1 = k_2$, so ist der dritte Tripelpunkt k_3 der Verbindungslinie von k_1 und k_2 der Tangentialpunkt von k_1; er hat demnach den Parameter $-(a+b+c+2k_1)$. Betrachten wir nun wieder das Dreieck $A_{k_1}B_{k_1}C_{k_1}$ und das unendlich benachbarte $A_{k_2}B_{k_2}C_{k_2}$, so wird, wie wir in (2) gesehen haben, dieser Tangentialpunkt geliefert durch die Geraden $A_{k_1}B_{k_2}$, $B_{k_1}C_{k_2}$, $C_{k_1}A_{k_2}$ oder wegen des Zusammenfallens von k_1 und k_2 durch $A_{k_1}B_{k_1}$, $B_{k_1}C_{k_1}$ und $C_{k_1}A_{k_1}$. Man erhält also zu einem Tripelpunkte k_1 den Tangentialpunkt k_1', wenn man die dritten Schnittpunkte der Seiten des Dreiecks $A_{k_1}B_{k_1}C_{k_1}$ bestimmt. Es hat nun auch keine Schwierigkeit, umgekehrt zu einem Tripelpunkte k' die vier Tripelpunkte zu bestimmen, von denen er Tangentialpunkt ist; ist x einer derselben, dann ist also $-(a+b+c+2x)+p\omega+p'\omega' = k'$ (wobei p und p' beliebige ganze Zahlen sind); also ist

Digitized by Google

$$x = -\frac{a+b+c}{2} + \frac{p\omega + p'\omega' - k'}{2};$$

der Ausdruck bestätigt, daß es vier Punkte x gibt, eine Tatsache, die sich ja auch schon daraus ergibt, daß es bekanntlich vier einer C_3 einbeschriebene Dreiecke gibt, die einem anderen der C_3 einbeschriebenen Dreieck umbeschrieben sind. In unserem Falle erhält man die vier Tripelpunkte, wenn man in dem Ausdruck für x p und p' bezw. $= 0$ und $= 1$ setzt. Die vier Parameter sind also:

$$-\frac{a+b+c}{2} + \frac{k'}{2}, \quad -\frac{a+b+c}{2} - \frac{k'}{2} + \frac{\omega}{2},$$

$$-\frac{a+b+c}{2} - \frac{k'}{2} + \frac{\omega'}{2}, \quad -\frac{a+b+c}{2} - \frac{k'}{2} + \frac{\omega+\omega'}{2}.$$

Die Analogie mit der diesbezüglichen Theorie der einfachen Punkte springt wieder in die Augen.

4. Wir ersehen aus den Parametern der vier Tripelpunkte, die denselben Tangentialpunkt haben, auch, daß es drei Systeme konjugierter Tripelpunktpaare gibt. Dem Tripelpunkt $-\frac{a+b+c+k'}{2}$ muß man bezw. $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega+\omega'}{2}$ hinzufügen, um jedesmal einen konjugierten Tripelpunkt zu bekommen. Zu einem beliebigen Tripelpunkte k_n gehören also die konjugierten Punkte $k_n + \frac{\omega}{2}$, $k_n + \frac{\omega'}{2}$, $k_n + \frac{\omega+\omega'}{2}$. Nehmen wir zwei konjugierte Tripelpunktpaare desselben Systems k_n, $k_n + \frac{\omega}{2}$ und k_m, $k_m + \frac{\omega}{2}$, so ist es vielleicht von Interesse, den Parallelismus in dem Verhalten zweier solcher Tripelpunktpaare zu dem zweier gewöhnlicher konjugierter Punktpaare desselben Systems noch einmal durch Konstruktion ersichtlich zu machen. k_m und k_n liefern als dritten Punkt der Tripelgeraden, zu der sie gehören, wie wir gesehen haben, den Tripelpunkt $-(a+b+c+k_n+k_m)$; ebenso ergeben aber auch die Tripelpunkte $k_m + \frac{\omega}{2}$ und $k_n + \frac{\omega}{2}$, wenn wir sie verbinden, als dritten Tripelpunkt $-\left(a+b+c+k_n+k_m+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega}{2}\right) \equiv -(a+b+c+k_n+k_m) \pmod{\omega, \omega'}$, d. h. denselben Punkt; anderseits liefern k_m und $k_n + \frac{\omega}{2}$ den dritten Tripelpunkt $-\left(a+b+c+k_m+k_n+\frac{\omega}{2}\right)$, ebenso wie k_n und $k_m + \frac{\omega}{2}$.

Wenn wir von der symbolischen Darstellungsweise absehen, so heißt das also: Die Dreiecke $A_{k_n} B_{k_n} C_{k_n}$ und $A_{k_m} B_{k_m} C_{k_m}$ liefern

Digitized by Google

dasselbe dritte Dreieck wie die Dreiecke $A_{k_n+\frac{\omega}{2}}\, B_{k_n+\frac{\omega}{2}}\, C_{k_n+\frac{\omega}{2}}$ und $A_{k_n+\frac{\omega}{2}}\, B_{k_n+\frac{\omega}{2}}\, C_{k_n+\frac{\omega}{2}}$, ebenso liefert das Dreieckpaar $A_{k_n}\, B_{k_n}\, C_{k_n}$ und $A_{k_n+\frac{\omega}{2}}\, B_{k_n+\frac{\omega}{2}}\, C_{k_n+\frac{\omega}{2}}$ dasselbe Dreieck wie das Dreieckpaar $A_{k_n}\, B_{k_n}\, C_{k_n}$ und $A_{k_n+\frac{\omega}{2}}\, B_{k_n+\frac{\omega}{2}}\, C_{k_n+\frac{\omega}{2}}$. Dabei bedeutet das Dreieck $A_{k_n}\, B_{k_n}\, C_{k_n}$ den Tripelpunkt k_n u. s. w.

Es lassen sich nun alle anderen Eigenschaften konjugierter Punktpaare auf unsere Tripelpunktpaare übertragen. Ist z. B. k_m und $k_m+\frac{\omega}{2}$ wieder ein solches Paar konjugierter Tripelpunkte, so ist der dritte Schnittpunkt k_m'' ihrer Verbindungslinie $= -(a+b+c+2k_m)+\frac{\omega}{2}$; anderseits ist der Tangentialpunkt von k_m und $k_m+\frac{\omega}{2}$, $k_m' = -(a+b+c+2k_m)$; k_m' und k_m'' sind also wieder zwei konjugierte Tripelpunkte.

5. Wir wollen nun die geometrische Bedeutung eines Tripelwendepunktes und eines Systems solcher Punkte festsetzen.

Ein Tripelwendepunkt ist ein Tripelpunkt, der mit seinem Tangentialpunkte zusammenfällt. Daraus ergibt sich, wenn k_w ein solcher Tripelpunkt ist, die Bedingung: $k_w = -(a+b+c+2k_w)+ +p\omega+p'\omega'$, wo p und p' ganze Zahlen bedeuten; also $3k_w = = -(a+b+c)+p\omega+p'\omega'$: $k_w = -\frac{a+b+c}{3}+\frac{p\omega+p'\omega'}{3}$. Wir sehen, unser System enthält neun Tripelwendepunkte; wir erhalten sie, wenn wir in dem Ausdrucke für k_w p und p' je $=0, 1, 2$ setzen, ganz wie bei dem Parameterausdruck für die gewöhnlichen Wendepunkte. Welche geometrische Eigenheit kommt nun einem solchen Tripelwendepunkte zu, z. B. dem Tripelwendepunkte $-\frac{a+b+c}{3}$, den wir aus dem Kollektivausdrucke für die Wendepunkte erhalten, wenn wir p und $p'=0$ setzen. Dieser Wendepunkt $-\frac{a+b+c}{3}$ wird gebildet von den drei Punkten, deren Parameter bezw. $a-\frac{a+b+c}{3}$, $b-\frac{a+b+c}{3}$, $c-\frac{a+b+c}{3}$ sind; es ist aber:

$$a-\frac{a+b+c}{3}+b-\frac{a+b+c}{3}+c-\frac{a+b+c}{3} \equiv 0 \pmod{\omega, \omega'};$$

also: In dem System der Tripelpunkte sind diejenigen Tripelwendepunkte, deren drei Punkte in eine Gerade hineinfallen.

In der Tat fällt ja ein solcher Tripelpunkt mit seinem Tangentialpunkte zusammen.

Digitized by Google

Der Kollektivausdruck für die neun Tripelwendepunkte $k_\omega = \frac{-(a+b+c)+p\omega+p'\omega'}{3}$ läßt erkennen, daß man, wenn einer der Tripelpunkte, etwa $-\frac{a+b+c}{3}$, gegeben ist, in folgender Weise die anderen konstruieren kann: Projizieren wir die drei Punkte $a-\frac{a+b+c}{3}$, $b-\frac{a+b+c}{3}$, $c-\frac{a+b+c}{3}$ von einem Wendepunkte aus, z. B. dem Wendepunkte 0, so erhalten wir $\frac{a+b+c}{3}-a$, $\frac{a+b+c}{3}-b$, $\frac{a+b+c}{3}-c$. Projizieren wir sodann diese drei Punkte von sämtlichen Wendepunkten aus, deren Parameter in dem Ausdrucke $\frac{p\omega+p'\omega'}{3}$ enthalten sind, so erhalten wir die sämtlichen Tripelwendepunkte

$$a-\frac{a+b+c}{3}+\frac{p\omega+p'\omega'}{3},\quad b-\frac{a+b+c}{3}+\frac{p\omega+p'\omega'}{3},$$

$$c-\frac{a+b+c}{3}+\frac{p\omega+p'\omega'}{3}.$$

Es ist selbstverständlich, daß die Sätze, die die gegenseitige Lage der eigentlichen Wendepunkte zum Gegenstande haben, sich ohne weiteres auf das System der Tripelwendepunkte übertragen lassen. Zwei derselben liegen z. B. immer auf einer Tripelgeraden, die noch einen dritten enthält. Das Bemerkenswerte dabei ist, daß eine beliebige Gerade G der Ebene auf der C_3 die Punkte eines Tripelwendepunktes ausschneidet und so Veranlassung gibt zu einer Konfiguration, die der Wendepunktskonfiguration vollkommen analog ist.

6. Wir wollen drei in einer Geraden liegende Tripelwendepunkte betrachten, z. B.:

$$(1)\ a-\frac{a+b+c}{3},\qquad b-\frac{a+b+c}{3},\qquad c-\frac{a+b+c}{3};$$

$$(2)\ a-\frac{a+b+c}{3}-\frac{\omega}{3},\ b-\frac{a+b+c}{3}-\frac{\omega}{3},\ c-\frac{a+b+c}{3}-\frac{\omega}{3};$$

$$(3)\ a-\frac{a+b+c}{3}-\frac{2\omega}{3},\ b-\frac{a+b+c}{3}-\frac{2\omega}{3},\ c-\frac{a+b+c}{3}-\frac{2\omega}{3}.$$

Die drei Punkte von (1) seien der Reihe nach die Punkte A_1, B_1, C_1; die von (2) A_2, B_2, C_2; die von (3) A_3, B_3, C_3. Dann liegen A_1, B_2, C_3 auf einer Geraden, ebenso B_1, C_2, A_3 und C_1, A_2, B_3, wie sich durch Addition der Parameter unmittelbar ergibt; ebenso aber auch A_1, C_2, B_3; B_1, A_2, C_3 und C_1, B_2, A_3.

Digitized by Google

Der C_3-Büschel $(A_1\ B_1\ C_1\ A_2\ B_2\ C_2\ A_3\ B_3\ C_3)$ enthält also drei Kurven, die in drei Gerade zerfallen.

Es ist noch bemerkenswert, daß ein Tripelpunktsystem $(a+k,\ b+k,\ c+k)$ ein eindeutig bestimmtes System von neun Wendepunkten

$$\left(a - \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3},\ b - \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3},\right.$$
$$\left. c - \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3}\right)$$

hat, ganz unabhängig von der Wahl des Ausgangstripelpunktes innerhalb des Systems. Setzen wir z. B. $a+k=a'$, $b+k=b'$, $c+k=c'$ und denken uns unsere Dreieckmannigfaltigkeit durch die drei Parameter $a'+s$, $b'+s$, $c'+s$ gegeben, wobei s variabel ist, nehmen also a', b', c' als den Ausgangstripelpunkt, so ist das System der neun Wendetripelpunkte gegeben durch die Parameterausdrücke

$$a' - \frac{a'+b'+c'+p\omega+p'\omega'}{3},\quad b - \frac{a'+b'+c'+p\omega+p'\omega'}{3},$$
$$c' - \frac{a'+b'+c'+p\omega+p'\omega'}{3};$$

drücken wir nun aber a', b', c' durch a, b, c aus, so gehen diese Ausdrücke über in:

$$a+k - \frac{a+k+b+k+c+k+p\omega+p'\omega'}{3} = a - \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3}$$
$$b+k - \frac{a+k+b+k+c+k+p\omega+p'\omega'}{3} = b - \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3}$$
$$c+k - \frac{a+k+b+k+c+k+p\omega+p'\omega'}{3} = c - \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3},$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

7. Spezielle Fälle. Nehmen wir an Stelle der drei Ausgangspunkte a, b, c drei unendlich benachbarte Punkte an, so ergibt sich ein Tripelpunktsystem, das mit dem gewöhnlichen Punktsystem identisch ist; in der Tat ergeben sich aus unserem Ausdrucke für die Tripelwendepunkte die gewöhnlichen Wendepunkte, wenn wir $a=b=c$ setzen. Das System der einfachen Punkte der C_3 ist also als spezieller Fall in unserer zweifach unendlichen Mannigfaltigkeit von Tripelpunktsystemen enthalten — daß diese Mannigfaltigkeit zweifach unendlich ist, kann man am einfachsten an der schon erwähnten Tatsache erkennen, daß jede Gerade der Ebene einen Tripelwendepunkt eines solchen Systems liefert.

Digitized by Google

Bemerkenswert sind noch vier andere Tripelpunktsysteme, die Systeme der sogenannten Punkttripel, die ich bei verschiedenen Gelegenheiten „merkwürdige Dreiecke“ genannt habe; es sind dies die Systeme $\left(k, \frac{\omega}{3}+k, \frac{2\omega}{3}+k\right)$, $\left(k, \frac{\omega'}{3}+k, \frac{2\omega'}{3}+k\right)$, $\left(k, \frac{\omega+\omega'}{3}+k, \frac{2\omega+2\omega'}{3}+k\right)$, $\left(k, \frac{\omega+2\omega'}{3}+k, \frac{2\omega+\omega'}{3}+k\right)$, wobei k der veränderliche Parameter ist. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß sie Tripelpunkte enthalten, die aus drei in einer Geraden liegenden einfachen Wendepunkten bestehen; wir haben für jedes der vier Systeme denjenigen Tripelwendepunkt als Ausgangspunkt gewählt, der den Wendepunkt 0 enthält. Ein Dreieck eines solchen Systems — $k, \frac{\omega}{3}+k, \frac{2\omega}{3}+k$ — hat bekanntlich die Eigenschaft, daß der dritte Schnittpunkt einer Seite zugleich der Tangentialpunkt des dritten Eckpunktes ist: Der dritte Schnittpunkt der Geraden $\left(k, \frac{\omega}{3}+k\right)$ z. B. ist $-2k-\frac{\omega}{3}$ und der Tangentialpunkt des dritten Eckpunktes $\frac{2\omega}{3}+k$ ist $=-2k-$ $-\frac{4\omega}{3} \equiv -2k-\frac{\omega}{3} \pmod{\omega}$, also derselbe Punkt. Man kann also zu einem Tripelpunkt entweder auf die gewöhnliche Weise, durch Bestimmung der dritten Schnittpunkte der Seiten, den Tangentialpunkt bestimmen oder indem man zu den drei Eckpunkten ihre Tangentialpunkte zeichnet. Diese doppelte Möglichkeit der Konstruktion eines Tangentialtripelpunktes ist nur eine Konsequenz der Lage von drei in einer beliebigen Tripelgeraden liegenden Tripelpunkten. Sind $a_1\,b_1\,c_1$, $a_2\,b_2\,c_2$, $a_3\,b_3\,c_3$ drei in einer solchen Geraden liegende Tripelpunkte unseres Systems $\left(k, \frac{\omega}{3}+k, \frac{2\omega}{3}+k\right)$, so sind immer zwei von ihnen dreifach perspektivisch, derart, daß die Eckpunkte des dritten die zugehörigen Projektionszentren sind. Es existieren nämlich außer den Verbindungslinien, die bei den Punkten jeder Tripelgeraden vorhanden sind, noch die Geraden $a_1\,a_3\,a_3$, $b_1\,b_2\,b_3$, $c_1\,c_2\,c_3$. Man erkennt das sofort, wenn man die Dreiecke durch die Parameter ausdrückt:

die von a_1, a_2, a_3 seien bezw. $k_1, \frac{\omega}{3}+k_1, \frac{2\omega}{3}+k_1$

„ „ b_1, b_2, b_3 „ „ $k_2, \frac{\omega}{3}+k_2, \frac{2\omega}{3}+k_2$; dann sind

„ „ c_1, c_2, c_3 $-(k_1+k_2), \frac{\omega}{3}-(k_1+k_2), \frac{2\omega}{3}-(k_1+k_2)$.

Digitized by Google

Es ist alsdann $k_1 + k_2 - (k_1 + k_2) \equiv 0$

$$\frac{\omega}{3} + k_1 + \frac{\omega}{3} + k_2 + \frac{\omega}{3} - (k_1 + k_2) \equiv 0$$

$$\frac{2\omega}{3} + k_1 + \frac{2\omega}{3} + k_2 + \frac{2\omega}{3} - (k_1 + k_2) \equiv 0.$$

Anmerkung. Bei einem beliebigen Ausgangstripelpunkt abc ist ja, wenn k_1, k_2, k_3 einer Tripelgeraden angehören, $k_3 \equiv -(a + b + c + k_1 + k_2)$; in unserem Falle ist aber $a + b + c = 0 + \frac{\omega}{3} + \frac{2\omega}{3} \equiv 0 \pmod{\omega}$. —

Der Umstand nun, daß einerseits die Verbindungslinie $a_1 a_2$ zu dem dritten einfachen Punkt a_3 führt, anderseits die Linien $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$ durch ihre dritten Schnittpunkte den Tripelpunkt $a_3 b_3 c_3$ liefern, von dem derselbe einfache Punkt a_3 auch wieder ein Eckpunkt ist, läßt sich in folgendem Satze aussprechen:

Dieselben Punktgruppen, auf die die Sätze der C_3 sich unmittelbar beziehen, sind zugleich Teile von größeren Punktgruppen, auf die dieselben Sätze Anwendung finden, aber bei der übertragenen Bedeutung der Bezeichnungen „Punkt“ und „Gerade“ als „Tripelpunkt“ und „Tripelgerade“.

Ich will zwei kleine Beispiele dafür geben.

1. Sind a_{11}, a_{21} und b_{11}, b_{21} zwei konjugierte Punktpaare desselben Systems, so liefern die Geraden $a_{11} b_{11}$ und $a_{21} b_{11}$ ein weiteres konjugiertes Punktpaar $c_{11} c_{21}$, dasselbe, das auch die Geraden $a_{11} b_{21}$ und $a_{21} b_{21}$ liefern. Sind aber diese Punkte a_{11}, a_{21}, b_{11}, b_{21} Eckpunkte von Tripelpunkten unseres Systems: 1. $a_{11} a_{12} a_{13}$; 2. $a_{21} a_{22} a_{23}$; 3. $b_{11} b_{12} b_{13}$; 4. $b_{21} b_{22} b_{23}$, so sind 1 und 2, 3 und 4 auch konjugierte Tripelpunktpaare und die Verbindungslinien 1, 3 und 1, 4 liefern, ebenso wie die Verbindungslinien 2, 3 und 2, 4 das weitere konjugierte Punktpaar $c_{11} c_{12} c_{13}$ und $c_{21} c_{22} c_{23}$, von dem die einfachen konjugierten Punkte c_{11} und c_{21} wieder Bestandteile sind.

2. Ist a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41} ein Quadrupel von Berührungspunkten von vier von einem Punkte b_1 der C_3 ausgehenden Tangenten, so liegen bekanntlich diese vier Berührungspunkte auf einer C_2, die die C_3 in b_1 berührt. Zugleich sind aber diese fünf Punkte a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41}, b_1 Eckpunkte von fünf Tripelpunkten unseres Systems $a_{11} a_{12} a_{13}$, $a_{21} a_{22} a_{23}$, ... $b_1 b_2 b_3$, kurz mit $a_{11}\ldots$, $a_{21}\ldots$, $a_{31}\ldots$, $a_{41}\ldots$, $b_1\ldots$ bezeichnet, es ist nun auch $b_1\ldots$ der Tangentialpunkt der vier erstgenannten Tripelpunkte, ebenso wie b_1 der Tangentialpunkt von a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14} ist. Es liegen ferner auch die vier Tripelpunkte $a_{11}\ldots$, $a_{21}\ldots$, $a_{31}\ldots$, $a_{41}\ldots$ auf einem Tripelkegelschnitt, der außerdem noch die C_3 in den drei Punkten des

Digitized by Google

Tangentialtripelpunktes $b_1 \ldots$ berührt. — Daß der Tripelkegelschnitt eine C_6 ist, werden wir in (8) sehen. Also:

$$a_{11},\ a_{21},\ a_{31},\ a_{41},\ b_1,\ b_1$$

liegen auf einem Kegelschnitte;

$$a_{11}\ldots,\ a_{21}\ldots,\ a_{31}\ldots,\ a_{41}\ldots,\ b_1\ldots,\ b_1\ldots$$

liegen auf einem Tripelkegelschnitte.

Unsere vier merkwürdigen Systeme zeichnen sich aber auch noch in anderer Beziehung aus. Nehmen wir das System $\left(k,\ \frac{\omega}{3}+k,\ \frac{2\omega}{3}+k\right)$, das einzige reelle von den vieren, und bestimmen seine Tripelwendepunkte, so ist, wie man unmittelbar erkennt, ein Tripelwendepunkt $o,\ \frac{\omega}{3},\ \frac{2\omega}{3}$; ein zweiter ist

$$\frac{\omega'}{3},\ \frac{\omega}{3}+\frac{\omega'}{3},\ \frac{2\omega}{3}+\frac{\omega'}{3};\ \text{ein dritter}\ \frac{2\omega'}{3},\ \frac{\omega}{3}+\frac{2\omega'}{3},\ \frac{2\omega}{3}+\frac{2\omega'}{3}.$$

Auf diese drei scheint sich diesmal die Zahl der Tripelwendepunkte zu beschränken; dem ist aber in Wirklichkeit nicht so. Um das zu erkennen, müssen wir noch einmal auf die Natur eines Tripelwendepunktes eingehen. Als einen solchen erkannten wir einen Tripelpunkt, dessen drei Punkte in eine Gerade fallen. Offenbar muß aber auch ein solches Dreieck abc als ein Tripelwendepunkt angesehen werden, dessen drei Seiten ab, bc, ca die C_3 berühren; denn bei einem solchen Dreieck fallen ja die dritten Schnittpunkte der Seiten mit den Eckpunkten zusammen; ein solcher Tripelpunkt abc ist also auch sein eigener Tangentialpunkt. Dieser Fall eines Tripelwendepunktes brauchte bisher nicht erörtert zu werden, da ein beliebiges Tripelpunktsystem keinen solchen Wendepunkt besitzt. Die 24 um- und einbeschriebenen Dreiecke gehören vielmehr ausschließlich den vier ausgezeichneten Systemen an; jedes besitzt deren sechs. Zum Beispiel hat das reelle System folgende um- und einbeschriebene Dreiecke als weitere Tripelwendepunkte:

$$a)\ \frac{\omega}{9},\ \frac{\omega}{3}+\frac{\omega}{9},\ \frac{2\omega}{3}+\frac{\omega}{9}$$

oder umgestellt:

$$\frac{\omega}{9},\ \frac{2\omega}{3}+\frac{\omega}{9},\ \frac{\omega}{3}+\frac{\omega}{9} \equiv \frac{\omega}{9},\ \frac{-2\omega}{9},\ \frac{+4\omega}{9}.$$

$$b)\ \frac{2\omega}{9},\ \frac{\omega}{3}+\frac{2\omega}{9},\ \frac{2\omega}{3}+\frac{2\omega}{9} \equiv \frac{2\omega}{9},\ \frac{-4\omega}{9},\ \frac{8\omega}{9},$$

$$c)\ \frac{\omega'}{3}+\frac{\omega}{9},\ \frac{\omega'}{3}+\frac{4\omega}{9},\ \frac{\omega'}{3}+\frac{7\omega}{9},$$

Digitized by Google

oder umgestellt:

$$\frac{\omega'}{3}+\frac{\omega}{9},\ \frac{\omega'}{3}+\frac{7\omega}{9},\ \frac{\omega}{3}+\frac{4\omega}{9}\equiv\frac{\omega'}{3}+\frac{\omega}{9},\ \frac{-2\omega'}{3}-\frac{2\omega}{9},\ \frac{+4\omega'}{3}+\frac{4\omega}{9}.$$

d) $\frac{\omega'}{3}+\frac{2\omega}{9},\ \frac{\omega'}{3}+\frac{5\omega}{9}\equiv-\frac{2\omega'}{3}-\frac{4\omega}{9},\ \frac{\omega'}{3}+\frac{8\omega}{9}.$

e) $\frac{2\omega'}{3}+\frac{\omega}{9},\ \frac{2\omega'}{3}+\frac{4\omega}{9},\ \frac{2\omega'}{3}+\frac{7\omega}{9},$

oder umgestellt:

$$\frac{2\omega'}{3}+\frac{\omega}{9},\ \frac{2\omega'}{3}+\frac{7\omega}{9}\equiv-\frac{4\omega'}{3}-\frac{2\omega}{9},\ \frac{2\omega'}{3}+\frac{4\omega}{9}.$$

f) $\frac{2\omega'}{3}+\frac{2\omega}{9},\ \frac{2\omega'}{3}+\frac{5\omega}{9}\equiv-\frac{4\omega'}{3}-\frac{4\omega}{9},\ \frac{2\omega'}{3}+\frac{8\omega}{9}.$

Nur die ersten zwei dieser sechs Tripelwendepunkte sind reell.

Im ganzen hat dieses System also auch wieder drei reelle Tripelwendepunkte: *a)* und *b)* und den Tripelwendepunkt $0,\ \frac{\omega}{3},\ \frac{2\omega}{3}$. Die Konfiguration der neun Tripelwendepunkte ist im übrigen bei diesen vier Systemen genau dieselbe wie bei jedem anderen System.

Ich möchte schließlich noch ein weiteres spezielles System erwähnen, das System $(a+k,\ a+\frac{\omega}{2}+k,\ a+\frac{\omega'}{2}+k)$ mit k als veränderlichem Parameter. Ein Tripelpunkt dieses Systems hat die Eigenschaft, daß zwei seiner Punkte untereinander und dem dritten konjugiert sind. Die neun Tripelwendepunkte dieses Systems werden von den neun harmonischen Polaren der C_3 gebildet; diese veranlassen also ebenfalls eine Wendepunktskonfiguration.

8. Wir kehren zur allgemeinen Tripelpunkttheorie zurück. Wir haben den Tripelpunkt und die Tripelgerade in bestimmter Weise definiert; da erhebt sich nun die Frage: ist durch diese Definitionen ein bestimmter geometrischer Sinn auch für Bezeichnungen, wie Tripelkegelschnitt, ... Tripel-C_n festgelegt? Daß dieses der Fall ist und in welcher Weise, läßt sich leicht erkennen.

Sind $k_1, k_2, k_3, \ldots k_6$ die Parameter von sechs Punkten eines Kegelschnittes, so ist bekanntlich $k_1+k_2+\cdots+k_6\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \omega, \omega)$; sollen nun diese Parameter Dreiecke bedeuten, so ist die analoge Beziehung damit gegeben, daß

$$1.\ a+k_1+b+k_1+c+k_1+a+k_2+\cdots$$
$$+a+k_6+b+k_6+c+k_6\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \omega, \omega');$$

also

$$6\,(a+b+c)\equiv-3\,(k_1+k_2+\cdots+k_6)$$

Digitized by Google

oder

$$2)\quad k_1 + k_2 + \cdots + k_6 \equiv -2(a+b+c) \pmod{\omega, \omega'}.$$

Die Gleichung 1) drückt aber aus, daß die sechs Tripelpunkte $k_1 \ldots k_6$ auf einer C_6 liegen; das gleiche besagt also auch die aus 1) sich ergebende Gleichung 2) und allgemein drückt die Gleichung 3):

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_{3n} \equiv -n(a+b+c)$$

aus, daß die $3n$ zu diesen Parametern gehörigen Tripelpunkte auf einer C_n liegen. Der Tripelkegelschnitt ist also eine C_6, die Tripel C_n eine C_{3n}.

Diese Erkenntnis setzt uns in den Stand, weitere bemerkenswerte Analogien zur Theorie der einfachen Punkte aufzustellen.

Ist z. B.

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_p + k_{p+1} + \cdots + k_{3n} \equiv -n(a+b+c)$$

und ebenso

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_p + k'_{p+1} + \cdots + k'_{3n} \equiv -n(a+b+c),$$

dann ist offenbar

$$k_{p+1} + \cdots + k_{3n} \equiv k'_{p+1} + \cdots + k'_{3n};$$

jede Summe von p Parametern also, die $k'_{p+1} + \cdots + k'_{3n}$ zu der Größe $A = -n(a+b+c) + p\omega + p'\omega'$ ergänzt, ergänzt auch die Summe $k'_{p+1} + \cdots + k'_{3n}$ zu einer Größe, die sich von A nur um ein vielfaches der Periodizitätsmoduln unterscheiden kann; d. h. die Tripelpunktgruppen $k_{p+1}, k_{p+2}, \cdots k_{3n}$ und $k'_{p+1}, k'_{p+2}, \cdots k'_{3n}$ sind korresidual.

Ich will nun noch einige Anwendungen von der Gleichung 3): $k_1 + k_2 + \cdots + k_{3n} = -n(a+b+c)$ geben.

a) Die harmonische Tripelpolare.

Wir haben im Abschnitt 3. zu dem Tangentialtripelpunkte k' das Quadrupel der Berührungspunkte der vier weiteren von diesem Punkt ausgehenden Tangenten bestimmt und dafür den Ausdruck gefunden: $x = -\frac{a+b+c}{2} + \frac{p\omega + p'\omega'}{2} - \frac{k'}{2}$. Ist nun k' ein Tripelwendepunkt, z. B. $= -\frac{a+b+c}{3}$, so erhalten wir:

$$x = -\frac{a+b+c}{2} + \frac{p\omega + p'\omega'}{2} + \frac{a+b+c}{6} = -\frac{a+b+c}{3} + \frac{p\omega + p'\omega'}{2};$$

Digitized by Google

$x_1 = -\frac{a+b+c}{3}$ fällt mit dem Tripelwendepunkte selbst zusammen.

$x_2 = -\frac{a+b+c}{3} + \frac{\omega}{2}$

$x_3 = -\frac{a+b+c}{3} + \frac{\omega'}{2}$

$x_4 = -\frac{a+b+c}{3} + \frac{\omega+\omega'}{2}$

$x_2 + x_3 + x_4 = -(a+b+c)$; d. h. die drei Berührungstripelpunkte liegen auf einer Geraden, der „harmonischen Tripelpolare" zu dem Tripelwendepunkte $-\frac{a+b+c}{3}$.

b) Irgend eine Gerade wpq durch den Wendepunkt w schneidet bekanntlich auf der C_3 zwei Punkte p und q von der Eigenschaft aus, daß ein Kegelschnitt die C_3 in p und q je dreipunktig berührt; fallen die beiden Punkte in einen Punkt r der harmonischen Polare zusammen, so berührt eine C_2 die C_3 in r sechspunktig.

Wir wollen diesen Satz auf unser Tripelpunktsystem übertragen. Der Tripelwendepunkt w habe den Parameter $-\frac{a+b+c}{3}$, irgend eine durch ihn gelegte Tripelgerade schneide einen Tripelpunkt mit dem Parameter p aus; der dritte Schnittpunkt ist dann $q = -(a+b+c) - p + \frac{a+b+c}{3} = -\frac{2}{3}(a+b+c) - p$. Es gibt alsdann eine C_6, die in den drei Punkten des Tripelpunktes p und in denen von q je dreifach berührt; denn es ist

$$3p + 3\cdot\left[-\frac{2}{3}(a+b+c) - p\right] = -2(a+b+c).$$

Lassen wir nun p und q in einen Tripelpunkt r der harmonischen Tripelpolare zusammenfallen, so ist

$$6\cdot\left(-\frac{a+b+c}{3} + \frac{p\omega + p'\omega'}{2}\right) \equiv -2(a+b+c) \pmod{\omega, \omega'},$$

woraus ersichtlich ist, daß tatsächlich jeder dieser Tripelpunkte $-\left(-\frac{a+b+c}{3} + \frac{p\omega+p'\omega'}{2}\right)$ — mit seinen drei je sechsfach zu zählenden Punkten 18 Punkte ergibt, die die Schnittpunkte einer C_6 mit der C_3 sind.

10. Wir haben bisher der Lage des Ausgangsdreieckes a, b, c keine Beachtung geschenkt. Es läßt sich nun aber zeigen, daß bei entsprechender Auswahl dieses Dreieckes unsere Parametergleichungen sich einfacher gestalten. Wählen wir nämlich als solches einen Tripelwendepunkt, z. B.

Digitized by Google

$$a' = a - \frac{a+b+c}{3},\ b' = b - \frac{a+b+c}{3},\ c' = c - \frac{a+b+c}{3},$$

so ist $$a' + b' + c' \equiv o \pmod{\omega, \omega'};$$

in diesem Falle stimmen also die Parametergleichungen der Tripelpunkte mit den Parametergleichungen der einfachen Punkte überein, da ja in den ersteren die rechte Seite immer ein Vielfaches von $-(a+b+c)$ ist. Diese Übereinstimmung läßt eine bemerkenswerte geometrische Deutung zu. Betrachten wir den Tripelpunkt

$$a - \frac{a+b+c}{3} + k = a' + k, \quad b - \frac{a+b+c}{3} + k = b' + k,$$

$$c - \frac{a+b+c}{3} + k = c' + k,$$ so ist $a' + k$ offenbar der dritte Schnittpunkt der Verbindungslinie der zwei Punkte $-a'$ und $-k$, $b' + k$, ebenso der dritte Schnittpunkt der Geraden $(-b', -k)$, $c' + k$, der dritte Schnittpunkt der Geraden $(-c', -k)$; d. h. der Tripelpunkt $a' + k$, $b' + k$, $c' + k$ wird erhalten als Projektion des Tripelwendepunktes $(-a', -b', -c')$ von dem Punkte $-k$ aus. Dieser Tripelwendepunkt gehört dem System an, das man erhält, wenn man sämtliche Tripelpunkte des gegebenen Systems $(a + k, b + k, c + k)$ von dem Wendepunkte 0 aus projiziert. Wir erhalten somit unser Tripelpunktsystem, wenn wir diesen Tripelwendepunkt $\left(-a + \frac{a+b+c}{3}, -b + \frac{a+b+c}{3}, -c + \frac{a+b+c}{3}\right)$ von sämtlichen Punkten $-k$ der C_3 aus projizieren. Durch dieses Arrangement wird also zwischen unserem Tripelpunktsystem und dem System der einfachen Punkte der C_3 eine perspektivische Beziehung hergestellt: Die drei Punkte eines Tripelpunktes k ergeben sich als die Projektion der drei in einer Geraden liegenden Punkte $-a + \frac{a+b+c}{3}, -b + \frac{a+b+c}{3}, -c + \frac{a+b+c}{3}$; das zugehörige Projektionszentrum $-k$ ist der dem Tripelpunkte k entsprechende Punkt. Liegen die drei einfachen Punkte $-k_1$, $-k_2$, $-k_3$ auf einer Geraden, dann bilden die zugehörigen Tripelpunkte k_1, k_2, k_3 eine Tripelgerade; ist $k_1 = k_2$ und $-k_3$ der Tangentialpunkt von $-k_1$, dann ist auch der zugehörige Tripelpunkt k_3 der Tangentialpunkt des Tripelpunktes k_1 u. s. w.

11. Ich will nun die Beschaffenheit einer Tripelgeraden näher untersuchen. Eine solche Tripelgerade wird offenbar von einem Büschel von C_3 veranlaßt, der zwei in je drei Geraden zerfallende Kurven hat, $l_1 l_2 l_3$ und $m_1 m_2 m_3$. Fig. 1 (s. folgende Seite) enthält drei in einer Tripelgeraden liegende Tripelpunkte:

$$\alpha) \quad \begin{matrix} a + k_1 & b + k_1 & c + k_1 \\ a + k_2 & b + k_2 & c + k_2 \\ a + k_3 & b + k_3 & c + k_3 \end{matrix};$$

Digitized by Google

jede der drei wagrechten Zeilen von α) gibt die drei einfachen Punkte, die zu einem Tripelpunkte sich zusammensetzen. Daß die drei Tripelpunkte auf einer Tripelgeraden liegen, ergibt sich daraus, daß folgende Geraden vorhanden sind (s. Fig. 1): $a+k_1\ b+k_2\ c+k_3$ und $a+k_1\ b+k_3\ c+k_2$; $b+k_1\ a+k_2\ c+k_3$ und $b+k_1\ c+k_2\ a+k_3$; $c+k_1\ a+k_2\ b+k_3$ und $c+k_1\ a+k_3\ b+k_2$ (s. § 1.).

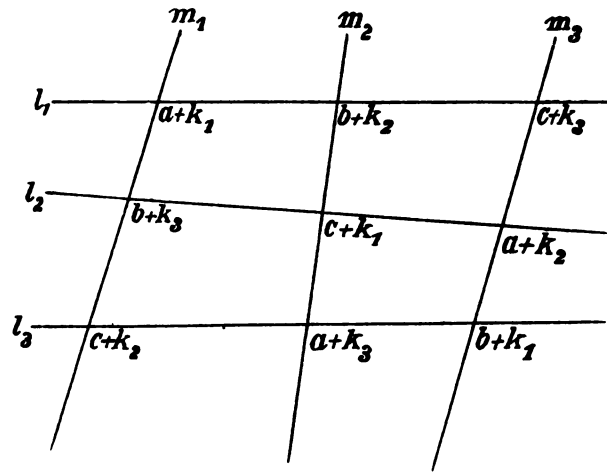


Fig. 1.

Bestimmen wir nun aber dieselben Geraden anstatt aus der Zeichnung aus dem System α), so springt beim Ablesen dieser Geraden die vollkommene Analogie mit der Auswertung einer Determinante in die Augen. Nun können bei der Berechnung einer Determinante die Vertikalreihen in gleicher Weise benützt werden wie die Horizontalreihen. Es ist daher zu vermuten, daß vielleicht auch die Vertikalreihen Tripelpunkte einer Tripelgeraden sind. In der Tat sieht man sofort, daß auch $a+k_1\ a+k_2\ a+k_3$, $b+k_1\ b+k_2\ b+k_3$, $c+k_1\ c+k_2\ c+k_3$ Tripelpunkte eines Tripelpunktsystems sind: Der Ausgangstripelpunkt ist $k_1\ k_2\ k_3$, die Parameter der drei Tripelpunkte sind bezw. a, b, c. Wir wollen die zwei Geraden, die in α) enthalten sind, zwei konjugierte Gerade nennen und kommen so zu dem Satze:

Zu jeder Tripelpunktgeraden gehört eine konjugierte Gerade.

12. Fortsetzung. Die weiteren Betrachtungen, die sich hier anstellen lassen, knüpfen sich an die Wendepunkte der beiden Tripelpunktsysteme. Die Wendepunkte des ersten Systems mit dem Ausgangstripelpunkte (a, b, c) sind gegeben durch

Digitized by Google

$$\beta) \quad -\frac{a+b+c}{3}+\frac{p\omega+p'\omega'}{3};$$

die des zweiten Systems mit dem Ausgangspunkte (k_1, k_2, k_3) durch

$$\gamma) \quad -\frac{k_1+k_2+k_3}{3}+\frac{p\omega+p'\omega'}{3}.$$

Nun ist (s. Fig. 1) $a+k_1+b+k_2+c+k_3 \equiv 0 \pmod{\omega, \omega'}$; also

$$k_1+k_2+k_3 = -(a+b+c)+p\omega+p'\omega';$$

$$\frac{k_1+k_2+k_3}{3} = -\frac{a+b+c}{3}+\frac{p\omega+p'\omega'}{3};$$

folglich kann $\gamma)$ ersetzt werden durch $\frac{a+b+c}{3}+\frac{p\omega+p'\omega'}{3}$.

Die Wendepunkte des ersten Systems sind also:

$$\varepsilon) \begin{cases} a-\dfrac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \\ b-\dfrac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \\ c-\dfrac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3}; \end{cases}$$

die des zweiten Systems:

$$\varepsilon') \begin{cases} k_1+\dfrac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \\ k_2+\dfrac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \\ k_3+\dfrac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3}. \end{cases}$$

Projizieren wir diese zwei Tripelwendepunktsysteme von dem Wendepunkte 0 aus, so erhalten wir die Wendepunktsysteme, die zu den Tripelpunktsystemen $(-a, -b, -c)$ und $(-k_1, -k_2, -k_3)$ gehören. Sie sind:

$$\varphi) \begin{cases} -a+\dfrac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \\ -b+\dfrac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \\ -c+\dfrac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3}; \end{cases}$$

Digitized by Google

$$\varphi') \begin{cases} -k_1 - \dfrac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \\ -k_2 - \dfrac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \\ -k_3 - \dfrac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \end{cases}$$

Bilden wir nun die dritten Schnittpunkte der Verbindungslinien aller Punkte φ) mit allen Punkten φ'), so erhalten wir das System von Punkten

$$g) \begin{cases} a+k_1+\dfrac{p\omega+p'\omega'}{3},\ b+k_1+\dfrac{p\omega+p'\omega'}{3},\ c+k_1+\dfrac{p\omega+p'\omega'}{3}; \\ a+k_2+\dfrac{p\omega+p'\omega'}{3},\ b+k_2+\dfrac{p\omega+p'\omega'}{3},\ c+k_2+\dfrac{p\omega+p'\omega'}{3}; \\ a+k_3+\dfrac{p\omega+p'\omega'}{3},\ b+k_3+\dfrac{p\omega+p'\omega'}{3},\ c+k_3+\dfrac{p\omega+p'\omega'}{3}. \end{cases}$$

Das sind aber die Punkte unserer Anfangstripelgeraden und der acht weiteren Geraden, die sich ergeben, wenn wir die gegebene Tripelgerade von dem Wendepunkte 0 aus projizieren und die Projektion von den acht weiteren Wendepunkten aus wiederum projizieren.

13. Bevor ich dieses Ergebnis in einem Satze formuliere, muß ich eine Betrachtung über Tripelpunktsysteme zweiten Grades anstellen. Gerade so, wie wir irgend drei einfache Punkte a, b, c zur Herstellung des Tripelpunktsystems (a, b, c) benützt haben, können wir drei Tripelpunkte herausgreifen und daraus ein Tripelpunktsystem zweiten Grades bilden. Ein Tripelpunkt zweiten Grades setzt sich also aus drei Dreiecken zusammen:

$$\alpha) \begin{cases} a+h_1 & b+h_1 & c+h_1 \\ a+h_2 & b+h_2 & c+h_2 \\ a+h_3 & b+h_3 & c+h_3. \end{cases}$$

Um nun aus diesen drei beliebigen Tripelpunkten des Systems ($a+h$, $b+h$, $c+h$) das durch sie bestimmte Tripelpunktsystem zweiten Grades herzustellen, verfahren wir wie bei der Bildung eines Tripelpunktsystems ersten Grades: wir projizieren den Tripelpunkt zweiten Grades α) von irgend einem Tripelpunkt ersten Grades

$$a+m \quad b+m \quad c+m \quad \text{aus.}$$

Digitized by Google

Wir erhalten so

$$\beta)\quad \begin{cases} a-(a+b+c+h_1+m) & b-(a+b+c+h_1+m) \\ & c-(a+b+c+h_1+m) \\ a-(a+b+c+h_2+m) & b-(a+b+c+h_2+m) \\ & c-(a+b+c+h_2+m) \\ a-(a+b+c+h_3+m) & b-(a+b+c+h_3+m) \\ & c-(a+b+c+h_3+m). \end{cases}$$

Projizieren wir die so erhaltenen Punkte β) neuerdings wieder von allen einfachen Tripelpunkten des Systems $(a+h, b+h, c+h)$ aus, indem wir als Projektionszentrum irgend einen Tripelpunkt $a-k$, $b-k$, $c-k$ nehmen und in den erhaltenen Ausdrücken k variabel sein lassen, so erhalten wir

$$\begin{array}{lll} a-[-k-(h_1+m)] & b-[-k-(h_1+m)] & c-[-k-(h_1+m)] \\ a-[-k-(h_2+m)] & b-[-k-(h_2+m)] & c-[-k-(h_2+m)] \\ a-[-k-(h_3+m)] & b-[-k-(h_3+m)] & c-[-k-(h_3+m)], \end{array}$$

oder, wenn wir die Konstanten h_i+m jedesmal durch einen Buchstaben l_i ersetzen — $i=1, 2, 3$ —:

$$\gamma)\quad \begin{cases} a+l_1+k & b+l_1+k & c+l_1+k \\ a+l_2+k & b+l_2+k & c+l_2+k \\ a+l_3+k & b+l_3+k & c+l_3+k. \end{cases}$$

γ) stellt bei variablem k ein solches Tripelpunktsystem zweiten Grades dar; jedes k ergibt drei Dreiecke, die zusammen einen Tripelpunkt zweiten Grades bilden.

Anmerkung. In ganz analoger Weise lassen sich Tripelpunkte 3., 4., ... n^{ten} Grades bilden.

14. Sind nun z. B. zwei derartige Tripelpunkte zweiten Grades k_1 und k_2 gegeben:

$$\begin{array}{llll} \delta_1) & a+l_1+k_1 & b+l_1+k_1 & c+l_1+k_1 \\ \delta_2) & a+l_2+k_1 & b+l_2+k_1 & c+l_2+k_1 \\ \delta_3) & a+l_3+k_1 & b+l_3+k_1 & c+l_3+k_1; \\ \delta_1') & a+l_1+k_2 & b+l_1+k_2 & c+l_1+k_2 \\ \delta_2') & a+l_2+k_2 & b+l_2+k_2 & c+l_2+k_2 \\ \delta_3') & a+l_3+k_2 & b+l_3+k_2 & c+l_3+k_2, \end{array}$$

so bestimmen diese zwei Tripelpunkte eine Tripelgerade und wir erhalten den dritten dieser Geraden zugehörigen Tripelpunkt,

Digitized by Google

wenn wir in der uns geläufigen Weise Dreieck δ_1 mit Dreieck δ_2' und mit Dreieck δ_3' und ebenso δ_2 mit δ_3' verbinden.

δ_1 und δ_2', ebenso wie δ_2 und δ_1', ergeben:

$$a - [a+b+c+l_1+l_2+k_1+k_2],$$
$$b - [a+b+c+l_1+l_2+k_1+k_2],$$
$$c - [a+b+c+l_1+l_2+k_1+k_2]$$

oder wenn wir $+l_1+l_2+l_3-(l_1+l_2+l_3)$ hinzufügen:

$$\varepsilon_3)\quad a+l_3 - [a+b+c+l_1+l_2+l_3+k_1+k_2],$$
$$b+l_3 - [a+b+c+l_1+l_2+l_3+k_1+k_2],$$
$$c+l_3 - [a+b+c+l_1+l_2+l_3+k_1+k_2].$$

δ_1 und δ_3', ebenso wie δ_3 und δ_1', ergeben geradeso:

$$\varepsilon_2)\quad a+l_2 - M, \quad b+l_2 - M, \quad c+l_2 - M,$$

wenn wir $a+b+c+l_1+l_2+l_3+k_1+k_2$ der Kürze wegen mit M bezeichnen.

δ_2 und δ_3', ebenso wie δ_3 und δ_2', ergeben:

$$\varepsilon_1)\quad a+l_1 - M, \quad b+l_1 - M, \quad c+l_1 - M.$$

In eindeutiger Weise veranlassen also die Tripelpunkte zweiten Grades δ und δ' den Tripelpunkt ε, der mit ihnen auf derselben Tripelgeraden liegt. Nehmen wir schließlich $k_1 = k_2 = k$, dann geht δ' in δ über und ε ist der Tangentialpunkt von δ; statt $k_1 + k_2$ muß es dann in den Ausdrücken ε $2k$ heißen. Wir erhalten also zu dem Tripelpunkte zweiten Grades δ seinen Tangentialpunkt ε, wenn wir δ_1 mit δ_2 und δ_3 und δ_2 mit δ_3 verbinden. Soll schließlich dieser Tangentialpunkt ε mit δ zusammenfallen, δ also ein Wendepunkt sein, so muß ε_1, das Ergebnis der Verbindung von δ_2 mit δ_3, zusammenfallen mit δ_1; also muß

$$a+l_1 - [a+b+c+l_1+l_2+l_3+2k] \equiv a+l_1+k;$$

ebenso $b+l_1 - [a+b+c+l_1+l_2+l_3+2k] \equiv b+l_1+k$

und $c+l_1 - [a+b+c+l_1+l_2+l_3+2k] \equiv c+l_1+k$ sein.

Aus jeder dieser drei Gleichungen ergibt sich:

$$k = -\frac{a+b+c+l_1+l_2+l_3}{3} + \frac{p\omega + p'\omega'}{3}.$$

Digitized by Google

Setzen wir nun

$$l_1 - \frac{a+b+c+l_1+l_2+l_3}{3} = k_1,$$

$$l_2 - \frac{a+b+c+l_1+l_2+l_3}{3} = k_2,$$

$$l_3 - \frac{a+b+c+l_1+l_2+l_3}{3} = k_3,$$

so ergeben sich demnach für die Wendepunkte unseres Tripelpunktsystems zweiten Grades die Ausdrücke

$$\zeta_1)\ a+k_1+\frac{p\omega+p'\omega'}{3},\quad b+k_1+\frac{p\omega+p'\omega'}{3},\quad c+k_1+\frac{p\omega+p'\omega'}{3};$$

$$\zeta_2)\ a+k_2+\frac{p\omega+p'\omega'}{3},\quad b+k_2+\frac{p\omega+p'\omega'}{3},\quad c+k_2+\frac{p\omega+p'\omega'}{3};$$

$$\zeta_3)\ a+k_3+\frac{p\omega+p'\omega'}{3},\quad b+k_3+\frac{p\omega+p'\omega'}{3},\quad c+k_3+\frac{p\omega+p'\omega'}{3}.$$

Diese Punkte decken sich aber mit den Punkten *g*) am Ende von § 12. Die neun Wendepunkte eines Tripelpunktsystems zweiten Grades bestehen also aus neun Tripelgeraden eines Systems ersten Grades, die in einem derartigen Zusammenhange untereinander stehen, daß man aus einer die acht anderen erhält, wenn man die ersten von einem der neun einfachen Wendepunkte, z. B. dem Wendepunkte 0, aus projiziert; sodann diese Projektion neuerdings wieder von den acht anderen Wendepunkten aus projiziert [vgl. den Schluß von 12)].

Dieses Ergebnis steht mit unseren früheren Wahrnehmungen im Einklange: Die drei Schnittpunkte einer Geraden mit der C_3 bilden zusammen einen Tripelwendepunkt ersten Grades; es ist also folgerichtig, daß ebenso die drei Tripelpunkte einer einfachen Tripelgeraden einen Tripelwendepunkt zweiten Grades bilden.

15. Wir können nunmehr die in 12) erörterten Beziehungen zwischen den Tripelwendepunktsystemen ersten Grades φ) und φ') und dem zugehörigen Tripelwendepunktsystem zweiten Grades *g*.

$$\varphi)\ \begin{cases} -a+\dfrac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \\ -b+\dfrac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \\ -c+\dfrac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3}; \end{cases}$$

Digitized by Google

$$\varphi') \begin{cases} -k_1 - \dfrac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \\ -k_2 - \dfrac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \\ -k_3 - \dfrac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3}; \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} a+k_1+\dfrac{p\omega+p'\omega'}{3}, & b+k_1+\dfrac{p\omega+p'\omega'}{3}, & c+k_1+\dfrac{p\omega+p'\omega'}{3} \\ a+k_2+\dfrac{p\omega+p'\omega'}{3}, & b+k_2+\dfrac{p\omega+p'\omega'}{3}, & c+k_2+\dfrac{p\omega+p'\omega'}{3} \\ a+k_3+\dfrac{p\omega+p'\omega'}{3}, & b+k_3+\dfrac{p\omega+p'\omega'}{3}, & c+k_3+\dfrac{p\omega+p'\omega'}{3} \end{cases}$$

kurz so aussprechen:

Hat man zwei Tripelwendepunktsysteme 1. Grades φ) und φ') und verbindet jeden der 27 Punkte des einen Systems mit jedem der 27 Punkte des anderen, so bilden die dritten Schnittpunkte der Verbindungslinien ein Tripelwendepunktsystem zweiten Grades g). Wir wollen dieses Resultat noch etwas genauer betrachten.

Die zwei Systeme φ) und φ') veranlassen, wenn wir jeden einfachen Punkt von φ mit jedem von φ' verbinden, 27^2 Verbindungslinien. Da nun jede dieser Geraden durch einen der 81 Punkte des Tripelwendepunktsystems zweiten Grades g geht, so gehen also allemal 9 dieser 27^2 Verbindungslinien durch einen und denselben Punkt von g). Daß das tatsächlich der Fall ist, kann man aus den Ausdrücken φ, φ' und g ohne weiteres ablesen. So z. B. gehen durch den Punkt $a+k_1$ von g) 9 Geraden nach den 9 Punkten von φ): $-a+\dfrac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3}$, die sich ergeben, wenn man p und p' jeden der drei Werte 1, 2, 3 gibt. $a+k_1$ und $-a+\dfrac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3}$ ergeben aber für die dritten Schnittpunkte der Verbindungslinien den Ausdruck von φ'):

$$-k_1-\frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3}.$$

Die Frage, wie viele von diesen 27^2 Linien reell und imaginär sind, ist leicht zu entscheiden, da wir in unserer Konfiguration die Tripelwendepunktsysteme ersten Grades φ) und φ') beliebig annehmen dürfen und ein beliebiger imaginärer Punkt, mit einem zweiten beliebigen imaginären Punkt verbunden, natürlich eine imaginäre Gerade liefert. Nun hat jedes der Tripelwendepunktsysteme φ) und φ') drei reelle und sechs imaginäre Geraden; die drei reellen Geraden haben entweder je drei reelle Punkte oder

Digitized by Google

je einen; unter den 27^2 Geraden sind also höchstens 81 reell; möglich ist auch, daß nur 27 oder auch daß nur 9 reell sind.

Daß tatsächlich $\varphi)$ und $\varphi')$ bei der Herstellung der Konfiguration $[\varphi), \varphi'), g)]$ beliebig angenommen werden dürfen, erkennen wir, wenn wir die Ausgangstripelgerade

$$\begin{array}{lll} a+k_1 & b+k_1 & c+k_1 \\ a+k_2 & b+k_2 & c+k_2 \\ a+k_3 & b+k_3 & c+k_3 \end{array}$$

betrachten. Mit dieser Tripelgeraden ist auch das Parametersystem

$$\varphi)\begin{cases} -a+\dfrac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \\ -b+\dfrac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \\ -c+\dfrac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \end{cases}$$

bestimmt. Dieses System ist aber, wie man sieht, schon mit dem Tripelpunkt $a\,b\,c$ gegeben, gehört also zu sämtlichen Tripelgeraden des Tripelpunktsystems (a, b, c). Selbstverständlich erhalten wir aber im allgemeinen zu $\varphi)$ und je zwei Tripelpunktsystemen zweiten Grades $g_1)$ und $g_2)$ zwei verschiedene Systeme φ'. Wir werden also zu dem System $\varphi)$ so viele Systeme $\varphi')$ konstruieren können, als in dem Tripelpunktsystem (a, b, c) Tripelwendepunktsysteme zweiten Grades $g)$ sich bilden lassen. Man wird also tatsächlich zur Bildung der Konfiguration $[\varphi), \varphi'), g)]$ $\varphi)$ und $\varphi')$ beliebig annehmen dürfen. Wir erkennen gleichzeitig, weil $\varphi)$ durch a, b, c, $\varphi')$ durch k_1, k_2, k_3 bestimmt ist:

Es gibt neun Tripelgeraden des Tripelpunktsystems (a, b, c), deren konjugierte Tripelgeraden wiederum demselben Tripelpunktsystem (k_1, k_2, k_3) angehören. Es sind dies die Geraden

$$\begin{array}{lll} a+k_1+\dfrac{p\omega+p'\omega'}{3}, & b+k_1+\dfrac{p\omega+p'\omega'}{3}, & c+k_1+\dfrac{p\omega+p'\omega'}{3} \\ a+k_2+\dfrac{p\omega+p'\omega'}{3}, & b+k_2+\dfrac{p\omega+p'\omega'}{3}, & c+k_2+\dfrac{p\omega+p'\omega'}{3} \\ a+k_3+\dfrac{p\omega+p'\omega'}{3}, & b+k_3+\dfrac{p\omega+p'\omega'}{3}, & c+k_3+\dfrac{p\omega+p'\omega'}{3}, \end{array}$$

deren jede sich durch einen bestimmten Wert von p und p' ergibt, und die zusammen das Tripelwendepunktsystem zweiten Grades $g)$ bilden.

Digitized by Google

Die erste dieser Tripelgeraden ist bestimmt durch die drei Tripelpunkte

$$1) \quad \begin{matrix} a+k_1 & b+k_1 & c+k_1 \\ a+k_2 & b+k_2 & c+k_2 \\ a+k_3 & b+k_3 & c+k_3, \end{matrix}$$

wo jede wagrechte Reihe einen Tripelpunkt der Geraden gibt und $k_3 = -(a+b+c+k_1+k_2)$ ist. Die zu 1) gehörige konjugierte Gerade setzt sich aus den Tripelpunkten zusammen:

$$1') \quad \begin{matrix} k_1+a & k_2+a & k_3+a \\ k_1+b & k_2+b & k_3+b \\ k_1+c & k_2+c & k_3+c, \end{matrix}$$

die dem Tripelpunktsystem (k_1, k_2, k_3) angehören.

Eine zweite der neun erwähnten Geraden des Tripelpunktsystems (a, b, c) ist gegeben durch:

$$2) \quad \begin{matrix} a+\left(k_1+\frac{\omega}{3}\right) & b+\left(k_1+\frac{\omega}{3}\right) & c+\left(k_1+\frac{\omega}{3}\right) \\ a+\left(k_2+\frac{\omega}{3}\right) & b+\left(k_2+\frac{\omega}{3}\right) & c+\left(k_2+\frac{\omega}{3}\right) \\ a+\left(k_3+\frac{\omega}{3}\right) & b+\left(k_3+\frac{\omega}{3}\right) & c+\left(k_3+\frac{\omega}{3}\right), \end{matrix}$$

wo die eingeklammerten Ausdrücke die Parameter der Tripelpunkte bedeuten, während a, b, c der Ausgangstripelpunkt ist. Die zu 2) konjugierte Tripelgerade hat die drei Tripelpunkte:

$$2') \quad \begin{matrix} k_1+\left(a+\frac{\omega}{3}\right) & k_2+\left(a+\frac{\omega}{3}\right) & k_3+\left(a+\frac{\omega}{3}\right) \\ k_1+\left(b+\frac{\omega}{3}\right) & k_2+\left(b+\frac{\omega}{3}\right) & k_3+\left(b+\frac{\omega}{3}\right) \\ k_1+\left(c+\frac{\omega}{3}\right) & k_2+\left(c+\frac{\omega}{3}\right) & k_3+\left(c+\frac{\omega}{3}\right), \end{matrix}$$

wo wieder die eingeklammerten Ausdrücke die Parameter, k_1, k_2, k_3 der Ausgangspunkt ist. Die zu 2) konjugierte Tripelgerade 2') gehört also wieder dem Tripelpunktsystem (k_1, k_2, k_3) an u. s. w.

16. Bevor ich zu einer anderen Gattung von Punkts stemen übergehe, will ich an einem Beispiel zeigen, wie sich unsere Tripelpunkttheorie als Hilfsmittel zur Ableitung von Sätzen der gewöhnlichen Punkttheorie verwerten läßt. Sind t_1, t_2, t_3, t_4 die vier von einem Punkte a' der C_3 ausgehenden weiteren vier Tangenten, mit den Berührungspunkten a_1, a_2, a_3, a_4, so gibt es einen Kegel-

Digitized by Google

schnitt durch a_1, a_2, a_3, a_4, der in a' berührt. Hat ebenso eine Gruppe von vier Tripeltangenten die Berührungstripelpunkte:

$$1)\quad a, b, c;\quad 2)\quad a+\frac{\omega}{2},\quad b+\frac{\omega}{2},\quad c+\frac{\omega}{2};$$

$$3)\quad a+\frac{\omega'}{2},\qquad b+\frac{\omega'}{2},\qquad c+\frac{\omega'}{2};$$

$$4)\quad a+\frac{\omega+\omega'}{2},\quad b+\frac{\omega+\omega'}{2},\quad c+\frac{\omega+\omega'}{2}$$

und den gemeinsamen Tangentialtripelpunkt 5) $a-(a+b+c)$, $b-(a+b+c)$, $c-a+b+c$ — der Einfachheit wegen wurde der Ausgangstripelpunkt a, b, c, der den Parameter 0 hat, verwendet —, so läßt sich eine C_6 durch die vier Tripelpunkte 1) bis 4) legen, die die C_3 in den Eckpunkten des Dreiecks 5) berührt. Das läßt sich am einfachsten durch den Nachweis zeigen, daß für die Parameter unserer sechs Tripelpunkte, der gemeinsame Tangentialtripelpunkt 5) zweifach gezählt, die Gleichung besteht

$$k_1+k_2+\cdots+k_6\equiv-2(a+b+c)\,(\mathrm{mod}\,\omega,\omega')\,(\text{s. § 8, Gleichung 2}).$$

Diese Summe der Parameter ist in unserem Falle:

$$0+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}+\frac{\omega+\omega'}{2}+2\cdot\left[-(a+b+c)\right]=-2(a+b+c).$$

Nehmen wir nun als Ausgangsdreieck ein Dreieck abc mit zwei unendlich benachbarten Eckpunkten b und c, so findet dieses Zusammenfallen der zwei b und c entsprechenden Eckpunkte natürlich bei sämtlichen Tripelpunkten des Systems (a, b, c) statt; es gibt also (s. Fig. 2) eine C_6, die durch die Tripelpunkte $a_1c_1c_1$, $a_2c_2c_2$, $a_3c_3c_3$, $a_4c_4c_4$ je einfach und durch den gemeinsamen Tangentialtripelpunkt $a'c'c'$ doppelt hindurchgeht, die also mit der C_3 die Punkte a_1, a_2, a_3, a_4 einfach, die Punkte c_1, c_2, c_3, c_4, a' zweifach und den Punkt c' vierfach gemeinsam hat; dabei ist a' der Tangentialpunkt der vier Punkte c_1, c_2, c_3, c_4.

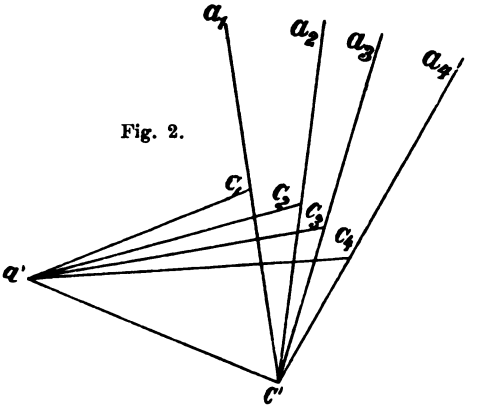


Fig. 2.

Nehmen wir nun eine zerfallene C_6, von welcher die Tangenten (a', c_1) und (a', c_2) ferner die Geraden (c', a_3) und (c', a_4) Bestand-

Digitized by Google

teile sind, so bleibt ein Kegelschnitt übrig, der durch a_1, a_2, c_3, c_4 und zweimal durch c' geht; also:

Hat man ein Tangentenquadrupel t_1, t_2, t_3, t_4 mit gemeinsamem Tangentialpunkt a' (s. Fig. 2) und bezw. den Berührungspunkten c_1, c_2, c_3, c_4, und legt man durch diese vier Berührungspunkte irgend ein Quadrupel von Geraden $c' c_1 a_1$, $c' c_2 a_2$, $c' c_3 a_3$, $c' c_4 a_4$, beliebig, weil c' irgend ein Punkt der C_3 ist, während $a_1, a_2 \ldots$ die dritten Schnittpunkte der Geraden $c' c_1$, $c' c_2 \ldots$ sind, so existieren die sechs Kegelschnitte:

$$
\begin{aligned}
&c' c' c_1 c_2 a_3 a_4\\
&c' c' c_1 c_3 a_2 a_4\\
&c' c' c_1 c_4 a_2 a_3\\
&c' c' c_2 c_3 a_1 a_4\\
&c' c' c_2 c_4 a_1 a_3\\
&c' c' c_3 c_4 a_1 a_2 .
\end{aligned}
$$

Anmerkung: Lassen wir c' mit dem Tangentialpunkt a' zusammenfallen, so fallen die Punktgruppen a und c zusammen und statt der sechs Kegelschnitte erhalten wir als speziellen Fall den einen bekannten Kegelschnitt $(c_1, c_2, c_3, c_4, a', a')$.

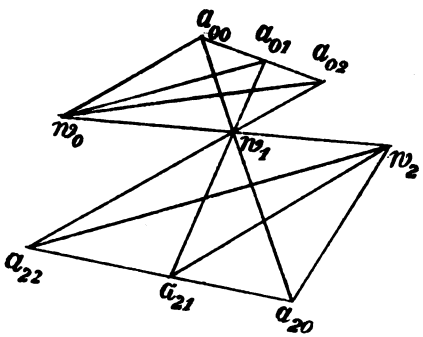


Fig. 3.

17. Fortsetzung. Erwähnenswert sind die Beziehungen, die sich für die Lage dreier in einer Geraden liegenden Wendepunkte und der Punkte ihrer harmonischen Polaren aus diesem Satze ergeben (s. die schematische Fig. 3).

Seien die Wendepunkte w_0, w_1, w_2 und die Punkte der zu w_0 und w_2 gehörigen harmonischen Polaren bezw. a_{00}, a_{01}, a_{02} und a_{20}, a_{21}, a_{22}, so daß die Punkte a_{00}, w_1, a_{20}; a_{01}, w_1, a_{21}; a_{02}, w_1, a_{22} jedesmal in einer Geraden liegen. Wählen wir alsdann als das Tangentenquadrupel die Wendetangente und die weiteren Tangenten in w_0, die also die Berührungspunkte $w_0, a_{00}, a_{01}, a_{02}$ haben, und wählen als Punkt c' (s. Fig. 2) den Wendepunkt w_1, so geht durch jedes der folgenden sechs Punktquadrupel ein Kegelschnitt, der die C_3 in w_1 berührt:

$$
\begin{aligned}
&w_0 a_{00} a_{21} a_{22} \qquad w_2 a_{20} a_{01} a_{02}\\
&w_0 a_{01} a_{20} a_{22} \qquad w_2 a_{21} a_{00} a_{02}\\
&w_0 a_{02} a_{21} a_{20} \qquad w_2 a_{22} a_{01} a_{00} .
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

Wie leicht ersichtlich ist, erhält man dieselben sechs Kegelschnitte, wenn man das von w_0 ausgehende Tangentenquadrupel durch das von w_2 ausgehende ersetzt.

Eine Inflexionsachse mit den zugehörigen drei harmonischen Polaren gibt also Anlaß zu 18 Kegelschnitten, von denen je sechs in einem der drei auf der Inflexionsachse liegenden Wendepunkte berühren und deren übrige vier Schnittpunkte Punkte der harmonischen Polaren sind. Da durch jeden Wendepunkt vier Inflexionsachsen gehen, so berühren demnach in jedem Wendepunkte 24 solche Kegelschnitte. Ihre Zahl beträgt also im ganzen 216. Davon sind aber höchstens die 18 zu der reellen Inflexionsachse gehörigen reell.

16 *a*). Eine weitere bemerkenswerte Gruppe von vier Kegelschnitten erhalten wir, wenn wir den allgemeinen Satz, der die Grundlage von 16) bildet, in anderer Weise spezialisieren.

Dieser allgemeine Satz besagt, daß die Gruppe der vier Punkte (s. Fig. 2) $a, a+\frac{\omega}{2}, a+\frac{\omega'}{2}, a+\frac{\omega+\omega'}{2}$ je einfach zählend, das Quadrupel der Punkte $c, c+\frac{\omega}{2}, c+\frac{\omega'}{2}, c+\frac{\omega+\omega'}{2}$ je zweifach gerechnet, der Punkt a' zweifach und der Punkt c' vierfach zählend 18 assoziierte Punkte bilden. So oft nun von diesen 18 Punkten viermal drei Punkte, z. B. die Punkte a', c, c; $c', c+\frac{\omega}{2}, a+\frac{\omega}{2}$; $c', c+\frac{\omega'}{2}, a+\frac{\omega'}{2}$; $c', c+\frac{\omega+\omega'}{2}, a+\frac{\omega+\omega'}{2}$, auf je einer Geraden liegen, so oft liegen die übrigen sechs Punkte auf einer C_3; in unserem Beispiele heißen diese sechs Punkte $a', c', a, c+\frac{\omega}{2}, c+\frac{\omega'}{2}, c+\frac{\omega+\omega'}{2}$. Also:

Hat man ein Quadrupel von vier von einem Punkte a' der C_3 ausgehenden Tangenten, mit den Berührungspunkten c_1, c_2, c_3, c_4, und projiziert man diese vier Punkte von irgend einem Punkte c' der Kurve auf dieselbe, so erhält man das Punktquadrupel a_1, a_2, a_3, a_4. Es gehen dann durch a' und c' vier Kegelschnitte, die folgende weitere Gruppen von vier Punkten ausscheiden:

$$a_1\, c_2\, c_3\, c_4$$
$$a_2\, c_1\, c_3\, c_4$$
$$a_3\, c_1\, c_2\, c_4$$
$$a_4\, c_1\, c_2\, c_3\,.$$

Digitized by Google

17. Zu weiteren Konfigurationen führt der allgemeine Satz in 16), wenn wir in anderer Weise spezialisieren.

Ist $a'b'c'$ der Tangentialtripelpunkt zu $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$, $a_3 b_3 c_3$, $a_4 b_4 c_4$, dann gehen also durch a' die vier Geraden $b_1 c_1$, $b_2 c_2$, $b_3 c_3$, $b_4 c_4$, durch b' $a_1 c_1$ ... u. s. w. und a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3; a_4, b_4, c_4; a', b', c'; a', b', c' sind 18 assoziierte Punkte. Nun liegen z. B. c', a_3, b_3; c', a_4, b_4; b', a_1, c_1; b', a_2, c_2 auf je einer Geraden; also liegen die übrigen sechs Punkte auf einem Kegelschnitt; es sind dies die Punkte $a', a' c_3, c_4, b_1, b_2$. Solcher Kegelschnitte, die in a' berühren, gibt es sechs; jeder geht noch durch eine der folgenden Gruppen von vier weiteren Punkten:

$$b_1 b_2 c_3 c_4$$
$$b_1 b_3 c_2 c_4$$
$$b_1 b_4 c_2 c_3$$
$$b_2 b_3 c_1 c_4$$
$$b_2 b_4 c_1 c_3$$
$$b_3 b_4 c_1 c_2 .$$

In b' und c' berühren ebenfalls je sechs ähnlich zu bestimmende Kegelschnitte.

17 a). Splittern wir aber von einer durch die 18 assoziierten Punkte zu legenden C_6 die Geraden $c' a_3 b_3$, $c' a_4 b_4$, $a' b_1 c_1$, $b' a_2 c_2$ ab, so bleibt ein Kegelschnitt übrig, der durch $a', b', c_3, c_4, a_1, b_2$ geht. Solcher Kegelschnitte durch a' und b' gibt es zwölf; die zugehörigen weiteren Schnittpunktquadrupel heißen:

$$c_1 c_2 a_3 b_4$$
$$c_1 c_2 a_4 b_3$$
$$c_1 c_3 a_2 b_4$$
$$c_1 c_3 a_4 b_2$$
$$c_1 c_4 a_2 b_3$$
$$c_1 c_4 a_3 b_2$$
$$c_2 c_3 a_1 b_4$$
$$c_2 c_3 a_4 b_1$$
$$c_2 c_4 a_1 b_3$$
$$c_2 c_4 a_3 b_1$$
$$c_3 c_4 a_1 b_2$$
$$c_3 c_4 a_2 b_1 .$$

Ebenso viele ähnlich zu bestimmende Kegelschnitte gehen durch die zwei Punkte a' und c' und durch die zwei Punkte b' und c'.

Wenn wir der Kürze wegen die fünf Dreiecke $a_1 b_1 c_1 \ldots a_4 b_4 c_4$, $a'b'c'$ mit d_1, d_2, d_3, d_4, d' bezeichnen, so können wir zusammenfassend folgendes feststellen:

Digitized by Google

Durch je sechs Eckpunkte von fünf der C_3 einbeschriebenen Dreiecken d_1, d_2, d_3, d_4, d', von denen die vier ersten dem letzten umbeschrieben sind, gehen im ganzen 54 Kegelschnitte. Sie teilen sich in eine Gruppe A von dreimal sechs Kegelschnitten, die je in einem Eckpunkte von d' berühren (welcher also dann für zwei Eckpunkte zählt) und in eine Gruppe B von 36 Kegelschnitten, von welchen allemal zwölf durchein- und dasselbe Eckpunktpaar von d' hindurchgehen.

18. Es erhebt sich nun die Frage: Ist das Dreieck die einzige Figur, die als Grundlage für derartige Theorien benützt werden kann, oder gibt es nicht Systeme von der C_3 einbeschriebenen Vielecken jeder Art, bei denen solche Analogien mit der Theorie der einfachen Punkte der C_3 möglich sind? Wir gehen zur Entscheidung dieser Frage von irgend einem System der C_3 einbeschriebener n-Ecke aus:

$$1)\quad a_1 + h,\ a_2 + h,\ a_3 + h, \ldots a_p + h \ldots a_n + h,$$

wobei $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ das Ausgangsvieleck, h der variable Parameter sei.

Halten wir nun für das aufzufindende neue System an der Definition fest, daß zu einem Vieleck das Tangentialvieleck durch Bestimmung der dritten Schnittpunkte der Seiten erhalten wird, so muß dasselbe System auch gegeben sein durch

$$2)\quad -2h - (a_1 + a_2),\ -2h - (a_2 + a_3),\ -2h - (a_3 + a_4), \ldots;$$

dabei ist $-2h$ der variable Parameter. Die Systeme 1) und 2) werden nun identisch, wenn:

$$a_1 + a_2 = -a_1$$
$$a_2 + a_3 = -a_2 \text{ u. s. w.;}$$

wir erhalten alsdann:

$$a_2 = -2a_1,$$
$$a_3 = -2a_2 = 4a_1 \text{ u. s. w.;}$$

d. h. das n-Ecksystem, zu dem wir so kommen, ist von der Art, daß das Ausgangs-n-Eck ein der C_3 um- und einbeschriebenes Vieleck ist. Ein solches n-Eck hat also die Eckpunkte:

$$a_1 = a \cdot 2^0 (-1)^0 \qquad a_p = a \cdot 2^{p-1} (-1)^{p-1}$$
$$a_2 = a \cdot 2^1 (-1)^1 \qquad \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots$$
$$a_3 = a \cdot 2^2 (-1)^2 \qquad a_n = a \cdot 2^{n-1} \cdot (-1)^{n-1};$$
$$\vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots$$

der $(n+1)^{\text{te}}$ Eckpunkt heißt $a \cdot 2^n \cdot (-1)^n$; da dieser $(n+1)^{\text{te}}$ Eckpunkt mit dem ersten zusammenfallen muß, so haben wir

Digitized by Google

$a \cdot 2^n \cdot (-1)^n = a + p\omega + p'\omega';$

$a\left[2^n \cdot (-1)^n - 1\right] = p\omega + p'\omega';$

$a = \dfrac{p\omega + p'\omega'}{2^n \cdot (-1)^n - 1}$, wobei p u. p' irgendwelche ganze Zahlen bedeuten.

19. Wir wollen der Kürze wegen die Bezeichnung a für $\dfrac{p\omega + p'\omega'}{2^n \cdot (-1)^n - 1}$ beibehalten. Von der Brauchbarkeit eines solchen n-Eckes nun zur Bildung eines polygonalen Punktsystems

$$(a + h,\ -2a + h,\ 4a + h \ldots),$$

in welchem das Polygon den Punkt vorstellt, kann man sich leicht überzeugen. Daß der Tangentialpunkt unseres polygonalen Punktes wieder dem System angehört, haben wir schon gesehen. Nehmen wir nun etwa zwei von einander getrennt liegende Polygone, $a + h_1,\ -2a + h_1 \ldots$; $a + h_2,\ -2a + h_2 \ldots$, oder kurz: Das Polygon h_1 und das Polygon h_2, so läßt sich mittels dieser zweier Vielecke ein Vieleck h_3 konstruieren, das unserer Mannigfaltigkeit $(a + h,\ -2a + h \ldots)$ angehört. Die Möglichkeiten, diese Konstruktionen zu bewerkstelligen, sind, wie wir sehen werden, verschieden, aber das Resultat ist immer dasselbe Vieleck h_3. h_1, h_2, h_3 bilden dann eine „polygonale Gerade", die durch die zwei Punkte h_1 und h_2 bestimmt ist. Ich will nun h_3 aus h_1 und h_2 konstruieren. Ich nehme von h_1 den Punkt $(-1)^p \cdot 2^p \cdot a + h_1$, also den $(p+1)^{\text{ten}}$ Punkt, von $(-1)^0 2^0 \cdot a + h_1$ angefangen, von h_2 den Punkt von der gleichen Ordnungszahl $(-1)^p 2^p \cdot a + h_2$, so ist der dritte Schnittpunkt der Verbindungslinie dieser zwei Punkte gegeben durch

$$-h_1 - h_2 - 2 \cdot (-1)^p \cdot 2^p \cdot a = -h_1 - h_2 + (-1)^{p+1} 2^{p+1} \cdot a;$$

aber dieser Punkt ist offenbar der $(p+2)^{\text{te}}$ Punkt des Vielecks $-(h_1 + h_2)$, also des Vielecks $a - (h_1 + h_2)$, $-2a - (h_1 + h_2)$, $+4a - (h_1 + h_2) \ldots$

Wenn wir für p alle Zahlen von 1 bis n nehmen, so bekommen wir in dieser Weise alle Eckpunkte von h_3. Wir erkennen gleichzeitig die Bedingung, die für die Parameter h_1, h_2, h_3 bestehen muß, damit sie drei Punkte einer polygonalen Geraden darstellen:

$$h_1 + h_2 \equiv -h_3 \pmod{\omega, \omega'};$$

das ist dieselbe Gleichung, die auch ausdrückt, daß die einfachen Punkte h_1, h_2, h_3 in einer Geraden liegen; die Analogie erstreckt sich hier also auch auf die Form der Gleichung.

20. Daran knüpft sich naturgemäß die Frage, was hat die Gleichung

$$3)\quad h_1 + h_2 + \cdots + h_{3m} \equiv 0 \pmod{\omega, \omega'},$$

Digitized by Google

die beim einfachen Punktsystem ausdrückt, daß die Punkte mit den $3m$ Parametern auf einer C_m liegen, für unser polygonales System zu bedeuten? Was hat man unter einer polygonalen C_m zu verstehen? Die Frage erledigt sich durch eine einfache Rechnung.

Nehmen wir $3m$ Vielecke der Mannigfaltigkeit, mit den Parametern $h_1, h_2, h_3 \ldots h_{3m}$, so ist die Summe der Parameter ihrer Eckpunkte:

$$4)\quad 3m\cdot\left[a-2a+4a-\cdots+(-2)^{n-1}\cdot a\right]+ \\ +n\cdot(h_1+h_2+h_3+\cdots+h_{3m}).$$

Nun ist der erste Summand

$$3ma\left[1-2+4\cdots(-2)^{n-1}\right]= \\ =3ma\frac{(-2)^n-1}{-3}=-m\cdot a\left[(-2)^n-1\right]= \\ =-m\frac{p\omega+p'\omega'}{(-2)^n-1}\left[(-2^n-1\right]=-m\cdot(p\omega+p'\omega')\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \omega, \omega').$$

Die Summe 4) der $3mn$ Parameter ist also $\equiv 0$, wenn

$$3)\quad h_1+h_2+\cdots+h_{3m}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \omega, \omega')\ \text{ist.}$$

Also: Die Gleichung 3) drückt aus, daß die Eckpunkte der zu den $3m$ Parametern gehörigen polygonalen Punkte die Schnittpunkte einer C_{mn} mit der C_3 sind.

21. Bemerkenswert ist nun aber, daß zu zwei Vielecken h_1 und h_2 h_3 auf dreierlei Art gewonnen werden kann.

Wir betrachten wieder die drei Vielecke h_1, h_2, h_3, von der Art, daß $h_3\equiv -h_1-h_2(\mathrm{mod}\ \omega, \omega')$

h_1 habe die Eckpunkte:

$$a_1'=a+h_1,\ a_2'=-2a+h_1,\cdots a_{p+1}'=\left(-2\right)^p\cdot a+h_1$$

h_2 habe die Eckpunkte:

$$a_1''=a+h_2,\ a_2''=-2a+h_2,\cdots a_{p+1}''=\left(-2\right)^p\cdot a+h_2$$

h_3 habe die Eckpunkte:

$$a_1'''=a+h_3,\ a_2'''=-2a+h_3,\cdots a_{p+1}'''=\left(-2\right)^p\cdot a+h_3;$$

a ist, wie wir gesehen haben, $=\dfrac{p\omega+p'\omega'}{(-2)^n-1}$.

Dann ist:

$$-\left[(-2)^p a+h_1+(-2)^{p-1}\cdot a+h_2\right] \\ =-a\left[(-2)^{p-1}\cdot(-2+1)\right]-(h_1+h_2)=a(-2)^{p-1}+h_3.$$

Digitized by Google

d. h. der dritte Schnittpunkt der Verbindungslinie von a_{p+1} und a''_p ist a'''_p. Ein Eckpunkt a'''_p des Vielecks h_3 wird also durch folgende Verbindungslinien von Eckpunkten der Vielecke h_1 und h_2 ausgeschnitten: 1) durch $a'_{p-1}\ a''_{p-1}$; 2) durch $a'_{p+1}\ a''_p$; 3) durch $a'_p\ a''_{p+1}$. Die Zahl dieser Geraden ermäßigt sich auf 2, wenn h_1 und h_2 unendlich benachbart sind, weil alsdann $a'_{p+1}\ a''_p$ und $a'_p\ a''_{p+1}$ zusammenfallen. Nehmen wir also wieder ein Vieleck h und bezeichnen diesmal die Eckpunkte mit $b_1\ b_2 \cdots b_{p-1}\ b_p\ b_{p+1} \cdots b_n$; bezeichnen wir ferner die Eckpunkte des zugehörigen Tangentialvielecks h' mit $a'_1\ a'_2 \cdots a'_p \cdots a'_n$; dann führen zu dem Punkte a'_p folgende zwei Geraden: 1) die Tangente in b_{p-1}; 2) die Gerade $b_p\ b_{p+1}$.

22) Was die Wendepunkte des Systems betrifft, so sind dieselben natürlich gegeben durch $h = \frac{p\,\omega + p'\omega'}{3}$. Man erhält sie also in ihrer Gesamtheit, wenn man das um- und einbeschriebene Vieleck, welches das Ausgangspolygon bildet, von einem Wendepunkt aus projiziert und die Projektion neuerdings von allen Wendepunkten aus projiziert. Selbstverständlich lassen sich sämtliche Wendepunktbeziehungen auf unsere polygonalen Wendepunkte übertragen: je zwei derselben liegen auf einer polygonalen Inflexionsachse, die noch einen dritten enthält; es gibt zwölf solche Inflexionsachsen, durch jeden polygonalen Wendepunkt gehen vier u. s. w.

Folgender Satz ist aber auch ohne unsere Analogiebetrachtungen von Interesse: Zu jedem der C_3 um- und einbeschriebenen Vieleck A' stehen drei der Kurve einbeschriebene Vielecke B_1, B_2, B_3 von derselben Seitenzahl in der Beziehung, daß die dritten Schnittpunkte der Seiten von B_1, B_2, B_3 die Eckpunkte von A' bilden; dieselben Eckpunkte von A' sind zugleich aber auch die Tangentialpunkte der Eckpunkte von B_1, B_2, B_3: ist also a'_p ein solcher Eckpunkt von A', so ist eine der vier von a'_p ausgehenden weiteren Tangenten die Tangente $a'_{p-1}\ a'_p$, deren Berührungspunkt a'_{p-1} wieder ein Eckpunkt von A' ist; von den drei anderen Berührungspunkten b'_{p-1}, b''_{p-1}, b'''_{p-1} gehört jeder einem der drei Vielecke B_1, B_2, B_3 als Eckpunkt an:

Die drei Vielecke

$$B_1\,(b'_1\ b'_2 \cdots b'_{p-1}\ b'_p\ b'_{p+1} \cdots)$$
$$B_2\,(b''_1\ b''_2 \cdots b''_{p-1}\ b''_p\ b''_{p+1} \cdots)$$
$$B_3\,(b'''_1\ b'''_2 \cdots b'''_{p+1}\ b'''_p\ b'''_{p+1} \cdots)$$

stehen in der Beziehung zueinander, daß z. B. die Geraden $b'_{p-1}\ b''_{p-1}$, $b'_{p+1}\ b''_p$ und $b'_p\ b''_{p+1}$ alle drei durch b'''_p gehen. Drücken wir das letztere wieder in der Sprache unserer Analogie aus, so können wir kurz sagen: Die polygonalen Punkte B_1, B_2, B_3 ergeben die harmonische Polare zu dem polygonalen Wendepunkt A.

Digitized by Google

Ein Kriterium für die Stabilität der Bewegung eines materiellen Punktes in der Ebene und dessen Zusammenhang mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung.

Von **Philipp Frank** in Wien.

Es soll im folgenden ein Satz abgeleitet werden, mit dessen Hilfe es in sehr vielen Fällen möglich ist, in überaus einfacher Weise die Frage nach der Stabilität der Bewegung eines materiellen Punktes in der Ebene zu entscheiden, wenn nur die Energie und die Kräftefunktion gegeben sind. Zugleich ergibt sich der enge Zusammenhang dieses Satzes mit der Frage nach denjenigen Bahnkurven, die dem Integral der kleinsten Wirkung einen wirklichen Minimalwert erteilen.

I.

Wenn wir die Art betrachten, wie die Gleichgewichtslage eines Kräften ausgesetzten materiellen Punktes durch Nullsetzen des ersten Differenzials der Kräftefunktion ($dV = 0$, d. h. $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$) gefunden wird, und wie die Bewegungsgleichung eines materiellen Punktes sich wieder durch Nullsetzen der ersten Variation des Integrals der kleinsten Wirkung ableiten läßt, wird eine Analogie zwischen diesen beiden Prozessen leicht ins Auge fallen. Und wenn wir sehen, daß die Gleichung $dV = 0$ uns nicht nur ein mathematisches Symbol ist, das die Gleichgewichtsbedingungen in eine kurze Formel zusammenfaßt, sondern daß es auch von physikalischer Bedeutung ist, ob die betreffende Gleichgewichtslage V zu einem wirklichen Minimum macht, weil hievon die Stabilität des Gleichgewichts abhängt, ist der Gedanke naheliegend, ob nicht die Formel $\delta I = 0$ (wo I das Integral der kleinsten Wirkung ist) eine analoge Bedeutung besitzt, die man naturgemäß in einem Zusammenhang zwischen dem Minimalwert des Integrals und der Stabilität der betreffenden Bewegung suchen wird.

Hier erhebt sich zunächst die schwierige Frage nach der Definition der Stabilität einer Bewegung (oder kinetischen Stabilität), in der die einzelnen Autoren weit auseinandergehn. Eine kritische Besprechung dieser Definitionsfrage findet sich bei Klein und Sommerfeld.[1])

[1]) Theorie des Krisels, Bd. II, p. 342 ff.

Digitized by Google

Wir gehen von der Definition aus, die Routh[1]) gibt, und zwar zitieren wir sie in der ihr von Klein und Sommerfeld[2])gegebenen präziseren Form. „Eine Bewegung heiße stabil, wenn die aus einer Störung resultierenden Abweichungen zwischen entsprechenden Lagen des Systems dadurch dauernd unter eine gegebene Grenze herabgedrückt werden können, daß man die Größe der Störung unterhalb einer geeignet zu bestimmenden Grenze wählt." Diese Definition wollen wir noch für unseren speziellen Fall einrichten. Da wir vom Prinzip der kleinsten Wirkung ausgehen, gibt es für uns keine „entsprechenden Lagen". Denn durch dieses Prinzip wird nur die geometrische Figur der Bahnkurve bestimmt; die Zeit ist aus der ganzen Betrachtung eliminiert und dementsprechend wollen wir auch bei der Definition der Stabilität nicht die Lagen des Punktes, sondern nur die ursprüngliche und die gestörte Bahnkurve als Ganzes in Betracht ziehen.

Da ferner bei Anwendung des genannten Prinzips nur Bahnen mit gleicher Energie h verglichen werden, wollen wir auch nur solche Störungen in Betracht ziehen, durch die die Energie des Systems nicht geändert wird, sogenannte konservative Störungen.[3]) Eine solche Störung kann aber in unserem Falle nur darin bestehen, daß die Geschwindigkeit des materiellen Punktes plötzlich ihre Richtung, nicht aber ihren absoluten Betrag ändert. Wenn wir auch noch das „Herabdrücken der Abweichungen" für unseren speziellen Fall präzisieren und alles Gesagte zusammenfassen, gelangen wir zu folgender Definition:

Eine Bahnkurve unseres materiellen Punktes heiße dann eine vom Punkte A an stabile, wenn sich zu jedem noch so schmalen Parallelstreifen, der sich um sie abgrenzen läßt, eine positive Zahl ε so angeben läßt, daß, wenn ich in A die Geschwindigkeitsrichtung des materiellen Punktes um einen Winkel ändere, dessen absoluter Betrag kleiner als ε ist, die neue Bahnkurve auch innerhalb des abgegrenzten Parallelstreifens verläuft.

Die so definierte Stabilität wollen wir absolute Stabilität nennen, zum Unterschied von einer anderen, die wir auch verwenden müssen, um unsere Resultate in einfacher Weise ausdrücken zu können.

Bei dieser zweiten Stabilitätsdefinition schließen wir uns am engsten an die von Thomson und Tait[4]) gegebene an und setzen fest: Eine Bahnkurve heiße dann vom Punkte A an stabil, wenn sich eine solche positive Zahl ε angeben läßt, daß, wenn ich die Geschwindigkeitsrichtung des materiellen Punktes in A um einen Winkel

[1]) Treatise on the stability of a given state of motion, p. 1.
[2]) l. c. p. 345.
[3]) Thomson and Tait, Treatise on natural philosophy, Art. 346.
[4]) l. c. Art. 347.

Digitized by Google

ändern, dessen absoluter Betrag kleiner als ε ist, die neue Bahnkurve die alte immer und immer wieder schneidet. Die so definierte Stabilität bezeichnen wir als oszillierende Stabilität.

Die von Klein und Sommerfeld selbst gegebene Stabilitätsdefinition [1]) ist für unseren Zweck zu weit und würde uns nicht gestatten, unsere Resultate kurz auszusprechen. Dagegen ist unser Begriff der absoluten Stabilität noch immer weiter als der Routhsche Stabilitätsbegriff, weil Routh eine viel umfassendere Klasse von Störungen zuläßt als wir; der Thomson und Taitsche Stabilitätsbegriff wieder, der nur dieselben Störungen erlaubt wie der unsrige, verlangt von der gestörten Bahnkurve nicht nur, daß sie innerhalb eines Parallelstreifens zur ursprünglichen bleibt, sondern auch, daß sie diese immer und immer wieder schneidet. Eine Bahnkurve ist im Thomsonschen Sinne stabil, wenn sie nach unseren Definitionen sowohl absolut als oszillatorisch stabil ist. Was nun das Verhältnis der Begriffe „absolute Stabilität" und „oszillatorische Stabilität" betrifft, so kann man leicht Bewegungen angeben, die zwar oszillatorisch, aber nicht absolut stabil sind. Ein von Klein und Sommerfeld [2]) hiefür angegebenes Beispiel ist die kräftefreie Bewegung eines Punktes längs der Meridiane eines Rotationsellipsoides. Und in allen Fällen, auf die unser abzuleitendes Kriterium anwendbar ist, wird auch „oszillatorisch stabil" der weitere, „absolut stabil" der engere Begriff sein. Ob das auch allgemein gilt, wäre noch zu untersuchen [3]).

II.

Nach Festsetzung der Stabilitätsbegriffe wollen wir deren Zusammenhang mit den Minimaleigenschaften des Integrals der kleinsten Wirkung untersuchen. Wenn wir zunächst die Analogie mit den Gleichgewichtsfällen festzuhalten suchen, merken wir folgendes: Beim Gleichgewicht kann man alle Gleichgewichtslagen in zwei Klassen einteilen, je nachdem sie der Funktion $V(x, y)$ einen wirklichen Minimalwert erteilen oder nicht. Bei der Bewegung ist das in dieser Art nicht möglich. An Stelle der Funktion $V(x, y)$ tritt das Integral $I = \int \sqrt{h - V}\sqrt{dx^2 + dy^2}$, an Stelle der Gleichgewichtslage die Bahnkurve.

Über die Kurven, die dem Integral I einen Minimalwert erteilen, entnehmen wir der Variationsrechnung folgendes: Das vorliegende Problem ist in jedem Gebiete $\mathfrak{G}$, das keinen Punkt der Kurve $h - V(x, y) = 0$ enthält, positiv definit. Seine Indikatrix im Sinne Caratheodorys [4]) ist im Punkte x, y ein Kreis mit

[1]) Theorie des Kreisels, Bd. II, p. 350.
[2]) l. c. p. 348, Fußnote.
[3]) S. darüber meine Arbeit „Über die Bahnkurven der Mechanik". Crelles Journal, Bd. 134, p. 165.
[4]) Über die starken Maxima und Minima bei einfachen Integralen. Math. Ann., Bd. 63.

Digitized by Google

dem Radius $\frac{1}{\sqrt{h-V(x,y)}}$, der also in jedem Gebiete $\mathfrak{G}$ endlich ist. Jede Tangente eines solchen Kreises ist aber eine Stützgerade desselben, folglich gehen durch jeden Punkt von $\mathfrak{G}$ nach allen Richtungen starke Extremalen. Daher sind alle Minimalkurven des Problems, die ganz innerhalb $\mathfrak{G}$ verlaufen, kontinuierliche Stücke von Extremalen. Umgekehrt liefert auch jedes Stück einer Extremale, das nicht zwei konjugierte Punkte enthält, ein starkes Minimum. Damit ist aber vom rein mathematischen Standpunkt aus das Minimalproblem noch nicht erledigt, denn es könnte ja auch noch Minimalkurven geben, die nicht ganz innerhalb eines Gebietes $\mathfrak{G}$ verlaufen, sondern Punkte mit $h - V(x, y) = 0$ gemeinsam haben; diese brauchten dann keine stetigen Lösungen zu sein. Daß es tatsächlich beim Integral der kleinsten Wirkung solche diskontinuierliche Lösungen gibt, auf die schon Routh[1]) hingewiesen hat, läßt sich leicht nachweisen.[2]) Doch kommen diese Lösungen für die Mechanik nicht in Betracht, weil die Bahnkurven eines mechanischen Problems mit den Extremalen von I und nicht mit den wirklichen Minimalkurven identisch sind.

Was für uns wichtig ist, ist nur: Zwischen genügend benachbarten Punkten liefert jede Bahnkurve ein starkes Minimum von I. Es ist dies daher nichts für eine bestimmte Bewegungsart oder Bahnkurve Charakteristisches und es kann keine Klasseneinteilung der Bahnkurven darauf gegründet werden. Hingegen ist folgendes für das individuelle Problem oder selbst die individuelle Bahnkurve charakteristisch: Wenn ich von einem Punkte A einer Bahnkurve ausgehe, komme ich je nach der Natur des Problems früher oder später zu dem A konjugierten Punkte A', das Integral von A an hört früher oder später auf, ein Minimum zu sein. Und es ist ganz charakteristisch für gewisse Probleme, wenn A' ins Unendliche rückt, d. h. wenn überhaupt in der betrachteten Richtung kein zu A konjugierter Punkt A' auf der Bahnkurve liegt und das Integral von A an über jedes endliche Stück derselben erstreckt ein Minimum liefert. Von einer solchen Bahnkurve wollen wir sagen: sie liefert von A an ein absolutes Minimum. Gibt es aber auf einer Bahnkurve keinen Punkt A, von dem an sie ein absolutes Minimum liefert, so gibt es zu jedem Punkte M derselben einen konjugierten Punkt M' und zu diesem wieder einen konjugierten u. s. f. bis ins Unendliche oder bis zum Ende der Kurve. Auf diesen Unterschied können wir eine Klasseneinteilung der Bahnkurven gründen, in solche, auf denen es einen Punkt A von der gewünschten Eigenschaft gibt, und in solche, auf denen kein solcher Punkt liegt.

Daß diese Einteilung in einem Zusammenhang mit der kinetischen Stabilität steht, ist leicht einzusehen, und es wurde zuerst

[1]) Rig. Dyn., Bd. II, § 455.
[2]) S. meine Notiz: Über einen Satz von Routh, Math. Ann., Bd. 64.

Digitized by Google

von Thomson und Tait[1]) darauf hingewiesen. Wollen wir nämlich die Stabilität einer Bahnkurve vom Punkte M aus untersuchen, so kommt das darauf hinaus, daß wir die ganze Schar der von M ausgehenden Bahnkurven $y = f(x, a)$ untersuchen, wo $y = f(x, o)$ die Gleichung der untersuchten Kurve und a die trigonometrische Tangente des Winkels ist, den eine Kurve mit der ungestörten einschließt. Liefert nun die letztere von M an ein absolutes Minimum, so kann die Schar $y = f(x, a)$ in der betreffenden Richtung in endlicher Entfernung keine Enveloppe besitzen, also können auch auf dieser Seite die einzelnen Kurven der Schar einander nicht schneiden, woraus folgt:

Eine Bahnkurve ist von einem Punkte an, von dem an sie ein absolutes Minimum liefert, sicher nicht oszillierend stabil. Ob sie nicht trotzdem doch noch absolut stabil sein kann, läßt sich daraus nicht schließen.

Ganz analog wie diesen Satz können wir auch beweisen:

Die Bahnkurve, die von keinem Punkte an ein absolutes Minimum liefert, ist sicher oszillierend stabil.

Die vom Standpunkt ihrer Minimumeigenschaften getroffene Einteilung der Bahnkurven hat also auch analog wie bei den Gleichgewichtsfällen eine physikalische Bedeutung. Damit haben wir aber praktisch noch nicht viel gewonnen, weil es da vor allem darauf ankommt, ein Kriterium anzugeben, durch das man einer Bahnkurve im vorhinein, ohne erst Integrationen von Störungsgleichungen oder Berechnung von kleinen Schwingungen ausführen zu müssen, ansehen kann, in welche der beiden Klassen sie gehört. Zu diesem Zwecke werden wir folgenden Weg einschlagen: in Abschnitt III werden wir unser Problem auf das Analoge für eine spezielle Art von Bahnkurven, die geodätischen Linien auf krummen Flächen, zurückführen, in Abschnitt IV werden wir dann die längst bekannten Kriterien für die Klasseneinteilung bei geodätischen Linien für unsere Definitionen einrichten und in Abschnitt V daraus die Konsequenzen für unser eigentliches Problem ziehen.

III.

Wir betrachten ein mechanisches Problem in der Ebene mit der vorgegebenen Energie h und der Kräftefunktion $V(x, y)$. Ferner betrachten wir davon ganz unabhängig einen Raum, in dem wir die kartesischen Koordinaten ξ, η, ζ nennen. In diesem Raume denken wir uns eine Fläche konstruiert, deren Gleichungen in Parameterdarstellung

$$\xi = \xi(u, v), \quad \eta = \eta(u, v), \quad \zeta = \zeta(u, v)$$

sind und auf der das Quadrat des Bogenelements $d\sigma$ die Gestalt hat:

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = [h - V(u, v)]\,(du^2 + dv^2).$$

[1]) Treatise on natural philosophy, Art. 355.

Digitized by Google

Eine solche Fläche nennen wir eine zum gegebenen mechanischen Problem gehörende Lipschitzfläche. Zu jedem Problem lassen sich, wie man leicht sieht, unendlich viele Lipschitzflächen angeben. Wenn nämlich die Koeffizienten im Ausdruck für das Bogenelement gegeben sind, genügen die Funktionen $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$, $\zeta(u, v)$ gewissen bestimmten partiellen Differenzialgleichungen, die bei Darboux[1]) angegeben sind und immer Lösungen besitzen. Bestimmen wir ein beliebiges System von Funktionen $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$, $\zeta(u, v)$, die diesen Gleichungen genügen, so haben wir eine Fläche, deren Bogenelement die gewünschte Form hat. Die Lipschitzfläche und die Ebene unserer Bewegung bilden wir nun auf eine Weise aufeinander ab, die ein spezieller Fall einer von Lipschitz[2]) angegebenen Abbildung ist und die wir daher die Lipschitzabbildung nennen.

Die Abbildung geschieht in der Weise, daß wir den Punkt (x, y) der Ebene dem Punkt der Fläche mit den Koordinaten $u = x$, $v = y$ zuordnen. Die Linienelemente der aufeinander abgebildeten Flächen haben die Form

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$
$$d\sigma^2 = [h - V(u, v)]\,(du^2 + dv^2).$$

Auf beiden sind also isometrische Parameter eingeführt und die Abbildung ist eine konforme mit dem Abbildungsverhältnis:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \sqrt{\frac{[h - V(u, v)]\,(du^2 + dv^2)}{dx^2 + dy^2}} = \sqrt{h - V(x, y)}.$$

Der leicht zu beweisende Hauptsatz über die Lipschitzabbildung ist: Die Bahnkurven der Ebene gehen in die geodätischen Linien der Lipschitzfläche über. Ferner ist die Länge einer beliebigen Kurve dieser Fläche zwischen den Punkten (u_0, v_0) und (u_1, v_1) gleich dem Werte des Integrals der kleinsten Wirkung längs der entsprechenden Kurve in der Ebene zwischen den entsprechenden Punkten (x_0, y_0) und (x_1, y_1) erstreckt.

Zunächst wird es unsere Aufgabe sein, die Beziehungen zwischen der Stabilität auf Bahnkurven der Ebene und auf geodätischen Linien klarzulegen. Da die Lipschitzabbildung eine konforme ist, wird aus einer Schar von Bahnkurven, die unter kleinen Winkeln von einem Punkte auslaufen, eine Schar von geodätischen Linien, die von dem entsprechendem Punkte unter denselben Winkeln auslaufen, es sei denn, daß der Punkt ein Ausnahmspunkt ist, wo die Abbildung aufhört, konform zu sein; das ist aber nur der Fall, wo das Abbildungsverhältnis Null oder unendlich wird. Wenn wir

[1]) Théorie des surfaces, T. III, § 703, p. 252.

[2]) Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, Crelles Journal, Bd. 74. S. auch Darboux, l. c., T. II, § 547, p. 452.

Digitized by Google

zuerst den Fall $h - V = 0$ betrachten, so untersuchen wir damit die Stabilität einer Bahnkurve von ihrem Schnittpunkt mit der Grenzkurve $h - V = 0$ an. Es gibt aber nur eine spezielle Schar von Bahnkurven, die die Grenzkurve treffen,[1]) nämlich die auf ihr senkrecht stehenden. Und zwar geht von jedem Punkte der Grenzkurve (wenn diese nicht in einen Punkt ausartet) nur eine einzige solche Bahnkurve aus, so daß von einer Schar, die von einem Punkte unter kleinen Winkeln ausläuft, wie wir sie zur Stabilitätsuntersuchung brauchen, gar keine Rede sein kann. Und dementsprechend sehen wir auch physikalisch ein, daß die solchen Punkte aus keinen Stabilität von einem Frage nach der Sinn hat. Denn da auf der Kurve $h - V(x, y) = 0$ die Geschwindigkeit Null ist und wir nur Störungen in Betracht zogen, die in einer Richtungsänderung der Geschwindigkeit bestehen, in einem solchen Punkte es aber keine konservativen Störungen geben kann, gibt es auch keine Stabilität gegenüber konservativen Störungen.

Was die Punkte einer Bahnkurve betrifft, für die $h - V = \infty$ ist, so können das wegen der Endlichkeit von h nur solche sein, für die $V = \infty$ ist. Sollten solche Punkte im Endlichen liegen, so wollen wir sie von unserer Betrachtung ausschließen; liegen sie aber im Unendlichen, so ist es ohnehin selbstverständlich, daß von einer Störung, die ein bewegter Punkt im Unendlichen erleidet, nicht die Rede sein und daher die Frage nach der Stabilität von einem solchen Punkte aus nicht aufgeworfen werden kann. Wir können also allgemein sagen: Einer Schar von Bahnkurven, die von einem Punkte (der kein Unendlichkeitspunkt von V $[x, y]$ ist) unter kleinen Winkeln auslaufen, entspricht auf der Lipschitzfläche eine Schar von geodätischen Linien, die unter denselben Winkeln auslaufen.

Wenn nun eine solche Schar auf der Lipschitzfläche zwischen zwei Parallellinien bleibt, deren Distanz beliebig klein gemacht werden kann, bleiben die entsprechenden Bahnkurven auch in der Ebene in einem solchen Parallelstreifen, da ja das Verhältnis entsprechender Längen

$$\frac{ds}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{h - V(x, y)}}$$

beträgt und somit, wenn $h - V(x, y)$ im Streifen eine von Null verschiedene untere Grenze besitzt, ds mit $d\sigma$ beliebig klein gemacht werden kann.

Wenn also eine geodätische Linie auf der Lipschitzfläche von einem Punkte an absolut stabil ist, so ist auch die entsprechende Bahnkurve in der Ebene vom entsprechenden Punkte an absolut stabil, wenn von dort an kein Punkt $h - V(x, y) = 0$ mehr auf ihr liegt. Ein Punkt $h - V(x, y) = 0$ kann aber nur auf einer Bahnkurve liegen, die der ausgezeichneten Bahnkurvenschar angehört.

Digitized by Google

Genau dasselbe gilt auch für oszillierende Stabilität. Welchen Einfluß aber ein Nullpunkt von $h - V$ auf einer Bahnkurve für die Beurteilung der Stabilität derselben mit Hilfe der Lipschitzfläche besitzt, will ich sofort an einem konkreten Beispiel zeigen.

Wir nehmen an, wir hätten die Bewegung eines Punktes in der Ebene zu untersuchen, die er mit der Energie $h = 0$ unter dem Einflusse einer Kraft mit den Komponenten

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

ausführt, wo $V = -\frac{4}{(x^2+y^2+1)^2}$. Die Bahnkurven sind dann die Extremalen des Integrals $\int \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{x^2+y^2+1}$. Die zum Problem gehörende Lipschitzfläche muß in isometrischen Parametern das Linienelement

$$d\sigma^2 = \frac{4}{u^2+v^2+1}(du^2+dv^2)$$

besitzen. Man sieht leicht, daß die Fläche

$$\xi = \frac{2u}{u^2+v^2+1}, \quad \eta = \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \quad \zeta = \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}$$

tatsächlich ein Linienelement der gewünschten Form besitzt. Diese zu unserem Problem gehörende Lipschitzfläche ist aber eine Kugel mit dem Radius 1. Die Lipschitzabbildung ist hier besonders leicht zu durchschauen, denn als Beziehung zwischen den Raumkoordinaten der Punkte der Fläche und den Koordinaten der ihnen zugeordneten Punkte der Ebene findet man durch Einsetzen der die Abbildung definierenden Gleichungen $x = u$, $y = v$ in die Gleichungen der Fläche:

$$\xi = \frac{2x}{x^2+y^2+1}, \quad \eta = \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \quad \zeta = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1};$$

das sind aber bekanntlich die eine stereographische Projektion definierenden Gleichungen. Wir erhalten also die Bahnkurven unseres Problems durch stereographische Projektion der größten Kugelkreise vom Punkte $\xi = \eta = 0$, $\zeta = 1$ aus auf die ξ, η-Ebene. Die Bahnkurven sind Kreise, nur die durch den Ursprung gehenden sind ein Büschel von Geraden. Dieses Büschel ist aber die ausgezeichnete Bahnkurvenschar und die Grenzkurve $h - V = 0$ zieht sich auf den unendlich fernen Punkt zusammen.

Auf der Kugel ist offenbar jede geodätische Linie stabil. Wie steht es aber mit den entsprechenden Bahnkurven in der Ebene? Soweit diese Kreise mit endlichem Radius sind, gilt für

Digitized by Google

sie ersichtlich dasselbe. Betrachten wir aber eine der vom Ursprung ausgehenden Geraden! Lassen wir vom Punkte $x = y = 0$ das Büschel der durch konservative Störung aus der ursprünglichen hervorgegangenen Bahnkurven auslaufen, so sind das lauter Gerade, die einander natürlich nie wieder schneiden und immer weiter divergieren. Stören wir aber eine solche gerade Bahnkurve in einem anderen Punkte, so sind die neu entstehenden Bahnkurven Kreise, deren Radius um so größer wird, je kleiner ich den Störungswinkel wähle. Wir sehen also, daß alle der ausgezeichneten Schar angehörenden Bahnkurven trotz der Stabilität der ihnen entsprechenden geodätischen Linien der Lipschitzfläche doch in jeder Hinsicht instabil sind.

Und das ist nach unseren allgemeinen Sätzen auch leicht verständlich; denn, wo ich auch auf einer solchen Kurve die Stabilität untersuche, habe ich immer noch einen Punkt, für den $h - V = 0$ ist, vor mir, da ja dieser Punkt im Unendlichen liegt. Eine Strecke, die auf der Kugel sehr klein ist, kann also beim Fortschreiten längs einer solchen Bahnkurve in der Ebene gegen das Unendliche zu wegen der Gleichungen $ds = \frac{d\sigma}{\sqrt{h - V}}$ und $h - V = 0$ doch sehr groß werden, weshalb hier von der Stabilität auf der Kugel nicht auf Stabilität in der Ebene geschlossen werden kann.

Damit wäre das über die Punkte $h - V = 0$ Gesagte auch konkret veranschaulicht. Wird aber auf einer Bahnkurve, je weiter wir ins Unendliche hinausgehen, $h - V$ immer größer und größer, so folgt aus der Stabilität auf der Lipschitzfläche sicher die in der Ebene. Denn einer kleinen Strecke $d\sigma$ der Fläche entspricht eine noch kleinere $\frac{d\sigma}{\sqrt{h - V}}$ der Ebene. Dagegen darf hier von der Instabilität auf der Fläche nicht auf Instabilität in der Ebene geschlossen werden. Eine vollständige Analogie zwischen den Stabilitätsverhältnissen auf der Lipschitzfläche und in der Ebene besteht nur dann, wenn längs der ganzen betrachteten Bahnkurve $h - V$ zwischen zwei endlichen positiven Zahlen liegt.

IV.

Bei der Theorie der Stabilität geodätischer Linien wird von einer durch Gauß[1]) aufgestellten Gleichung ausgegangen. Diese besagt:

Wenn wir auf einer Fläche als Parameterkurven $v =$ konst. eine Schar geodätischer Linien, als $u =$ konst. deren orthogonale Trajektorien einführen, so daß das Linienelement die Form:

$$d\sigma^2 = du^2 + G\,dv^2$$

Digitized by Google

bekommt, schreibt sich das Krümmungsmaß der Fläche im Punkte u, v in der Form:

$$k(u, v) = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

An diese Formel schließen sich die Betrachtungen von Bonnet[1]) an, deren Gedankengang etwa folgender ist: Fassen wir eine feste geodätische Linie, z. B. $v = 0$, ins Auge, so wird längs dieser $k(u, v)$ eine bloße Funktion von u, d. h. der Bogenlänge der Linie. Ferner ist $\sqrt{G}.D$ nichts anderes als der längs der orthogonalen Trajektorie $u = u$ gemessene Abstand zwischen den unendlich benachbarten geodätischen Linien $v = 0$ und $v = D$. Setzen wir $\sqrt{G}.D = r$, so ist auch dieses längs $v = 0$ eine bloße Funktion von u, und wenn wir schließlich nach $k(u, o) = \rho(u)$ setzen, erhalten wir die von Bonnet für $r(u)$ abgeleitete Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 r}{du^2} + \rho(u) r = 0.$$

Aus den Sätzen von Sturm[2]) über lineare Differentialgleichungen leitet Bonnet folgende Resultate über seine Gleichung ab:

1. Wenn $\rho(u)$ längs einer geodätischen Linie negativ ist, kann ein Integral $r(u)$ der Gleichung nicht in zwei verschiedenen Punkten verschwinden, wenn es nicht identisch verschwindet.

2. Ist $\rho(u)$ längs einer geodätischen Linie positiv und größer als $\varkappa^2$, ist der Abstand zweier Nullstellen einer Lösung $r(u)$ der Gleichung höchstens $\frac{\pi}{\varkappa}$ längs der geodätischen Linie gemessen.

Bonnet schließt aus diesen Sätzen nun sofort auf die Existenz konjugierter Punkte. Wird ein zu A konjugierter Punkt gesucht, so ist das derjenige, in dem die zur betrachteten geodätischen Linie unendlich benachbarte, auch von A ausgehende geodätische Linie die erste zum erstenmal schneidet, wie es die Definition der Enveloppe fordert. Diese unendlich benachbarten Linien lassen sich aber als Lösungen der Bonnetschen Gleichung darstellen.

Ist also längs einer geodätischen Linie von einem Punkte A an das Krümmungsmaß der Fläche durchaus negativ, so gibt es keine zu A konjugierten Punkte in der betrachteten Richtung. Die Bewegung längs dieser Kurve ist sicher nicht oszillatorisch stabil. Ist dagegen von einem Punkte an das Krümmungsmaß größer als die positive Zahl $\varkappa^2$, so liegt der konjugierte Punkt jedenfalls innerhalb der Bogenlänge $\frac{\pi}{\varkappa}$, die Bewegung ist oszillierend stabil und

[1]) Comptes rendus, t. 40, 1850.
[2]) Journal de Lionville, t. I, 1836.

Digitized by Google

die einzelnen Oszillationen haben eine halbe Wellenlänge, die höchstens $\frac{\pi}{\varkappa}$ beträgt.

Für den Fall negativen Krümmungsmaßes, wo wir bisher nur die oszillierende Stabilität ausgeschlossen haben, können wir noch einen Schritt weiter gehen und etwas über die absolute Stabilität aussagen. Nehmen wir nämlich an, längs einer geodätischen Linie, die überall durch Gegenden negativen Krümmungsmaßes läuft, herrsche absolute Stabilität, die dann natürlich nicht oszillierend wäre. Dann müßten die von A unter kleinen Winkeln auslaufenden geodätischen Linien alle in einem beliebig schmalen Parallelstreifen um die betrachtete verlaufen und sich daher durch Lösungen von

$$\frac{d^2r}{du^2} + \rho(u)\, r = 0$$

herstellen lassen. Eine jede Lösung dieser Gleichung aber, die im Punkte A verschwindet, wächst, wenn $\rho(u) < 0$ bleibt, mit wachsendem u über alle Grenzen;[1]) die entsprechende geodätische Linie kann also nicht innerhalb eines Parallelstreifens bleiben. Auf geodätischen Linien in Gegenden mit negativem Krümmungsmaß ist also auch absolute Stabilität unmöglich.

Da wir nur die Fälle, wo das Krümmungsmaß von einem Punkte an entweder beständig positiv oder beständig negativ bleibt, untersuchen wollen, ist für uns absolute Stabilität der engere, oszillierende der weitere Begriff.

Den Fall positiven Krümmungsmaßes kann man noch etwas verallgemeinern. Bis jetzt haben wir nämlich die oszillierende Stabilität nur für den Fall bewiesen, daß längs einer geodätischen Linie das Krümmungsmaß eine positive untere Grenze hat; es kann aber auch vorkommen, daß es wohl auf der ganzen Linie positiv ist, aber Null zur unteren Grenze hat; dann würden die Bonnetschen Sätze als obere Grenze für die Wellenlänge der Oszillationen $\frac{\pi}{\varkappa} = \infty$ ergeben und wir wüßten über die Stabilität nichts Sicheres. Für diesen Fall gilt folgendes Kriterium[2]): Man bilde sich $u^2\rho(u) - \frac{1}{4}$. Die Bewegung bleibt stabil, wenn die untere Grenze dieses Ausdruckes auf der geodätischen Linie positiv, instabil, wenn sie negativ ist; ist die untere Grenze wieder Null, so muß man zu noch komplizierteren Ausdrücken übergehen.

---

[1]) Den Beweis s. Weber-Riemann, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Bd. II, § 24, p. 57—60; der hier unter 3 *c* angeführte Fall, wo $r(u)$ sich mit wachsendem u einer endlichen Grenze nähert, ist nur unter der Voraussetzung möglich, daß $r(u)$ nirgends verschwindet.

[2]) Den Beweis s. Weber-Riemann, l. c. § 25, p. 62 f.

Digitized by Google

V.

Wir haben gesehen, daß wir auf die Stabilität der Bahnkurven, die ein materieller Punkt in der Ebene unter dem Einflusse gegebener Kräfte beschreibt, aus der Stabilität der entsprechenden geodätischen Linien der Lipschitzfläche schließen können, wenn nur kein Punkt $h - V = 0$ auf ihnen liegt.

Wenn es nun nötig wäre, erst die Lipschitzfläche unseres Problems wirklich auszurechnen, würde uns dieses Hilfsmittel nicht weit führen. Aber die Stabilität der geodätischen Linien hängt in den von uns betrachteten Fällen nur vom Krümmungsmaß der Fläche ab. Dieses aber läßt sich, wie Gauß [1]) gezeigt hat, berechnen, wenn nur das Bogenelement der Fläche

$$d\sigma^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$$

gegeben ist. Gauß findet nämlich für das Krümmungsmaß $k(u, v)$ eine Formel, die sich bei Einführung isometrischer Parameter, wo $E = G$, $F = 0$ wird, in der Form schreiben läßt:

$$k(u, v) = -\frac{1}{2E^2}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial v^2}\right) + \frac{1}{2E^3}\left[\left(\frac{\partial E}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right].$$

Wenn wir nun auch die Gleichung der zu einem vorgelegten Problem gehörenden Lipschitzfläche nicht kennen, so kennen wir doch die Gestalt ihres Bogenelements in isometrischen Parametern, nämlich:

$$d\sigma^2 = [h - V(u, v)]\,(du^2 + dv^2).$$

Das Krümmungsmaß im Punkte u, v der Lipschitzfläche hat also wegen $E = h - V(u, v)$ den Wert:

$$k(u, v) = -\frac{1}{2(h-V)^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\right) + \frac{1}{2(h-V)^3}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2\right].$$

Wir wollen nun in unserem gegebenen Kraftfeld eine Funktion definieren, die wir (in Anlehnung an die von Thomson und Tait gebrauchten Beziehungen: kinetischer Brennpunkt, kinetisches Dreieck u. s. w.) als kinetische Krümmung unseres Kraftfeldes bezeichnen wollen, und zwar habe die kinetische Krümmung im Punkte (x, y) denselben Wert, wie das Krümmungsmaß der Lipschitzfläche im entsprechenden Punkte $u = x$, $v = y$. Die definierte Funktion ist also nichts anderes als $k(x, y)$.

Mit Verwendung dieses Begriffes folgt nun aus unseren Betrachtungen über die Möglichkeit, aus der Stabilität auf der Lipschitzfläche auf die in der Ebene zu schließen (Abschn. III) und aus den angeführten Kriterien für die Stabilität geodätischer Linien (Abschn. IV) sofort folgender Satz:

[1]) Disquisitiones circa superficies curvas, Art. 11.

Digitized by Google

Bewegt sich ein materieller Punkt mit der vorgegebenen Energie h unter dem Einflusse von Kräften, die das Potential $V(x, y)$ besitzen, in der Ebene, so ist die Bewegung sicher weder oszillatorisch noch absolut stabil, wenn die kinetische Krümmung $k(x, y)$ des Kraftfeldes, wo

$$k(x,y) = \frac{1}{2(h-V)^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{2(h-V)^3}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right]$$

längs der ganzen Bahn oder wenigstens von einem bestimmten Punkte an immer negativ oder Null ist.

Wenn hingegen von einem bestimmten Punkte einer Bahn an die kinetische Krümmung oberhalb einer positiven Zahl bleibt und auch kein Punkt $h-V=0$ auf der Bahnkurve liegt, ist die Bewegung sicher oszillatorisch stabil.

Dieser Satz ermöglicht es tatsächlich, in einer großen Anzahl von Fällen in sehr einfacher Weise über die Stabilität einer Bewegung zu entscheiden.

VI.

Ich will aber diesen Satz nur auf ein Problem anwenden, das die meisten Autoren, die über Bewegungsstabilität eines materiellen Punktes schreiben, als Beispiel für die Anwendung ihrer Kriterien benützen. Es handelt sich nämlich um folgendes:

Ein materieller Punkt werde von einer Kraft mit der Intensität μr^n gegen den Koordinatenursprung gezogen, wo μ ein Proportionalitätsfaktor, r der Abstand vom Ursprung und n eine ganze Zahl ist. Der Punkt wird, wenn die Anfangsgeschwindigkeit geeignet gewählt wird, einen Kreis um den Ursprung beschreiben. Und gerade diese gleichförmige Kreisbewegung wird von vielen Autoren behandelt und gefragt: Für welche Werte von n ist diese Bewegung stabil und für welche instabil?[1]) Alle Autoren finden übereinstimmend, daß die fraglichen Bewegungen in zwei Klassen zerfallen, je nachdem $n > -3$ oder $n \leqq -3$ ist. Nach unserer Definition sind die ersteren oszillatorisch stabil, die letzteren instabil. Mit Hilfe unseres in Abschn. V abgeleiteten Satzes finden wir dieses Resultat ohne jede Einführung kleiner Größen durch einen bloßen Differentiationsprozeß.

Für unser Problem ist $V(x, y) = -\frac{\mu r^{n+1}}{n+1}$, wo $\mu > 0$ ist. h hat man so zu bestimmen, daß die Bewegung gleichförmig in

[1]) Man findet diese Frage nach verschiedenen Methoden behandelt bei:
Thomson und Tait, l. c., Bd. I, Art. 350.
Routh, Rigid Dynamics, Bd. II, Art. 102, Ex. 1.
Appell, Mécanique rationelle, Bd. II, Art. 458.

Digitized by Google

einer Kreisbahn erfolgt. Zu diesem Zwecke führen wir durch die Gleichungen

$$x = r \cos \mathfrak{d}, \quad y = r \sin \mathfrak{d}$$

Polarkoordinaten ein. Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen lauten dann:

$$\frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\mathfrak{d}}{dt}\right) = 0, \quad r\left(\frac{d\mathfrak{d}}{dt}\right)^2 - \mu r^n + \frac{d^2 r}{dt^2} = 0.$$

Aus der ersten derselben folgt, wenn wir die Konstante des Flächensatzes mit λ bezeichen:

$$r^2 \frac{d\mathfrak{d}}{dt} = \lambda.$$

Die Bedingung für die Kreisbewegung lautet: $\frac{d^2 r}{dt^2} = 0$. Daraus folgt:

$$r\left(\frac{d\mathfrak{d}}{dt}\right)^2 = \mu r^n.$$

Setzen wir hier $\frac{d\mathfrak{d}}{dt} = \frac{\lambda}{r^2}$ ein, so erhalten wir für die Kreisbewegung zwischen λ und r die Relation:

$$\lambda^2 = \mu r^{n+3}.$$

Nach dem Energiesatze ist für die Kreisbewegung:

$$h = \frac{r^2}{2}\left(\frac{d\mathfrak{d}}{dt}\right)^2 + \frac{\mu r^{n+1}}{n+1}.$$

Drücken wir in dieser Gleichung $\frac{d\mathfrak{d}}{dt}$ durch λ und dieses durch r aus, so erhalten wir für die Energie h, der eine Kreisbahn mit dem Radius r entspricht, den Wert:

$$h = \frac{\mu (n+3)}{2(n+1)} r^{n+1}.$$

Für die kinetische Krümmung unseres Kraftfeldes finden wir, ohne zunächst h einen speziellen Wert zu erteilen, durch Differenzieren und Einsetzen:

$$2(h - V)^2 k(x, y) = \frac{r^{n-1} \mu h (n+1)^2}{(n+1) h - \mu r^{n+1}}.$$

Um nun auf die Kreisbewegung zu kommen, setzen wir den für h gefundenen Wert ein und erhalten nach kurzer Rechnung:

$$2(h - V)^2 k(x, y) = \mu r^{n-1} (n+3).$$

Digitized by Google

Dieser Ausdruck ist offenbar für $n > -3$ positiv. Also ist die Kreisbewegung für die Kraftgesetze $\frac{\mu}{r^2}$, $\frac{\mu}{r}$, μr u. s. w. oszillierend stabil. Für $n \leqq -3$ ist die kinetische Krümmung negativ oder Null, also die Kreisbewegung für die Gesetze: $\frac{\mu}{r^3}$, $\frac{\mu}{r^4}$, u. s. w. instabil. Wir erhalten also auf diesem Wege dasselbe Resultat wie die zitierten Autoren.

Da wir die Formel für die kinetische Krümmung bei der Zentralbewegung schon abgeleitet haben, will ich noch die elliptische Bewegung nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze behandeln. Für diesen Fall ist $n = -2$ und aus der Formel, in der h noch nicht spezialisiert ist, folgt:

$$2(h - V)^2 k(x, y) = -\frac{\mu h}{r^2(rh + \mu)}.$$

Da der Ursprung ein Brennpunkt der Bahnellipse ist, hat die große Halbachse die Länge $a = -\frac{\mu}{2h}$, woraus folgt:

$$h = -\frac{\mu}{2a}.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes erhalten wir:

$$2(h - V)^2 k(x, y) = \frac{\mu}{r^2(2a - r)}.$$

Da die Entfernung eines Ellipsenpunktes vom Brennpunkte nie die Länge der großen Achse erreicht, ist längs der ganzen Bahn:

$$r < 2a.$$

Also ist die kinetische Krümmung überall positiv und die Bewegung oszillierend stabil [1]).

[1]) Eine Anwendung des abgeleiteten Kriteriums auf den Fall, daß die Zentralkraft eine beliebige Funktion des Abstandes vom Attraktionszentrum ist, findet sich in meiner Notiz „Über die Stabilität der Kreisbahnen bei Zentralbewegungen". Astron. Nachr., Bd. 177, Nr. 4231, p. 97.

Digitized by Google

Bemerkung zu zwei Sätzen v. Staudts.

Von **A. Meder** in Riga.

In der Geometrie der Lage von v. Staudt[1]) findet sich bekanntlich zum ersten Male die Unterscheidung von acht Arten von Raumkurvenpunkten, die sich dadurch ergibt, daß in einem Punkte der Kurve Punkt, Tangente und Schmiegungsebene gewöhnliche oder Rückkehrelemente sein können. Staudt bringt diese acht Fälle durch das folgende Schema zum Ausdruck:

$$---,\ --+,\ -+-,\ -++,$$
$$+--,\ +-+,\ ++-,\ +++,$$

wobei der Fall, in welchem ein Element kein Rückkehrelement ist, durch —, der Fall aber, in welchem dasselbe ein Rückkehrelement ist, durch + bezeichnet wird und sich das erste Zeichen auf das Verhalten des Punktes, das zweite auf das der Tangente, das dritte auf das der Schmiegungsebene bezieht. Hiernach wird jeder Fall durch eine Kombination $x\,y\,z$ der Zeichen —, + dargestellt.

Bezeichnet ferner $\underline{x\,y}$ ebenfalls eine Kombination der Zeichen —, +, so wird unter $\underline{x\,y}$ das Zeichen — oder + verstanden, je nachdem die Anzahl der in der Kombination enthaltenen Zeichen — eine ungerade oder gerade Zahl ist.

Unter anderem stellt Staudt die folgenden beiden dualistisch gegenüberstehenden Sätze[2]) auf, in denen $x\,y\,z$ den Fall bezeichnet, welcher in Hinsicht auf einen Punkt B einer gewundenen Kurve s, den Strahl B der ihr sich anschmiegenden Regelfläche und die Ebene B des beiden Gebilden sich anschmiegenden Ebenenbüschels stattfindet.

„Es werde die Kurve s und die Regelfläche s aus jedem Punkte M durch eine Kegelfläche S und den derselben sich anschmiegenden Ebenenbüschel S projiziert. In Hinsicht auf den Strahl MB der Kegelfläche, welcher nämlich

„Es werde die Regelfläche s und der Ebenenbüschel s von jeder Ebene N in einer Kurve K und dem derselben sich anschmiegenden Strahlenbüschel K geschnitten. In Hinsicht auf den Punkt NB der Kurve K, in

[1]) Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, S. 110 ff.
[2]) A. a. O. S. 116.

Digitized by Google

den Punkt B projiziert, und die ihm zugehörige Ebene MB des Ebenenbüschels S findet der Fall yz oder $\overline{xyz}$ oder $x\overline{yz}$ oder xy statt, je nachdem der Punkt M der Punkt B oder ein anderer Punkt der Geraden B oder ein außerhalb dieser Geraden befindlicher Punkt der Ebene B ist oder außerhalb dieser Ebene liegt. In den drei ersten Fällen fällt die Ebene MB mit der Ebene B, in den beiden ersten auch die Gerade MB mit der Geraden B zusammen."

welchem nämlich die Ebene N von der Geraden B geschnitten wird, und den ihm zugehörigen Strahl des Büschels K findet der Fall xy oder $x\overline{yz}$ oder $\overline{xyz}$ oder yz statt, je nachdem die Ebene N die Ebene B oder eine andere durch die Gerade B gehende Ebene ist oder diese Gerade im Punkte B oder in einem anderen Punkte schneidet. In den drei ersten Fällen fällt der Punkt NB mit dem Punkte B, in den beiden ersten auch die Gerade NB mit der Geraden B zusammen."

Aus dem linksstehenden Satz ergibt sich ohne Mühe die Art der Singularität für die Projektion des Punktes B auf eine feste Ebene, aus dem rechtsstehenden die Art der Singularität für einen ebenen Schnitt der Tangentenfläche der gegebenen Kurve. Diese Art der Singularität hängt in dem ersten Falle von den Zeichenkombinationen

(1) $$yz,\ \overline{xyz},\ x\overline{yz},\ xy,$$

im zweiten von den Kombinationen

(2) $$xy,\ x\overline{yz},\ \overline{xyz},\ yz$$

ab.

Meines Wissens ist noch nicht darauf aufmerksam gemacht worden, daß die Zeichenkombinationen der Reihe (2) in umgekehrter Folge die der Reihe (1) sind. Es folgt hieraus unmittelbar der nachstehende interessante Satz.

Die gegebene Kurve werde von einem Punkte M aus auf eine feste Ebene projiziert und die Projektion des in bezug auf Rückkehrelemente regulären oder singulären Punktes P mit Q bezeichnet. Ferner werde die Tangentenfläche der gegebenen Kurve durch eine Ebene N in einer gewissen Kurve K geschnitten und der auf der Tangente des Punktes P gelegene Punkt der Kurve K mit R bezeichnet. Dann sind die Punkte Q und R in bezug auf etwaige Rückkehrelemente von derselben Art:

1. wenn der Punkt M nicht in der Schmiegungsebene des Punktes P liegt und gleichzeitig die Ebene N mit dieser Schmiegungsebene zusammenfällt;

2. wenn der Punkt M in der Schmiegungsebene, nicht aber auf der Tangente des Punktes P liegt und gleichzeitig die Ebene N die Tangente des Punktes P enthält, ohne mit der Schmiegungsebene identisch zu sein;

Digitized by Google

3. wenn der Punkt M auf der Tangente des Punktes P liegt, ohne mit diesem Punkte zusammenzufallen, und gleichzeitig die Ebene N durch den Punkt P geht, ohne die Tangente dieses Punktes zu enthalten;

4. wenn der Punkt M mit dem Punkte P zusammenfällt und gleichzeitig die Ebene N nicht durch den Punkt P geht.

Enthält die Ebene N die Tangente des Punktes P, so besteht, im Grunde genommen, der Schnitt der Ebene N mit der Tangentenfläche aus der Kurve K und einer mehrfach zählenden Geraden, der Tangente des Punktes P. Wir sehen in obigem von dieser Geraden ab, d. h. wir definieren in diesem Falle als Punkt R die Grenzlage, der der Schnittpunkt der Tangente der gegebenen Kurve mit der Ebene N zustrebt, wenn der Berührungspunkt der Tangente in die Lage P übergeht; diese Grenzlage ist mit dem Punkte P identisch.

Aus unserem Satze ergibt sich noch der folgende als Spezialfall:

Ein Punkt einer Raumkurve ist in bezug auf etwaige Rückkehrelemente für die Schnittlinien der Tangentenfläche dieser Kurve mit seiner Schmiegungs-, rektifizierenden und Normalebene bezw. von derselben Art, wie für die Orthogonalprojektionen der Kurve auf diese Ebenen.

Eine analytische Herleitung der eben formulierten Sätze habe ich in einer anderen Arbeit[1]) gegeben; die ebenen Schnitte der Tangentenfläche sind außerdem analytisch untersucht von Björling[2]) und v. Lilienthal.[3]) In einer Abhandlung von Fine[4]) sind die von Staudt gegebenen Sätze nach Methoden der Vektorenrechnung bewiesen, ohne daß jedoch die obenerwähnte Folgerung aus ihnen gezogen wird.

[1]) Meder, Analytische Untersuchung singulärer Punkte von Raumkurven (russ.), Riga 1908, S. 73.

[2]) Björling, Über Raumcurven-Singularitäten. Arch. d. Math. u. Phys. (2), Bd. 8, S. 88—89.

[3]) v. Lilienthal, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Leipzig 1908, S. 257—262.

[4]) Fine, On the singularities of curves of double curvature. Amer. Journ. of. Math., vol. VIII, p. 169.

Digitized by Google

Unstetige Lösungen beim Prinzip der kleinsten Wirkung.

Von **Philipp Frank** in Wien.

Ein materieller Punkt bewege sich in der Ebene mit der vorgegebenen Energie h unter dem Einflusse von Kräften, welche die Kräftefunktion $V(x, y)$ besitzen. Seine Bahnkurven sind dann die ∞^2 Extremalen des Integrals

$$J = \int \sqrt{h - V(x,y)}\ \sqrt{1 + y'^2}\, dx .$$

Wir wollen nun zeigen, daß es einen Linienzug mit zwei Knickpunkten gibt, der J zu einem wirklichen starken Minimum macht, aber keine Bahnkurve ist.[1]) Damit eine Kurve dem Integral J überhaupt einen reellen Wert erteilt, muß längs derselben überall

$$h - V(x,y) \geqq 0$$

sein, sie muß also ganz auf einer Seite der Kurve

$$h - V = 0,$$

die wir „Grenzkurve" nennen, liegen. Ein Linienzug, der J zu einem Minimum macht, kann nur aus Stücken von Extremalen und der Grenzkurve bestehen. Nun gibt es nur ∞^1 Extremalen, die Punkte mit der Grenzkurve gemein haben; das sind diejenigen Bahnkurven, die sie unter rechtem Winkel treffen. Diese ∞^1 Bahnkurven nennen wir die ausgezeichnete Bahnkurvenschar. Wenn ein Punkt im Gebiete zwischen der Grenzkurve und der Enveloppe der ausgezeichneten Bahnkurven liegt, geht durch ihn mindestens eine Extremale, welche die Grenzkurve trifft und jede ist in einer gewissen Umgebung die einzige. Stellen wir uns die Aufgabe, die Punkte A und B, die im genannten Gebiete liegen mögen, durch einen Linienzug zu verbinden, der aus Extremalen- und Grenzkurvenstücken zusammengesetzt ist, so kann dies offenbar

[1]) S. Math. Ann., Bd. 64, p. 239 ff., wo ich das ausführlich für den Fall bewiesen habe, daß die orthogonalen Trajektorien der Kurven $V(x, y) = \text{const.}$ Bahnkurven sind. Vgl. auch die Berichtigung dazu, Math. Ann., Bd. 66.

Digitized by Google

innerhalb einer gewissen Umgebung nur auf eine einzige Weise geschehen. Über den so entstehenden Linienzug wollen wir folgenden Satz beweisen:

Bewegt sich ein materieller Punkt in der Ebene mit der vorgegebenen Energie h unter dem Einflusse von Kräften mit der Kräftefunktion $V(x,y)$, zeichnen wir uns die Bahnkurven, die $h - V(x,y) = 0$ senkrecht treffen (die ausgezeichneten Bahnkurven) samt deren Enveloppe und nehmen im Gebiet zwischen dieser Enveloppe und der Grenzkurve $h - V = 0$ zwei beliebige Punkte A und B an, so liefert der zweimal geknickte Linienzug, der aus einer von A zur Grenzkurve gezogenen ausgezeichneten Bahnkurve, dem Stück der Grenzkurve zwischen diesem Schnittpunkt und dem einer durch B gehenden ausgezeichneten Bahnkurve und endlich aus dieser selbst von der Grenzkurve bis B besteht, ein starkes Minimum des zu diesem Problem gehörigen Integrals der kleinsten Wirkung

$$J = \int \sqrt{h - V}\ \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Zum Beweise dieses Satzes verwenden wir den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz.[1]) Als Feld von Extremalen verwenden wir die ausgezeichnete Bahnkurvenschar; sie sei durch die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = p(x,y)$$

gegeben. Sei $y = \bar{y}(x)$ eine beliebige A mit B verbindende im Felde verlaufende Kurve, so besagt der Unabhängigkeitssatz, daß das Integral

$$J^* = \int \left\{ f\left(x, \bar{y}, p(x,\bar{y})\right) + \left(\bar{y}' - p(x,\bar{y})\right) \frac{\partial f}{\partial y'}\left(x, \bar{y}, p(x,\bar{y})\right) \right\} dx$$

zwischen den Punkten A und B unabhängig von der Wahl der sie verbindenden Kurve $y = \bar{y}(x)$ ist, wenn diese nur im Felde verläuft. Wir bilden nun J^* einmal für den genannten zweimal geknickten Linienzug[2]) und einmal für eine beliebige im Felde

[1]) S. etwa O. Bolza, Lehrbuch der Variationsrechnung, III. Cap., § 17.

[2]) Auf der Grenzkurve ist wohl wegen $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = 0$ das Problem nicht regulär, man überzeugt sich aber leicht durch einen einfachen Grenzübergang von der Anwendbarkeit des Unabhängigkeitssatzes.

Digitized by Google

verlaufende Vergleichskurve und setzen die erhaltenen Beträge gleich. Dabei ist immer

$$f(x, y, y') = \sqrt{h - V(x, y)}\,\sqrt{1 + y'^2}. \tag{1}$$

Längs jeder Extremalen ist wegen $\bar{y}' = p(x, y)$ immer $J^* = J$. Längs der Grenzkurven aber ist $J^* = 0$.

Daher erhalten wir, wenn wir die Extremale durch A mit $\mathfrak{E}_1$, die durch B mit $\mathfrak{E}_2$, die Vergleichskurve $y = \bar{y}(x)$ mit $\mathfrak{B}$ bezeichnen:

$$\begin{cases} \int\limits_{\mathfrak{E}_1} f(x, y, y')\,dx + \int\limits_{\mathfrak{E}_2} f(x, y, y')\,dx = \\ = \int\limits_{\mathfrak{B}} \left\{ f(x, \bar{y}, p) + (\bar{y}' - p)\,\frac{\partial f}{\partial y'}(x, \bar{y}, p) \right\} dx. \end{cases} \tag{2}$$

Setzen wir nun:

$$\Delta J = \int\limits_{\mathfrak{B}} f\,dx - \int\limits_{\mathfrak{E}_1} f\,dx - \int\limits_{\mathfrak{E}_2} f\,dx, \tag{3}$$

so ist dies die Integraldifferenz zwischen dem Integral J längs $\mathfrak{B}$ und dem Integral $\bar{J}$ längs unseres geknickten Linienzuges, da ja längs der Grenzkurve $f = 0$ ist. Nun ist nach Gleichung (2)

$$\Delta J = \int\limits_{\mathfrak{B}} \left\{ f(x, \bar{y}, \bar{y}') - f(x, \bar{y}, p) - (\bar{y}' - p)\,\frac{\partial f}{\partial y'}(x, \bar{y}, p) \right\} dx \tag{4}$$

oder, wenn wir die Weierstraßsche E-Funktion einführen:

$$\Delta J = \int\limits_{\mathfrak{B}} E(x, \bar{y}, p, \bar{y}')\,dx. \tag{5}$$

Nun ist aber wegen (1), (4), (5)

$$E(x, \bar{y}, p, \bar{y}') = \sqrt{h - V}\left\{ \sqrt{1 + \bar{y}'^2} - \sqrt{1 + p^2} - (\bar{y}' - p)\,\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \right\} =$$

$$= \sqrt{h - V}\,\sqrt{1 + \bar{y}'^2}\left\{ 1 - \frac{\bar{y}'\,p + 1}{\sqrt{1 + \bar{y}'^2}\,\sqrt{1 + p^2}} \right\}.$$

Aus der identischen Ungleichung

$$(1 + \bar{y}'\,p)^2 \leqq (1 + \bar{y}'^2)(1 + p^2)$$

und der von der Vergleichskurve stets erfüllten Ungleichung:

$$h - V(x, \bar{y}) \geqq 0$$

folgt

$$E \geqq 0.$$

Digitized by Google

Verschwinden kann die E-Funktion nur, wo $\mathfrak{B}$ mit der Grenzkurve oder mit einer Extremale zusammenfällt. Da es jedenfalls endliche Stücke von $\mathfrak{B}$ geben muß, wo das nicht der Fall ist, folgt

$$\Delta J > 0,$$

d. h. der genannte Linienzug liefert ein starkes Minimum; der gesperrt gedruckte Satz ist richtig. Diese Beweismethode gestattet eine unmittelbare Übertragung auf die Bewegung von n Punkten im Raume, führt also zu einem exakten Beweise des allgemeinen Satzes von Routh.[1])

[1]) Adv. Rig. Dynamics, § 455.

Bemerkung zu meiner Note in Band XIX, S. 247 dieser Zeitschrift.

Von **Hans Hahn** in Wien.

In § 3 der genannten Arbeit habe ich gezeigt, daß, wenn man die Menge K der Kondensationselemente einer Menge M bildet, deren Elemente einer Klasse L angehören, die Menge K nicht notwendig abgeschlossen ist, und in einer Anmerkung habe ich beigefügt, dies widerspreche einer beiläufigen Bemerkung des Herrn Fréchet (Rend. Pal. Bd. 22, S. 19, Z. 8 v. o.). Wie mir Herr Fréchet mitteilt, war auch ihm dieser Sachverhalt bekannt, es handelt sich an der betreffenden Stelle um einen Druckfehler: im Satze „et meîne pour une classe (L) quelconque“ ist (L) durch (v) zu ersetzen.

Digitized by Google

Geometrisches in der Weierstraßschen Theorie der algebraischen Funktionen.

Von **Josef v. Puzyna** in Lemberg.

(Schluß.)

Kapitel IV.

Allgemeines über rationale Funktionen $R(xy)$. Die Weierstraßsche H-Funktion.

Art. 27. Wir setzen folgende zwei Eigenschaften jeder beliebigen Funktion $s = R(xy)$ als bekannt voraus:

1. Die Funktion s besitzt im algebraischen irreduktiblen Gebilde $f(xy) = 0$ ebenso viele Nullstellen wie Unendlichkeitsstellen. [Die Anzahl ν ihrer Null- resp. Unendlichkeitsstellen wird als ihre Ordnung bezeichnet.]

2. Die Funktion s reduziert sich auf eine Konstante, wenn sie keine Null- resp. Unendlichkeitsstellen besitzt.

Wir bezeichnen eine Funktion s, welche ν Nullstellen $P_1', P_2', \ldots, P_\nu'$ und ν Unendlichkeitsstellen $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ besitzen soll, symbolisch mit

$$s = \frac{P_1' P_2' \ldots P_\nu'}{P_1 P_2 \ldots P_\nu} \tag{1}$$

und suchen sie wirklich darzustellen.

Es sei zuvörderst $\nu \leq p$, wo p — wie früher — den Rang des algebraischen Gebildes $f(xy) = 0$ bezeichnet. Wir bilden eine adjungierte Funktion des Grades $q = (n-2)$ oder $(n-1)$, in welcher $P_1 P_2 \ldots P_\nu$ ein Teil ihrer z willkürlichen Nullstellen [in $f(xy) = 0$] sein soll und bezeichnen die so gebildete Funktion mit

$$g(P_1 P_2 \ldots P_\nu Q_{\nu+1} \ldots Q_z \mid S_1 S_2 \ldots S_p).$$

$Q_{\nu+1}, Q_{\nu+2}, \ldots, Q_z$ sind weitere auf $f(xy) = 0$ zu wählende Nullpunkte, für welche $s \neq 0$ ist und die Punkte $S_1, S_2, \ldots, S_p$ hängen von der Gesamtheit der Punkte:

$$P_1, P_2, \ldots, P_\nu, Q_{\nu+1}, \ldots, Q_z$$

Digitized by Google

ab. Nun bilden wir das Produkt:

$$s.g = \frac{P_1' P_2' \dots P_\nu'}{P_1 P_2 \dots P_\nu} \cdot g\,(P_1 P_2 \dots P_\nu Q_{\nu+1} \dots Q_z \mid S_1 S_2 \dots S_p).$$

Dies ist eine Funktion, welche ausschließlich die Nullstellen

$$P_1', P_2' \dots P_\nu', Q_{\nu+1} \dots Q_z, S_1 S_2 \dots S_p \tag{2}$$

besitzt, im Endlichen überall endlich ist, im Unendlichen die Unendlichkeitsstellen der Funktion g hat und in allen vielfachen Punkten M_δ des algebraischen Gebildes (der algebraischen Grundkurve C) n^{ten} Grades den Charakter einer adjungierten Funktion hat. Sie ist somit selbst eine adjungierte Funktion.

Da nun die Gesamtanzahl ihrer Nullpunkte $(2) = (z+p)$ ist und also so viel als in g beträgt, ist sie — nach dem Satze X, Art. 25 — von demselben Grade wie g. Weiter sehen wir, daß in den Punkten (2) $z+p-\nu$ Nullpunkte der Funktion g enthalten sind, und da $z+p-\nu > z$ ist, so folgt daraus (Satz XI, Art. 25), daß sich diese Adjungierte auf Const. g und $P_1', P_2', \dots, P_\nu'$ auf $P_1, P_2, \dots, P_\nu$ reduzieren müssen. Wir haben also $s.g = \text{Const.}\, g$, woraus sich

$$s = \text{Const.}$$

herausstellt. Wir haben so den bekannten Satz bewiesen:

I. Eine rationale Funktion des Paares (xy), welche von der Ordnung $\nu \leqq p$ sein soll und deren Null- und Unendlichkeitsstellen willkürlich in $f(xy)=0$ fixiert werden sollen, existiert nicht. Sie reduziert sich auf eine Konstante.

Art. 28. Wir wollen jetzt $\nu > p$ voraussetzen. In diesem Falle ist es zweckmäßig, eine adjungierte Funktion von so großem Grade q zu bilden, daß $z > \nu$ werde. Die Punkte $P_1, P_2, \dots, P_\nu$ sollen einen Teil ihrer z willkürlichen Punkte bilden, wobei wir im Falle $q \geqq n$ noch v außerhalb $f(xy)=0$ liegende Punkte $C_1, C_2, \dots, C_v$ fixieren.

Die mit diesen Bedingungen konstruierte Adjungierte bezeichnen wir mit

$$g_2\,(P_1 P_2 \dots P_p P_{p+1} \dots P_\nu Q_{\nu+1} \dots Q_z \mid S_1 S_2 \dots S_p)$$

$Q_{\nu+1}, Q_{\nu+2}, \dots, Q_z$ liegen in $f(xy)=0$ ganz beliebig und sollen $s \neq 0$ ergeben.

$S_1, S_2, \dots, S_p$ hängen von den Punkten $P_1, P_2, \dots, P_\nu$, $Q_{\nu+1}, \dots, Q_z$ ab. Wir bilden weiter noch eine zweite Adjungierte desselben Grades q, welche unter ihren willkürlichen Nullpunkten die Punkte

$$S_1, S_2, \dots, S_p, Q_{\nu+1}, Q_{\nu+2}, \dots, Q_z$$

enthalten soll. Wir können diese noch mit $(\nu - p)$ willkürlichen Punkten vervollständigen und wir nehmen für diese Ergänzung die $(\nu - p)$ Nullpunkte $P_1', P_2', \dots, P_{\nu-p}'$ der Funktion s selbst.

Digitized by Google

Im Falle $q \geqq n$ können die noch außerhalb $f(xy) = 0$ zu wählenden Punkte $C_1', C_2', \ldots, C_v'$ beliebig fixiert werden. Wir bezeichnen diese Funktion mit:

$$g_1 (S_1 S_2 \ldots S_p,\ P_1' P_2' \ldots P_{\nu-p}',\ Q_{\nu+1} \ldots Q_z \mid R_1 R_2 \ldots R_p).$$

$R_1, R_2, \ldots, R_p$ sind hier von allen anderen Nullpunkten $S_1, S_2, \ldots, S_p,\ P_1', \ldots, P_p',\ Q_{\nu+1}, \ldots, Q_z$ abhängig.

Betrachten wir jetzt das Produkt:

$$s \cdot \frac{g_2}{g_1} =$$

$$= \frac{P_1' P_2' \ldots P_\nu'}{P_1 P_2 \ldots P_\nu} \cdot \frac{g_2 (P_1 P_2 \ldots P_p P_{p+1} P_{p+2} \ldots P_\nu Q_{\nu+1} \ldots Q_z \mid S_1 S_2 \ldots S_p)}{g_1 (S_1 S_2 \ldots S_p P_1' P_2' \ldots P_{\nu-p}' Q_{\nu+1} \ldots Q_z \mid R_1 R_2 \ldots R_p)}.$$

Dies ist eine rationale Funktion des Paares (xy) mit nur p vollkommen willkürlichen Nullstellen

$$(a) \qquad P_{\nu-p+1}', P_{\nu-p+2}', \ldots, P_\nu'$$

und mit p Unendlichkeitsstellen

$$(b) \qquad R_1, R_2, \ldots, R_p,$$

welche von den Punkten (a) gar nicht abhängen und darum in bezug auf (a) als willkürliche betrachtet werden müssen. Eine solche Funktion reduziert sich aber nach dem Satze I auf eine Konstante und wir müssen notwendig annehmen, daß

$$(3) \quad s = C \cdot \frac{g_1 (S_1 S_2 \ldots S_p P_1' P_2' \ldots P_{\nu-p}' Q_{\nu+1} \ldots Q_z \mid R_1 R_2 \ldots R_p)}{g_2 (P_1 P_2 \ldots P_p P_{p+1} P_{p+2} \ldots P_\nu Q_{\nu+1} \ldots Q_z \mid S_1 S_2 \ldots S_p)}$$

— bei vollkommen willkürlichen, in $f(xy) = 0$ fixierten Hilfspunkten $Q_{\nu+1}, \ldots, Q_z$ — sein muß.

Mit Aufstellung der Form (3) haben wir hiemit den bekannten Satz bewiesen, daß es keine Funktionen ν^{ter} Ordnung, $(\nu > p)$ mit vollkommen willkürlichen Null- und Unendlichkeitsstellen gibt. Es lassen sich vielmehr nur solche Funktionen bilden, welche an ν willkürlich gegebenen Stellen

$$(a') \qquad P_1, P_2, \ldots, P_\nu$$

unendlich — (Null) — und an $(\nu - p)$ willkürlich gegebenen Stellen

$$(b') \qquad P_1', P_2', \ldots, P_{\nu-p}'$$

Null — (unendlich) — werden. Die Stellen (b') werden dann von selbst mit p Punkten $R_1, R_2, \ldots, R_p$, welche nicht mehr willkürlich sind, zu ν Punkten ergänzt.

Digitized by Google

Werden die adjungierten Funktionen, welche in (3) im Zähler und im Nenner auftreten, kurz mit $g_1(xy)$, $g_2(xy)$ bezeichnet, so haben wir jetzt

$$s = C \cdot \frac{g_1(xy)}{g_2(xy)}.$$

Die Konstante C wird durch die Forderung bestimmt, daß s an einer Stelle $(a_0 b_0)$, welche von allen Punkten (a'), (b') und von den Punkten $R_1, R_2, \ldots, R_p$ verschieden ist, einen vorgeschriebenen, endlichen und von Null verschiedenen Wert annehmen soll. Wir haben also folgendes Resultat:

II. Eine Funktion ν^{ter} Ordnung $(\nu > p)$, deren ν Unendlichkeitsstellen und $(\nu - p)$ Nullstellen bekannt sind, läßt sich in der Form des Quotienten zweier adjungierter Funktionen desselben hinreichend hohen Grades mit $(z - \nu)$ beliebig fixierten Hilfsnullpunkten darstellen, wenn man diesem Quotienten noch eine multiplikative Konstante hinzufügt.

Aus der Willkürlichkeit der $(z - \nu)$ Hilfsnullpunkte und der Invarianz der Punkte $R_1, R_2, \ldots, R_p$ wird folgende Eigenschaft der adjungierten Funktionen abgeleitet:

III. Besitzt eine Adjungierte beliebig in $f(xy) = 0$ angenommene Punkte

$$P_1, P_2, \ldots, P_\nu, Q_{\nu+1}, \ldots, Q_z,$$

indem ihre abhängigen Punkte $S_1, S_2, \ldots, S_p$ sind, und bildet man eine zweite Adjungierte desselben Grades mit den Nullpunkten

$$S_1, S_2, \ldots, S_p, P'_{p+1}, \ldots, P'_\nu, Q_{\nu+1}, \ldots, Q_z,$$

so können sich bei fixen $P'_{p+1}, P'_{p+2}, \ldots, P'_\nu$ die Punkte $Q_{\nu+1}, \ldots, Q_z$ beliebig auf $f(xy) = 0$ gruppieren, ohne die abhängigen Nullpunkte $R_1, R_2, \ldots, R_p$ dieser zweiten Adjungierten zu ändern. Alle adjungierten Kurven

$$g(S_1 S_2 \ldots S_p, P'_{p+1} \ldots P'_\nu, Q_{\nu+1} \ldots Q_z \mid R_1 R_2 \ldots R_p) = 0$$

bilden somit ein Büschel mit $(p + \nu)$ fixen Grundpunkten $R_1, R_2, \ldots, R_p, P'_{p+1}, P'_{p+2}, \ldots, P'_\nu$.

Art. 29. Nehmen wir jetzt speziell: $\nu = p + 1$. In diesem Falle können wir zur Bildung der Funktion s_{p+1} der Ordnung $(p + 1)$ die Adjungierten vom Grade $(n - 1)$ oder $(n - 2)$ benützen.

Wir setzen:

$$P_1 = (a_1 b_1),\ P_2 = (a_2 b_2), \ldots, P_p = (a_p b_p),$$
$$P_{p+1} = (x' y') = X',$$
$$P'_1 = (a_0 b_0) = X_0.$$

Digitized by Google

wo $(a_\alpha b_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$; $(x'y')$ die Koordinaten der $(p+1)$ willkürlichen Unendlichkeitspunkte und $(a_0 b_0)$ die Koordinaten der einzigen willkürlichen Nullstelle sind.

Wenn nun die Adjungierte des Zählers mit g_0 und die des Nenners mit g bezeichnet wird und wenn wir auch die Veränderlichen x, y hineinschreiben, so haben wir nach der im vorigen Artikel aufgestellten Formel:

$$(4)\quad s_{p+1} = C \cdot \frac{g_0\,(xy, S_1' S_2' \ldots S_p', X_0, Q_{p+2}, Q_{p+3} \ldots Q_r \mid R_1' R_2' \ldots R_p')}{g\,(xy, P_1 P_2 \ldots P_p, X', Q_{p+2}, Q_{p+3} \ldots Q_r \mid S_1' S_2' \ldots S_p')}.$$

Dies wird auch kürzer auf folgende Weise geschrieben:

$$(5)\quad s_{p+1} = C \cdot \frac{g_0(xy, X_0 \mid x'y')}{g\,(xy, X')}.$$ [1])

Wir setzen voraus, daß die Stelle $(x'y')$ im Endlichen liegt und daß sie die Derivierte

$$\left.\frac{\partial f(xy)}{\partial y}\right]_{(x'y')} = f(x'y')_2 \neq 0$$

ergibt. In der Umgebung einer solchen Stelle haben wir im algebraischen Gebilde $f(xy) = 0$ nur ein Funktionenpaar

$$(6)\quad x = x_t' = x' + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots, \quad y = y_t' = y' + ct + c' t^2 + \cdots,$$

in welchem $A_1 \neq 0$ ist, c aber auch Null sein kann.

Nun ist

$$(7)\quad \frac{c}{A_1} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x'y')} = -\frac{f(x'y')_1}{f(x'y')_2}$$

und A_1 hat die Bedeutung

$$(8)\quad A_1 = \left(\frac{dx_t'}{dt}\right)_{t=0}.$$

Wird in (5) das Funktionenpaar $(x_t' y_t')$ für (x, y) eingesetzt und dann der Zähler und der Nenner nach Potenzen von t entwickelt, so erhalten wir:

$$(a)\quad g_0(x_t' y_t', X_0 \mid x'y') = g_0(x'y', X_0 \mid x'y') + t \cdot \mathfrak{P}(t),$$

$$(b)\quad \begin{cases} g(x_t' y_t' \mid X') = \\ = \left[g(x'y', X')_1 A_1 - g(x'y', X')_2 c\right] \cdot t + \cdots \\ = \left[g(x'y', X')_1 - g(x'y', X')_2 \dfrac{c}{A_1}\right] \cdot A_1 t + \cdots \\ = \left[g(x'y', X')_1 f(x'y')_2 - g(x'y', X')_2 f(x'y')_1\right] \cdot \dfrac{A_1 t}{f(x'y')_2} + \cdots \text{ [2])} \end{cases}$$

[1]) Die von dem vertikalen Striche rechts stehenden Veränderlichen deuten an, daß die Koeffizienten der Funktion von diesen Veränderlichen abhängen.

[2]) In der Entwicklung (b) fehlt das Freiglied, weil X' zu den Durchschnittspunkten der Kurve $g = 0$ mit $f = 0$ gehört.

Digitized by Google

Den Ausdruck in Klammern bezeichnen wir kurz mit $J(x'y')$, so haben wir jetzt in der Umgebung der Stelle $(x'y')$:

$$s_{p+1} = C \cdot \frac{f(x'y')_2 \cdot g_0(x'y', X_0 \mid x'y') + \cdots}{A_1 \cdot J(x'y')\, t + \cdots}$$

Wird nun

$$C = -\frac{A_1 \cdot J(x'y')}{f(x'y')_2\, g_0(x'y', X_0 \mid x'y')}$$

gesetzt, wodurch bewirkt wird, daß sich s_{p+1} in der Umgebung der Stelle $(xy) = (x'y')$ und beim Gebrauche des Funktionenpaares (6) in $[-t^{-1} + \mathfrak{P}(t)]$ entwickeln läßt, so haben wir schließlich aus (5)

$$s_{p+1} = -\frac{A_1 J(x'y') \cdot g_0(xy, X_0 \mid x'y')}{f(x'y')_2\, g_0(x'y', X_0 \mid x'y') \cdot g(xy, X')}. \tag{9}$$

Nun betrachten wir die Funktion $\frac{s_{p+1}}{A_1}$.

Sie hat folgende Eigenschaften:

Sie ist rational in x, y; hat p Unendlichkeitsstellen $(a_\alpha b_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ erster Ordnung und in der Umgebung der Stelle $(xy) = (x'y')$ beim Gebrauche des Funktionenpaares (6) besitzt die Entwicklung

$$-\frac{1}{A_1 t} + \mathfrak{P}(t). \tag{10}$$

Da wir aber aus der Reihe

$$x = x' + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots$$

durch ihre Umkehrung

$$A_1 t = (x - x') + \cdots$$

erhalten, so können wir (10) auch in der Form schreiben:

$$\frac{1}{x' - x} + \mathfrak{P}_1(x' - x). \tag{11}$$ [1]

Dies sind bekanntlich die charakteristischen Eigenschaften der Weierstraßschen Funktion $H(xy, x'y')$.

Die Indizes bei g bezeichnen die partiellen Derivierten dieser Funktion nach x resp. y, auf der Stelle $(xy) = (x'y')$. In Fällen, in denen g noch andere von x, y abhängige Elemente enthalten wird, werden sich diese Derivationen immer auf das erste in g stehende Paar (x, y) beziehen.

[1]) Ist $\overline{y'}$ einer der $(n-1)$ übrigen Werte von y, welche zu x' gehören, so sind die Stellen $x'\overline{y'}$), $(x'y')$ nicht identisch und es ist nicht möglich, aus (9) für die Umgebung der Stelle $(x'\overline{y'})$ zu der Entwicklung von der Form (11) zu gelangen. $H(x'\overline{y'}, x'y')$ ist endlich.

Digitized by Google

Art. 30. Es muß aber, um vollkommene Identität der Funktionen $\frac{s_{p+1}}{A_1}$, $H(xy, x'y')$ nachzuweisen, noch gezeigt werden, daß s_{p+1} und also auch $\frac{s_{p+1}}{A_1}$ auch in Veränderlichen x', y' rational ist.

Sind $(\xi_\alpha \eta_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ die Koordinaten der Punkte S_α und $(p_\varkappa q_\varkappa)$ die Koordinaten der Punkte $Q_\varkappa$, $\varkappa = p+2, p+3, \ldots, z$, so lassen sich ξ_α, η_α (nach Art. 26) als Wurzeln der Gleichungen:

$$(12) \qquad \varphi_0(x'y')\,x^p + \varphi_1(x'y')\,x^{p-1} + \cdots + \varphi_p(x'y') = 0$$

$$(13) \qquad \psi_0(x'y')\,y^p + \psi_1(x'y')\,y^{p-1} + \cdots + \psi_p(x'y') = 0$$

mit in x', y' rationalen Koeffizienten bestimmen.

Nun gehört zu einer Wurzel ξ_α sicher nur eine einzige Wurzel η_α (bei laufendem Paare $x'y'$). Setzt man also $x = \xi_\alpha$ in $f(xy) = 0$, $g(xy, X') = 0$ hinein, so werden die Gleichungen

$$(14) \qquad f(\xi_\alpha, y) = 0,\ g(\xi_\alpha y, X') = 0.$$

nur eine gemeinsame Wurzel y, welche dem ξ_α entspricht, besitzen. Sie ist eben $= \eta_\alpha$ und muß sich rational in ξ_α, x', y' ausdrücken lassen.

Setzen wir also

$$\eta_\alpha = R(x'y', \xi_\alpha), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p$$

und kehren zur Bestimmung der Adjungierten

$$g_0(xy, X_0 \,|\, x'y') = g_0(xy, S_1' S_2' \ldots S_\rho', X_0, Q_{\rho+2} \ldots Q_z \,|\, R_1' R_2' \ldots R_p') = 0$$

zurück. Nach Verbrauch der Punkte X_0, $Q_\varkappa$ wird ihre Gleichung die Form haben:

$$\lambda_1 \gamma_1(xy) + \lambda_2 \gamma_2(xy) + \cdots + \lambda_{p+1} \gamma_{p+1}(xy) = 0.$$

Setzen wir weiter

$$\gamma_\beta(\xi_\alpha \eta_\alpha) = \gamma_\beta\big(\xi_\alpha, R(x', y', \xi_\alpha)\big) = r_\beta(x', y', \xi_\alpha)$$

$$\beta \gtreqless \alpha = 1, 2, 3, \ldots, p,$$

so haben wir

$$g_0(xy, X_0 \,|\, x'y') =$$

$$= \begin{vmatrix} \gamma_1(xy), & \gamma_2(xy), \ldots\ldots, \gamma_p(xy) \\ r_1(x'y'\xi_1), & r_2(x'y'\xi_1), \ldots, r_p(x'y_1'\xi_1) \\ \vdots & \\ r_1(x'y'\xi_\rho), & r_2(x'y'\xi_p), \ldots, r_p(x'y_1'\xi_p) \end{vmatrix} =$$

$$\overline{G}_0(xy, x_0 y_0 \,|\, \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_\rho\, x'y') = 0.$$

Digitized by Google

$\overline{G}_0$ ist eine rationale und alternierende Funktion von ξ_1, ξ_2, ξ_d und enthält x', y' rational.

Der in (9) vorkommende Quotient

$$(15) \qquad \frac{g_0(xy,\ X_0 \mid x'y')}{g_0(x'y',\ X_0 \mid x'y')} = \frac{\overline{G}_0(xy,\ a_0 b_0 \mid \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_p, x'y')}{\overline{G}_0(x'y',\ a_0 b_0 \mid \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_p, x'y')}$$

ist jetzt rational in x', y' und symmetrisch in $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$. Er läßt sich deswegen zufolge der rationalen Koeffizienten der Gleichung (13) auf den Quotient zweier ganzen, in $x'y'$ (und xy) rationalen Funktionen reduzieren.

s_{p+1}, $\frac{s_{p+1}}{A_1}$ sind also rationale Funktionen sowohl in x, y wie auch in x', y' und wir können daher $\frac{s_{p+1}}{A_1} =$

$$(I) \qquad H(xy, x'y') = -\frac{J(x'y') \cdot g_0(xy, X_0 \mid x'y')}{f(x'y')_2 \cdot g_0(x'y', X_0 \mid x'y') \cdot g(xy, X')}$$

setzen. Indem wir weiter den auf die rationale Funktion von $x'y'$ reduzierten Quotienten (13) mit

$$(I') \qquad \frac{G_0(xy,\ a_0 b_0 \mid x'y')}{G_0(x'y',\ a_0 b_0 \mid x'y')}$$

bezeichnen, können wir $H(xy'\ x'y')$ auch in der Form

$$(II) \qquad H(xy, x'y') = -\frac{J(x'y')\ G_0(xy, a_0 b_0 \mid x'y')}{f(x'y')_2\ G_0(x'y', a_0 b_0 \mid x'y')\ g(xy, x'y')}$$

schreiben, wo hier $g(xy, X')$ ausdrücklich durch $g(xy, x'y')$ vertreten wurde. Wir haben jetzt:

$$G_0(xy,\ a_0 b_0 \mid x'y') = \Sigma\, \Phi_{\lambda\mu}(x'y')\, x^\lambda y^\mu$$

und folglich:

$$G_0(x'y', a_0 b_0 \mid x'y') = \Sigma\, \Phi_{\lambda\mu}(x'y')\, x'^\lambda y'^\mu$$

Anmerkung. Die Funktion $G_0(xy, a_0 b_0 \mid x'y')$ ist — wie früher $g_0(xy, X_0 \mid x'y')$ — in den Veränderlichen x, y vom Grade $(n-1)$ und besitzt noch den Charakter einer adjungierten Funktion, welche als ihre Nullstellen die Punkte

$$S_1, S_2 \ldots, S_p, X_0, Q_{p+2}, \ldots, Q_z$$

und die p weiteren, von den letzten abhängigen Nullpunkte besitzt.

Daraus folgt, daß, wenn wir die Null- und Unendlichkeitsstellen des Quotienten (I') auffinden wollen, wir den Quotienten

$$\frac{g_0(xy,\ X_0 \mid x'y')}{g_0(x'y', X_0 \mid x'y')}$$

der Diskussion unterziehen können.

Digitized by Google

Art. 31. Wenn die Funktionenpaare mit den Mittelpunkten $(a_\alpha b_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, mit

$$x_t^\alpha = a_\alpha + A_1 t + \cdots, \quad y_t^\alpha = b_\alpha + c_\alpha t + \cdots \tag{16}$$

bezeichnet werden, so erhalten wir aus (II), wenn wir dort (xy) mit $x_t^\alpha\, y_t^\alpha$ vertreten, folgende Entwicklungen:

$$\left.\begin{aligned} &H(x_t^\alpha y_t^\alpha, x'y') = \\ &= -\frac{J(x'y')}{J(a_\alpha b_\alpha)} \cdot \frac{f(a_\alpha b_\alpha)_2}{f(x'y')_2} \cdot \frac{G_0(a_\alpha b_\alpha, a_0 b_0 \mid x'y')}{G_0(x'y', a_0 b_0 \mid x'y')} \cdot \frac{1}{A_1 t} + \mathfrak{P}_\alpha(t) \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

Wir setzen

$$-\frac{1}{A_1} \cdot \frac{J(x'y')}{J(a_\alpha b_\alpha)} \cdot \frac{f(a_\alpha b_\alpha)_2}{f(x'y')_2} \cdot \frac{G_0(a_\alpha b_\alpha, a_0 b_0 \mid x'y')}{G_0(x'y', a_0 b_0 \mid x'y')} = H(x'y')_\alpha, \tag{III}$$

$$\alpha = 1, 2. \ldots, p$$

wodurch wir die p Weierstraßschen Funktionen $H(x'y')_\alpha$ gewonnen haben.

Aus den Entwicklungen (10), (17) ersehen wir, daß ihre Anfangsglieder von der festgesetzten Form der x_t', x_t^α (d. h. von A_1) abhängen. Um nun diese Unbequemlichkeit zu vermeiden, beachten wir, daß A_1 resp. die Bedeutung

$$A_1 = \left(\frac{dx_t'}{dt}\right)_{t=0}, \quad A_1 = \left(\frac{dx_t^\alpha}{dt}\right)_{t=0} \tag{18}$$

hat, und betrachten anstatt $H(x_t'y_t', xy)$, $H(x_t^\alpha y_t^\alpha, x'y')$ lieber die Produkte

$$H(x_t'y_t', x'y') \cdot \left(\frac{dx_t'}{dt}\right)_{t=0}, \quad H(x_t^\alpha y_t^\alpha, x'y') \cdot \left(\frac{dx_t^\alpha}{dt}\right)_{t=0} \tag{19}$$

Wir erhalten für sie die Entwicklungen

$$-\frac{1}{t} + \mathfrak{P}(t), \quad H(x'y')_\alpha \left(\frac{dx_t^\alpha}{dt}\right)_{t=0} \cdot \frac{1}{t} + \cdots \tag{20}$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, p,$$

deren Anfangsglieder nicht mehr von A_1 abhängig sind.

Werden jetzt in den Produkten (19)

$$\left(\frac{dx_t'}{dt}\right)_{t=0}, \quad \left(\frac{dx_t^\alpha}{dt}\right)_{t=0} \quad \text{durch} \quad \frac{dx_t}{dt}, \quad \frac{dx_t^\alpha}{dt}$$

Digitized by Google

ersetzt, so bleiben die Anfangsglieder der Entwicklungen dieser neuen Produkte noch immer dieselben wie in (20), denn die zu (18) hinzutretenden Summen $2A_2t + 3A_3t^2 + \cdots$ werden an die Anfangsglieder in (20) keinen Einfluß ausüben. Daher setzen wir

$$(A_1) \qquad H(x_t' y_t', x'y')\frac{dx_t'}{dt} = -\frac{1}{t} + \mathfrak{P}(t)$$

$$(B_1) \qquad H(x_t^a y_t^a, x'y')\frac{dx_t^a}{dt} = H(x'y')_a \left(\frac{dx_t^a}{dt}\right)_{t=0} \cdot \frac{1}{t} + \overline{\mathfrak{P}}_a(t)$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, p$$

und schließlich — wenn (x_t^0, y_t^0) das Funktionenpaar mit dem Mittelpunkte $(a_0\, b_0)$ ist —

$$(C_1) \qquad H(x_t^0 y_t^0, x'y')\frac{dx_t^0}{dt} = t.\mathfrak{P}_0(t).$$

Art. 32. Bevor wir zur Untersuchung von $H(xy, x'y')$ als Funktion von x', y' übergehen, wollen wir hier über die Nullpunkte der Adjungierten $g(xy, x'y')$ folgende Bemerkungen, welche uns im weiteren von Nutzen sein werden, machen.

Anm. 1. Wird in der Gleichung $g(xy, x'y') = 0$ die linke Seite in der Determinantenform dargestellt, so gilt die Gleichheit

$$g(xy, x'y') \equiv -g(x'y', xy)$$

unter der Bedingung, daß zu beiden Seiten dieser Gleichheit (xy) [resp. $(x'y')$] als laufende Koordinaten, $(x'y')$ [resp. (xy)] als Suffixe eines Nullpunktes aufgefaßt werden. Zu beiden Seiten dieser Gleichheit treten dann in diesem Falle dieselben abhängigen Nullpunkte auf.

Anm. 2. Nehmen wir an, daß die Punkte

$$(21) \qquad P_1, P_2, \ldots, P_p;\ Q_{p+2}, \ldots, Q_s$$

alle untereinander verschieden sind und daß X' mit keinem dieser Punkte zusammenfällt. Wir verlangen, daß sich in dem Systeme der Punkte $(\xi_\alpha\, \eta_\alpha) = S_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ einer oder mehrere der Punkte

$$(22) \qquad P_1, P_2, \ldots, P_p,\ X',\ Q_{p+2}, \ldots, Q_s$$

vorfinden, so, daß die Adjungierte $g(xy, X') = 0$ durch einen oder mehrere dieser Punkte hindurchgehen soll.

In diesem Falle müßten die Diskriminanten $\Delta_1(x'y')$, $\Delta_2(x'y')$ der im Art. 30 aufgestellten Resultanten: $R_1 = 0$, $R_2 = 0$ verschwinden. Aus den Gleichungen $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$ würde folgen, daß die Punkte (21) voneinander nicht unabhängig sind. Da wir aber alle Punkte (1) als von einander unabhängige voraussetzen, so

Digitized by Google

ist unsere Annahme, daß einige von den Punkten S_α mit den in (22) enthaltenen Punkten zusammenfallen, nicht stichhaltig.

Jetzt nehmen wir an, daß zwar alle Punkte (21) — wie früher — von einander verschieden sind, daß aber X' mit einem P_α zusammenfällt.

Soll jetzt ein S_β mit $P_\alpha \equiv X'$ identisch werden, so müssen außer den Gleichungen $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, welche jetzt Identitäten sind, noch weitere Bedingungen erfüllt werden. Diese würden aber darauf hindeuten, daß die Punkte (22) von einander abhängen. Unsere Voraussetzung ist demnach auch in diesem Falle unhaltbar.

Anm. 3. Gehören in der Gleichung $f(x'y) = 0$ zu x' die Werte: $y', \overline{y}', \ldots$, und wird verlangt, daß einer der Punkte S_β mit $(x'\overline{y}')$ zusammenfalle, so hat $R_1(x'y'x) = 0$ vielfache Wurzeln, infolge deren die Koeffizienten von $R_1 = 0$ gewisse Bedingungen erfüllen müssen. Dadurch wird aber die gegenseitige Unabhängigkeit der Punkte (22) vernichtet. Die Voraussetzung $S_\beta = (x'\overline{y}')$ ist demnach auch wegzuwerfen.

Art. 33. Wir wollen von nun an die Funktion $H(xy, x'y')$ als Funktion der Veränderlichen x', y' betrachten und ihre Entwicklungen in den Umgebungen der Stellen

$$(x'y') = (xy), \quad (x'y') = (a_0 b_0)$$
$$(x'y') = (a_\alpha b_\alpha), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p$$

untersuchen. Die Stellen (xy), $(a_0 b_0)$ $(a_\alpha b_\alpha)$ sollen im Endlichen liegen und die Derivierte $f(x'y')_2$ nicht annullieren.

Die Stelle (xy) soll noch von $(a_0 b_0)$ und $(a_\alpha b_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ verschieden sein.

Eigentlich sollten wir, wie es sich zeigen wird, (xy) auch als eine von den Punkten $Q_\varkappa$, $\varkappa = p+2, \ldots, z$ und von den Punkten S_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ verschiedene Stelle auffassen. Da aber die vermittelnden Stellen $Q_\varkappa$ beliebig in $f(xy) = 0$ fixiert werden können, so wollen wir sie fortwährend als ein derartiges, in $f(xy) = 0$ mobiles System betrachten, daß keiner dieser Punkte und dann auch keiner der Punkte S'_α mit dem fixierten (xy) zusammenfällt.

Dann reicht die Beschränkung, daß (xy) von $(a_0 b_0)$ und von $(a_\alpha b_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ verschieden ist, vollkommen aus.

1. Wird in (II) — Art. 31 — für $(x'y')$ das Funktionenpaar

$$x_t = x + A_1 t + \cdots, \quad y_t = y - \frac{f(xy)_1}{f(xy)_2} A_1 t + \cdots$$

eingesetzt, so erhalten wir aus den dort vorkommenden Funktionen folgende Entwicklungen:

$$J(x_t y_t) = J(xy) + t \cdot \mathfrak{P}_i(t).$$

Digitized by Google

$J(xy)$ kann hier aufgefaßt werden als die Jacobische Determinante zweier Kurven

$$g(\xi\eta, xy) = 0 \quad f(\xi\eta) = 0$$

(wo ξ, η laufende Koordinaten sind) für $(\xi\eta) = (xy)$. Da nun die Adjungierte

$$g(\xi\eta, xy) = g(\xi\eta, P_1 \dots P_p, xy, Q_{p+2} \dots Q_z \mid S_1 S_2 \dots S_p) = 0$$

die Grundkurve $f(\xi\eta) = 0$ im Punkte (xy) nicht berührt, so muß $J(xy) \neq 0$ sein.

Setzen wir

$$G_0(xy, a_0 b_0 \mid x_t y_t) = \Sigma \Phi_{\lambda\mu}(x_t y_t) x^\lambda y^\mu =$$

$$= \Sigma [\Phi'_{\lambda\mu}(xy) t^{S_{\lambda\mu}} + \cdots] x^\lambda \cdot y^\mu = A(xy) t^\varkappa + \cdots,$$

so muß auch

$$G_0(x_t y_t, a_0 b_0 \mid x_t y_t) = \Sigma \Phi_{\lambda\mu}(x_t y_t) x_t^\lambda y_t^\mu =$$

$$= \Sigma [\Phi'_{\lambda\mu}(xy) t^{S_{\lambda\mu}} + \cdots](x^\lambda y^\mu + \cdots) = A(xy) t^\varkappa + \cdots$$

sein. Wir haben also

$$\frac{G_0(xy, a_0 b_0 \mid x_t y_t)}{G_0(x_t y_t, a_0 b_0 \mid x_t y_t)} = 1 + t \mathfrak{P}_0(t).$$

Weiter ergibt sich (Art. 30, Anm. 2):

$$g(xy, x_t y_t) = -g(x_t y_t, xy) =$$

$$= -\left[g(xy, xy)_1 - g(xy, xy)_2 \frac{f(xy)_1}{f(xy)_2}\right] A_1 t + \cdots =$$

$$= -A_1 \cdot \frac{J(xy)}{f(xy)_2} t + \cdots$$

Werden diese Entwicklungen in (II) eingesetzt, so erhalten wir

$$(A) \qquad H(xy, x_t y_t) = \frac{1}{A_1 t} + \mathfrak{P}(t).$$

2. Wir ersetzen in (II) $(x'y')$ durch das Funktionenpaar:

$$x_t^0 = a_0 + A_1 t + \cdots, \quad y_t^0 = b_0 - \frac{f(a_0 b_0)_1}{f(a_0 b_0)_2} A_1 t + \cdots$$

Wir erhalten hier

$$(a) \qquad g(xy, x_t^0 y_t^0) = g(xy, a_0 b_0) + \cdots,$$

Digitized by Google

wo

$$g(xy, a_0 b_0) = g(xy, P_1 \ldots P_p, X_0, Q_{p+2}, \ldots, Q_z \mid S_1^{(0)} \ldots S_p^{(0)})$$

($S_a^{(0)}$ hängen von den Punkten P_a, X_0, $Q_\varkappa$ ab) zufolge der über (xy) gemachten Voraussetzungen von Null verschieden wird.

Setzen wir weiter

$$G_0[xy, a_0 b_0 \mid x_t^0 y_t^0) = G_0(xy, a_0 b_0 \mid a_0 b_0) + t \cdot \mathfrak{P}_0(t),$$

so haben wir vor allem zu entscheiden, ob hier das Anfangsglied für die in Betracht kommenden Stellen (xy) von Null verschieden wird.

$G_0(xy, a_0 b_0 \mid a_0 b_0)$ ist eine Adjungierte, welche als ihre (unabhängigen) Nullstellen die Punkte

$$S_1^{(0)}, \overset{(0)}{2}, \ldots, S_p^{(0)}, X_0, Q_{p+2}, \ldots, Q_z$$

besitzt. Diese annullieren aber auch $g(xy, a_0 b_0)$ und werden sie zugleich — da ihre Anzahl $= z$ ist — vollkommen bestimmen. Darum wird:

$$G_0(xy, a_0 b_0 \mid a_0 b_0) = \varphi(a_0 b_0) \cdot g(xy, a_0 b_0)$$

(wo $\varphi(a_0 b_0)$ eine von (xy) unabhängige Funktion ist) und

$$(b) \qquad G_0(xy, a_0 b_0 \mid x_t^{(0)} y_t^{(0)}) = \varphi(a_0 b_0) \cdot g(xy, a_0 b_0) + \cdots$$

Das Anfangsglied ist hier augenscheinlich von Null verschieden.

Setzen wir jetzt in $G(x'y', a_0 b_0 \mid x'y')$ für das erste Paar $(x'y')$ das Funktionenpaar $(x_t^0 y_t^0)$, so wird

$$G_0(x_t^0 y_t^0, a_0 b_0 \mid x'y') =$$

$$(c) \quad [G_0(a_0 b_0, a_0 b_0 \mid x'y')_1 f(a_0 b_0)_2 - G_0(a_0 b_0, a_0 b_0 \mid x'y')_2 f(a_0 b_0)_1] \frac{A_1 t}{f(a_0 b_0)_2}$$
$$+ \cdots$$

Wenn wir nun weiter für das zweite Paar $(x'y')$ das Funktionenpaar $(x_t^0 y_t^0)$ einsetzen, erhalten wir formell als Anfangsglied der Entwicklung:

$$(c') \quad [G_0(a_0 b_0, a_0 b_0 \mid a_0 b_0)_1 f(a_0 b_0)_2 - G_0(a_0 b_0, a_0 b_0 \mid a_0 b_0)_2 f(a_0 b_0)_1] \frac{A_1 t}{f(a_0 b_0)_2}$$

und wir müssen wieder entscheiden, ob hier der Ausdruck in Klammern von Null verschieden ist.

Wir hatten:

$$G_0(xy, a_0 b_0 \mid a_0 b_0) = \varphi(a_0 b_0) \cdot g(xy, a_0 b_0).$$

Digitized by Google

Es wird demnach

$$G_0(xy, a_0 b_0 \mid a_0 b_0)_1 = \varphi(a_0 b_0) \cdot g(xy, a_0 b_0)_1$$
$$G_0(xy, a_0 b_0 \mid a_0 b_0)_2 = \varphi(a_0 b_0) \cdot g(xy, a_0 b_0)_2 .$$

Wird nun hier $(xy) = (a_0 b_0)$ eingesetzt und dann diese Ausdrücke in (c') berücksichtigt, so erhalten wir aus (c):

$$(d) \qquad G_0(x_t^0 y_t^0, a_0 b_0)\, x_t^0 y_t^0) = \varphi(a_0 b_0) \cdot \frac{J(a_0 b_0)}{f(a_0 b_0)_2} \cdot A_1 t + \cdots$$

Nun ist $J(a_0 b_0)$ die Jacobische Determinante der Kurven $g(xy, a_0 b_0) = 0$, $f(xy) = 0$ für $(xy) = (a_0 b_0)$. Sie berühren sich in diesem Punkte nicht, weswegen $J(a_0 b_0) \neq 0$ ist. In (d) ist somit der Koeffizient von t^{+1} verschieden von Null.

Wir haben weiter

$$(e) \qquad J(x_t^0 y_t^0) = J(a_0 b_0) + t \cdot \mathfrak{P}_i(t)$$

$$(\text{mit } J(a_0 b_0) \neq 0) \quad \text{und} \quad f(x_t^0 y_t^0)_2 = f(a_0 b_0)_2 + \cdots,$$

$$\text{wo } f(a_0 b_0)_2 \neq 0 \text{ ist.}$$

Werden die Entwicklungen (a), (b), (d), (e) in (II) eingesetzt so ergibt sich:

$$(B) \qquad H(xy, x_t^0 y_t^0) = -\frac{1}{A_1 t} + \mathfrak{P}_0(t).$$

3. Wir setzen in (II) für (x', y') das Funktionenpaar

$$x_t^a = a_a + A_1 t + \cdots, \quad y_t^a = b_a - \frac{f(a_a b_a)_1}{f(a_a b_a)_2} \cdot A_1 t + \cdots$$

Beginnen wir mit dem Entwickeln von $J(x_t^a y_t^a)$, so bemerken wir vor allem, daß hier die Jacobische Determinante $J(a_a b_a)$ der Funktionen $g(xy, a_a b_a)$, $f(xy)$ gleich Null sein muß, weil die Kurve $g(xy, a_a b_a) = 0$ die Grundkurve $f(xy) = 0$ im Punkte $(xy) = (a_a b_a)$ berührt.

Nun schreiben wir die Gleichung der adjungierten Kurve, welche durch die z angenommenen Punkte noch nicht bestimmt worden ist, in der Form

$$\lambda_1 \gamma_1(xy) + \lambda_2 \gamma_2 \cdot (xy) + \cdots + \lambda_{z+1} \gamma_{z+1}(xy) = 0$$

und setzen kurz:

$$\gamma_s(a_a b_a) = \gamma_s(P_a), \quad \gamma_s(x_t^a y_t^a) = \gamma_s(P_{a,t})$$
$$a = 1, 2, \ldots, p$$
$$\gamma_s(p_\varkappa, q_\varkappa) = \gamma_s(Q_\varkappa), \quad \varkappa = p+2, \ldots, z$$
$$s = 1, 2, \ldots, z+1.$$

Digitized by Google

Dann wird

$$g(xy, x_i^a y_i^a) =$$

$$= \begin{vmatrix} \gamma_1(xy), \dots, \gamma_{z+1}(xy) \\ \gamma_1(P_1), \dots, \gamma_{z+1}(P_1) \\ \vdots \\ \gamma_1(P_a), \dots, \gamma_{z+1}(P_a) \\ \vdots \\ \gamma_1(P_p), \dots, \gamma_{z+1}(P_p) \\ \gamma_1(P_a) + \bar{\gamma}_1(P_a)\, t + \cdots, \dots, \gamma_{z+1}(P_a) + \bar{\gamma}_{z+1}(P_a)\, t + \cdots \\ \gamma_1(Q_{p+2}), \dots, \gamma_{z+1}(Q_{p+2}) \\ \vdots \\ \gamma_1(Q_z), \dots, \gamma_{z+1}(Q_z) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \gamma_1(xy), \dots, \gamma_{z+1}(xy) \\ \gamma_1(P_1), \dots, \gamma_{z+1}(P_1) \\ \vdots \\ \gamma_1(P_a), \dots, \gamma_{z+1}(P_a) \\ \vdots \\ \gamma_1(P_p), \dots, \gamma_{z+1}(P_p) \\ \bar{\gamma}_1(P_a)\, t + \cdots, \dots, \bar{\gamma}_{z-1}(P_a)\, t + \cdots \\ \gamma_1(Q_{p+2}), \dots, \gamma_{z+1}(Q_{p+2}) \\ \vdots \\ \gamma_1(Q_z), \dots, \gamma_{z+1}(Q_z) \end{vmatrix}$$

Wird nun diese Determinante nach Potenzen von t entwickelt und sucht man den Koeffizienten von t^{+1}, so zeigt sich, daß er eine Determinante ist, welche nach Art. 26 eine Adjungierte mit zweifachem Nullpunkte P_a und einfachen Nullpunkten $P_1, \dots, P_{a-1}, P_{a+1}, \dots, P_p, Q_{p+2}, \dots, Q_z$ ist. Er ist also $= g(xy, a_a b_a)$ und wir haben

$$g(xy, x_i^a y_i^a) = g(xy, a_a b_a)\, t + \cdots$$

Nimmt man hier zu beiden Seiten die Derivierten nach x und y, so wird

$$g(xy, x_i^a y_i^a)_1 = g(xy, a_a b_a)_1\, t + \cdots$$

$$g(xy, x_i^a y_i^a)_2 = g(xy, a_a b_a)_2\, t + \cdots$$

Digitized by Google

Daraus ergibt sich:

$$g(x_t^a y_t^a, x_t^a y_t^a)_1 = g(a_a b_a, a_a b_a)_1 \, t + \cdots$$

$$g(x_t^a y_t^a, x_t^a y_t^a)_2 = g(a_a b_a, a_a b_a)_2 \, t + \cdots$$

wo $g(a_a b_a, a_a b_a) \neq 0$ wird, weil $f(a_a b_a)_2 \neq 0$ vorausgesetzt wurde.

Multipliziert man nun diese Gleichungen resp. mit

$$f(x_t^a y_t^a)_2 = f(a_a b_a)_2 + \cdots$$

$$f(x_t^a y_t^a)_1 = f(a_a b_a)_1 + \cdots$$

(indem die links stehenden Glieder miteinander und die rechts stehenden Glieder miteinander multipliziert werden) und subtrahiert die zweite von der ersten, so wird:

$$J(x_t^a y_t^a) = J(a_a b_a)\, t + C_a t^2 + \cdots$$

Da nun $J(a_a b_a) = 0$ ist, so haben wir

$$(a'') \qquad J(x_t^a y_t^a) = C_a t^2 + \cdots$$

und wir müssen über das Verschwinden oder Nichtverschwinden des C_a entscheiden.

t^2 kommt hier aus dem Grunde zum Vorschein, daß die aus der Gleichung $g(xy, x'y') = 0$ entstehenden Gleichungen der adjungierten Kurven:

$$\alpha) \quad g(xy, a_a b_a) = 0, \qquad \beta) \quad g(a_a b_a, x'y') = 0,$$

wo (xy) resp. $(x'y')$ als laufende Koordinaten auftreten, die Kurve $f(xy) = 0$ $[f(x'y') = 0]$ nur zweipunktig berühren sollen.

Wäre nämlich $C_a = 0$, würde also die Entwicklung (a'') mit t^h, $h > 2$ beginnen, so müßte die Berührung der Kurve $\alpha)$ oder $\beta)$ mit $f = 0$ eine höhere werden. Dies kann aber bei den voneinander unabhängigen Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_\alpha, \ldots, P_\rho, P_\alpha, Q_{\rho+2}, \ldots, Q_z$ (Art. 32) nicht eintreten[1]) und wir müssen $C_\alpha \neq 0$ annehmen.

---

[1]) Betrachten wir die Kurven

$$g(xy, a_a b_a) = 0, \quad f(xy) = 0$$

und setzen für sie

$$\left[g_1 f_2 - g_2 f_1\right]_{(x_t^a y_t^a)} = \left\{f_1 \cdot f_2 \left[\frac{g_1}{f_1} - \frac{g_2}{f_2}\right]\right\}_{(x_t^a y_t^a)} = \overline{J}(x_t^a y_t^a).$$

Sind im Punkte P_a die Derivierten f_1, f_2 von Null verschieden, so entwickelt sich $\overline{J}(x_t^a y_t^a)$ in $C'_a t + \cdots$ mit $C'_a \neq 0$, weil die Differenz $\left(\frac{g_1}{f_1} - \frac{g_2}{f_2}\right)$ bei gewöhnlicher Berührung in P_a nur einmal in diesem Punkte Null werden soll.

Digitized by Google

Die Entwicklungen von:

$$G_0(xy, a_0 b_0 \mid x_t^a y_t^a), \quad G_0(x_t^a y_t^a, a_0 b_0 \mid x_t^a y_t^a)$$

beginnen mit den von t freien Gliedern

$$G_0(xy, a_0 b_0 \mid a_\alpha b_\alpha), \quad G_0(a_\alpha b_\alpha, a_0 b_0 \mid a_\alpha b_\alpha),$$

welche wir näher zu untersuchen haben.

Was die Funktion $G(xy, a_0 b_0 \mid a_\alpha b_\alpha)$ anbelangt, so ist sie bis auf einen von $(a_0 b_0)$, $(a_\alpha b_\alpha)$ abhängigen Faktor mit der Adjungierten:

$$\gamma(xy) = g(xy, S_1^{(\alpha)}, \ldots, S_p^{(\alpha)}, X_0, Q_{p+2}, Q_z \mid R_1^{(\alpha)}, \ldots, R_p^{(\alpha)})$$

identisch.[1])

Wird nun vorausgesetzt, daß (xy) auch von allen Punkten $R_\beta^{(\alpha)}$, $\beta = 1, 2, \ldots, p$, welche bei mobilen Punkten $Q_\varkappa$ invariant bleiben, verschieden wird, so wird auch $G_0(xy, a_0 b_0 \mid a_\alpha b_\alpha) \neq 0$.

Wird hingegen (xy) gleich einem der Punkte $R_\beta^{(\alpha)}$, $\beta = 1, 2, \ldots, p$, so wird auch $G_0(xy, a_0 b_0 \mid a_\alpha b_\alpha) = 0$.

Um nun über $G_0(a_\alpha b_\alpha, a_0 b_0 \mid a_\alpha b_\alpha)$ zu entscheiden, bemerken wir zuvörderst, daß in $\gamma(xy) = 0$ keiner der Punkte $R_\beta^{(\alpha)}$ mit $(a_\alpha b_\alpha)$ zusammenfallen kann. Denn in diesem Falle hätte die Adjungierte $\gamma(xy) = 0$ mit $g(xy, a_\alpha b_\alpha) = 0$ bis z Punkte gemein.

Beide Kurven müßten also identisch werden und die Kurve $g(xy, a_\alpha b_\alpha) = 0$ müßte folglich auch durch den beliebig in $f(xy) = 0$ fixierten Punkt $(a_\alpha b_\alpha)$ hindurchgehen. Dies ist aber keineswegs möglich.

Der Fall $S_\beta^{(\alpha)} = (a_\alpha b_\alpha)$ ist nach Art. 32 in $g(xy, a_\alpha b_\alpha) = 0$, also auch in $\gamma(xy) = 0$ nicht zulässig.

Nehmen wir jetzt an, daß im P_α die Derivierte $f_1 = 0$ wird, und zwar so, daß $f_1(x_t^a y_t^a) = c_\varkappa t^\varkappa + \cdots$ $\varkappa = 1, 2, \ldots$ wird. In der Umgebung des Punktes P_α muß aber $g(x_t^a y_t^a, a_\alpha b_\alpha)_1 = c_1 t + \cdots$ mit $c_1 \neq 0$ werden, weil die Kurve $g(xy, a_\alpha b_\alpha) = 0$ bei ihrer gewöhnlichen Berührung mit $f = 0$ in P_α, nur einmal in diesem Punkte verschwindende Derivierte g_1 besitzen soll. Wir haben also

$$\overline{J}(x_t^a y_t^a) = (c_\varkappa t^\varkappa + \cdots)(f(a_\alpha b_\alpha)_2 + \cdots)\left[\frac{c_1 t + \cdots}{c_\varkappa t^\varkappa + \cdots} - \frac{g(a_\alpha b_\alpha)_2}{f(a_\alpha b_\alpha)_2} + \cdots\right] =$$

$$= C'_\alpha t + \cdots$$

wo augenscheinlich $C'_\alpha \neq 0$ ist.

[1]) Die Punkte $S_1^{(\alpha)}, S_2^{(\alpha)}, \ldots, S_p^{(\alpha)}$ werden aus der Adjungierten

$$g(xy, P_1, P_2, \ldots, P_p, a_\alpha b_\alpha, Q_{p+2} \ldots, Q_z \mid S_1^{(\alpha)}, \ldots, S_p^{(\alpha)})$$

entnommen, wo sie als abhängige Punkte auftreten.

Digitized by Google

Wir müssen also annehmen, daß $G_0(a_\alpha b_\alpha, a_0 b_0 \mid a_\alpha b_\alpha) \neq 0$ ist.

Aus allen hier durchgeführten Erörterungen ergibt sich schließlich:

$$(C) \qquad H(xy, x_t^\alpha y_t^\alpha) = t \,.\, \mathfrak{P}_\alpha(t),$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, p,$$

wo $\mathfrak{P}_\alpha(0) \neq 0$ ist, wenn $(xy) \neq R_\beta^{(\alpha)}$ wird und $\mathfrak{P}_\alpha(0) = 0$, wenn (xy) gleich einem der Punkte $R_\beta^{(\alpha)}$ ist.

Art. 34. Nun haben wir in den Entwicklungen (A), (B) die Anfangsglieder, welche wieder von der festgesetzten Form der x_t, x_t^0, (von A_1) abhängen.

Das Produkt $A_1 \,.\, H(xy, x'y')$ wird in den Umgebungen der Stellen $(x'y') = (xy)$, $(x'y') = (a_0 b_0)$ die Entwicklungen mit den Anfangsgliedern $\pm t^{-1}$ ergeben und wir können nach analogen Betrachtungen wie im Art. 31 zu folgenden Eigenschaften der Funktion $H(xy, x'y')$ in bezug auf die Veränderlichen $x'y'$ gelangen:

$$(A_2) \qquad H(xy, x_\tau y_\tau) \frac{dx_\tau}{d\tau} = \frac{1}{\tau} + \mathfrak{P}(\tau)$$

$$(B_2) \qquad H(xy, x_\tau^0 y_\tau^0) \frac{dx_\tau^0}{d\tau} = -\frac{1}{\tau} + \mathfrak{P}_0(\tau)$$

$$(C_2) \qquad H(xy, x_\tau^\alpha y_\tau^\alpha) \frac{dx_\tau^\alpha}{d\tau} = \tau \,.\, \mathfrak{P}_\alpha(\tau)$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, p,$$

wo jetzt τ als Parameter auftritt.

Aus (C_2) ersehen wir, daß

$$(D_2) \qquad H(xy, a_\alpha b_\alpha) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p$$

wird.

Art. 35. Zu jedem Werte x gehören zufolge der Gleichung $f(xy) = 0$ n Werte $y = y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Wir setzen voraus, daß sie alle endlich, voneinander verschieden sind und daß keine der Stellen (xy), (xy_1), $(xy_2), \ldots, (xy_{n-1})$ mit einer der $(p+1)$ Stellen $(a_0 b_0)$, $(a_\alpha b_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ kongruiert.

Unter diesen Voraussetzungen (das System der Punkte $Q_\varkappa$ fortwährend als mobil annehmend), wollen wir

$$(23) \qquad H(xy, xy_s), \quad s = 1, 2, \ldots, n-1$$

näher untersuchen.

Digitized by Google

In den Funktionen

$$g(xy, xy_s),\ G_0(xy, a_0 b_0 \mid xy_s)$$

ersetzen wir vorläufig (xy) durch $(\xi\eta)$. Wir haben dann

$$(\alpha)\quad g(\xi\eta, xy_s) = g(\xi\eta, P_1 P_2 \dots P_p, xy_s, Q_{p+2} \dots Q_s \mid S_1' S_2' \dots S_p')$$

und die Fnnktion $G_0(\xi\eta, a_0 b_0 \mid xy_s)$ kann durch

$$(\beta)\qquad g(\xi\eta, S_1' S_2' \dots S_p', a_0 b_0, Q_{p+2} \dots Q_s \mid R_1' R_2' \dots R_p')$$

ersetzt werden. (Art. 31, Anm.) Soll nun (α) für $(\xi\eta) = (xy)$ verschwinden, so kann es nur auf solche Art geschehen, daß einer der Punkte $S_\alpha' = (xy)$ wird. Dies ist jedoch nach Art. 32, Anm. 3, unmöglich und wir haben

$$g(xy, xy_s) \neq 0.$$

In (β) kann hiemit auch keiner der Punkte $S_\alpha' = (xy)$ werden. Aber auch keiner der Punkte R_α' kann mit (xy) zusammenfallen. Denn dann müßte die Adjungierte, welche durch die von $(a_0 b_0)$ unabhängigen Punkte

$$S_1', S_2', \dots, S_p', xy, Q_{p+2}, \dots, Q_s$$

hindurchgeht, durch $(a_0 b_0)$ hindurchgehen. Es ist also

$$G_0(xy, a_0 b_0 \mid xy_s) \neq 0.$$

Wird weiter verlangt, daß in (β) eine der Identitäten $S_\alpha' = (xy_s)$, $R_\alpha' = (xy_s)$ bestehen sollte, so wird es sich nach analogen Schlüssen ergeben, daß es auch unzulässig ist. Setzt man dann $(\xi\eta) = (xy_s)$, so folgern wir, daß

$$G_0(xy_s, a_0 b_0 \mid xy_s) \neq 0 \text{ ist.}$$

Für $(x'y') = (xy_s)$ haben wir unter den über die Stellen (xy_s) gemachten Voraussetzungen:

$$J(xy_s) \neq 0,\quad f(xy_s)_2 \neq 0$$
$$s = 1, 2, \dots, n-1.$$

Sind daher alle in (23) eingehenden Funktionen (vgl. Formel II, Art. 30) endlich und von Null verschieden, so sind auch

$$(24)\qquad H(xy, xy_s) \text{ endlich und } \neq 0$$
$$s = 1, 2, \dots, n-1.$$

Digitized by Google

Werden die — zufolge der Gleichung $f(a_0, y) = 0$ — zu a_0 gehörigen Werte y mit $b_0, b_{01}, b_{02}, \ldots, b_{0\,n-1}$ bezeichnet und sollen die Stellen $(a_0 b_{0s})$, $s = 1, 2 \ldots, n-1$ dieselben Eigenschaften wie die Stellen $(x y_s)$ besitzen, so gelangen wir nach ähnlichen Erörterungen wie im vorigen Falle zum Schlusse, daß

$$H(x y, a_0 b_{0s}) \neq 0 \text{ und endlich sind.} \tag{25}$$

Auf Grund der Resultate (24), (25) und der Entwicklung (C) im Art. 33 können wir behaupten, daß das Produkt

$$H(x y, x' y') \,.\, (x' - x) \,.\, (x' - a_0) \tag{26}$$

als Funktion der Veränderlichen x', y' betrachtet u. a. uns noch unbekannten Nullstellen sicher die Nullstellen:

$$\begin{cases} (Y)\ (x y_s), & s = 1, 2, \ldots, n-1 \\ (B)\ (a_0 b_{0s}), & s = 1, 2, \ldots, n-1 \\ (P)\ (a_\alpha b_\alpha), & \alpha = 1, 2, \ldots, p \end{cases} \tag{27}$$

besitzt und an den Stellen $(x' y') = (x y)$, $(x' y') = (a_0 b_0)$ resp. die Werte

$$+ (x - a_0), \quad - (x - a_0),$$

was wieder aus den Entwicklungen (A), (B) des Art. 33 hervorgeht, annimmt.

Art. 36. Nun tritt im Produkte (26) in seinem Nenner die Derivierte $f(x' y')_2$ als Faktor auf. Diese ist — wie dies im folgenden Kapitel nachgewiesen werden wird — eine spezielle Adjungierte $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades. Als solche besitzt sie mit $f(x' y') = 0$

$$2d + z + p = 2d + (2n + p - 2) + p$$

gemeinsame Punkte. Von diesen fallen $2d$ in die Punkte M_δ, $(\delta = 1, 2, \ldots, k)$ die übrigen $(2n + p - 2) + p$ Punkte $C_1, C_2, \ldots$ teilweise in M_δ und sonst in solche nicht vielfachen Punkte von $f(x' y') = 0$ in welchen zu einem Werte x mehrere untereinander gleiche y gehören, hinein. Ist weiter

$$C \,.\, g(x' y', Y, B, P)$$

eine adjungierte Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, welche $(2n + p - 2)$ Nullpunkte (27) — (vor. Art.) — besitzt und deren multiplikative Konstante noch unbestimmt ist, so stellt der Quotient

$$\frac{C \,.\, g(x' y', Y, B, P)}{f(x' y')_2}$$

eine in x', y' rationale Funktion dar, welche

Digitized by Google

1. $(2n+p-2)+p$ Unendlichkeitsstellen $C_1, C_2, C_3, \ldots$
2. $(2n+p-2)$ Nullstellen (27) und noch
3. p abhängige Nullstellen $(R_1, R_2, \ldots, R_p)$ besitzt.

Soll nun dieser Quotient an der Stelle $(x'y') = (xy)$ den Wert $(x - a_0)$ annehmen, so muß

$$C = \frac{f(xy)_2 \cdot (x - a_0)}{g(xy, Y, B, P)}$$

sein. Setzen wir noch

$$\frac{(x - a_0) \cdot f(xy)_2 \cdot g(x'y', Y, B, P)}{g(xy, Y, B, P)} = E(xy, x'y'),$$

so haben wir im Quotienten

$$\frac{E(xy, x'y')}{f(x'y')_2}$$

eine in x', y' rationale Funktion, welche die oben aufgezählten Null- und Unendlichkeitsstellen besitzt und außerdem für $(x'y') = (xy)$ den Wert $(x - a_0)$ annimmt. Mit Rücksicht auf die genannten Stellen und den Wert in (xy) hat hiemit dieser Quotient dieselben Eigenschaften wie das Produkt (26).

Bilden wir nun den Quotienten

$$\frac{E(xy, x'y')}{(x' - x)(x' - a_0) f(x'y')_2} \tag{28}$$

und untersuchen seine Eigenschaften in den Veränderlichen x, y.

Setzen wir fest, daß die Gleichung $f(xy) = 0$ die Form

$$y^n - f_1(x) y^{n-1} + \cdots = 0$$

hat und bilden

$$\frac{f(x\bar{y}) - f(xy)}{\bar{y} - y} = \frac{\bar{y}^n - y^n}{\bar{y} - y} - f_1(x) \frac{\bar{y}^{n-1} - y^{n-1}}{\bar{y} - y} + \cdots,$$

wo $\bar{y}$ unbeschränkt veränderlich ist, so hat die Gleichung

$$\frac{f(x\bar{y}) - f(xy)}{\bar{y} - y} = 0$$

die Form:

$$\bar{y}^{n-1} - f_1'(xy) \bar{y}^{n-2} + \cdots = 0 \tag{29}$$

und ihre Wurzeln sind:

$$y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}.$$

Digitized by Google

Die Funktionen

$$g(x'y', Y, B, P), \quad g(xy, Y, B, P)$$

sind ganze, alternierende Funktionen in $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Wird nun aus beiden diesen Funktionen das Produkt

$$\left.\begin{array}{r} (y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_1 - y_4) \ldots (y_1 - y_{n-1}) \\ (y_2 - y_3)(y_2 - y_4) \ldots (y_2 - y_{n-1}) \\ (y_3 - y_4) \ldots (y_3 - y_{n-1}) \\ \vdots \\ (y_{n-2} - y_{n-1}) \end{array}\right\} = V$$

ausgeschieden und wird

$$g(x'y', Y, B, P) = V.S', \quad g(xy, Y, B, P) = V.S$$

gesetzt, so sind S' und S ganze rationale und symmetrische Funktionen in $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ und werden zufolge der Gleichung (29) auf ganze rationale Funktionen der x, y reduziert. (Natürlich ist S' auch in x', y' ganz und rational.) Daraus folgern wir, daß der Quotient (28) in x, y rational ist.

Er hat weiter folgende Eigenschaften:

1. In der Umgebung der Stelle $(xy) = (x'y')$ ist seine Entwicklung von der Form: $(x' - x)^{-1} + \mathfrak{P}(x' - x)$.

2. Die Stellen $(xy) = (a_\alpha b_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ sind seine einfachen Unendlichkeitsstellen.

3. In $(xy) = (a_0 b_0)$ verschwindet er einfach.

4. An allen Stellen $(xy) \neq (x'y')$ ist er — selbst, wenn die Stellen (x, y), $(x'y')$ dasselbe x enthalten — endlich.

Er ist somit $= H(xy, x'y')$, so daß wir jetzt:

$$(30) \qquad H(xy, x'y') = \frac{(x - a_0) f(xy)_2 \, g(x'y', Y, B, P)}{(x' - x)(x' - a_0) f(x'y')_2 \, g(xy, Y, B, P)}$$

schreiben können.

Aus dieser Form ersehen wir:

IV. Die Funktion $H(xy, x'y')$ als Funktion der Veränderlichen x', y' besitzt als ihre Nullstellen

1. die $2p$ Stellen $(a_\alpha b_\alpha)$, R_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$;

2. die $2n$ Stellen, welche sich aus $x' = \infty$ ergeben.

Die Gesamtanzahl dieser Nullstellen ist gleich $2n + 2p$.

Digitized by Google

Ihre Unendlichkeitsstellen sind:

1. Die Stellen $(x'y') = (xy)$, $(x'y') = (a_0 b_0)$ und

2. die $(2n+2p-2)$ Unendlichkeitsstellen $C_1, C_2, \ldots$ des Quotienten $\dfrac{g(x'y', Y, B, P)}{f(x'y')_2}$.

Die Gesamtanzahl dieser Stellen ist wieder $(2n+2p)$, wie es sein soll.

Aus (30) muß sich weiter für die Umgebung der Stelle $(x'y') = (a_0 b_0)$ die Entwicklung von der Form $-\dfrac{1}{A_1 \tau} + \mathfrak{P}(\tau)$ ergeben.

Ersetzen wir also $(x'y')$ durch (x_τ^0, y_τ^0), wo $x_\tau^0 = a_0 + A_1 \tau + \cdots$ ist, so haben wir

$$-\frac{f(xy)_2}{f(a_0 b_0)_2} \cdot \frac{g(a_0 b_0, Y, B, P)}{g(xy, Y, B, P)} \cdot \frac{1}{A_1 \tau} + \mathfrak{P}(\tau)$$

und es muß

$$\frac{g(a_0 b_0, Y, B, P)}{g(xy, Y, B, P)} = \frac{f(a_0 b_0)_2}{f(xy)_2} \tag{31}$$

und also auch

$$E(xy, a_0 b_0) = (x - a_0) \cdot f(a_0 b_0)_2$$

sein.

Aus der Gleichung (31) ergibt sich unterwegs folgender Satz über adjungierte Funktionen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades:

V. Schneiden zwei (verschiedene) zu der y-Achse parallele Gerade p, p' die Kurve $f(xy) = 0$ resp. in den Punkten

$$A_\varkappa = (a, b_\varkappa), \quad A'_\varkappa = (a' b'_\varkappa), \quad \varkappa = 1, 2, \ldots, n, \quad (b \neq b')$$

und werden alle adjungierten Funktionen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades mit den Nullpunkten

$$A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, \quad A'_1, A'_2, \ldots, A'_{n-1}$$

gebildet, so hat jede Funktion dieser Gesamtheit in A_n, A'_n solche Werte W, W' daß

$$\frac{W}{W'} = \frac{f(a, b_n)_2}{f(a', b'_n)_2}$$

wird. Dieses Verhältnis ist somit eine Invariante für alle betrachteten adjungierten Funktionen (für den Büschel der adjungierten Kurven $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades mit den Grundpunkten $A_\varkappa$, $A'_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2, \ldots, (n-1)$].

Digitized by Google

Wird noch (31) in der Form (30) berücksichtigt, so kann $H(xy, x'y')$ auch in folgender Form geschrieben werden:

$$(32) \quad H(xy, x'y') = \frac{(x-a_0) f(a_0 b_0)_2 g(x'y', Y, B, P)}{(x'-x)(x'-a_0) f(x'y')_2 g(a_0 b_0, Y, B, P)}.$$

Die Definitionsgleichungen (30) und (32) werden in der gemeinsamen Formel:

$$H(xy, x'y') = \frac{E(xy, x'y')}{(x'-x)(x'-a_0) f(x'y')_2}$$

(Abelsche Transzendenten S. 205) enthalten.

Kapitel V.

Die Derivierten $f(xy)_1$, $f(xy)_2$. Die deriviert adjungierten Funktionen.

Art. 37. Wir wollen in diesem Kapitel die Derivierten $f(xy)_1$, $f(xy)_2$ näher untersuchen und beginnen mit der Bildung der transformierten Funktionen der Derivierten $f(xy)_2$, um daraus weitere Folgerungen ziehen zu können.

Ist in der Umgebung eines im Endlichen liegenden Punktes $M_\delta = (a, b)$:

$$f(\xi_0 \eta_0) = 0,\ f_1(\xi_1 \eta_{11}) = 0,\ f_2(\xi_2 \eta_{12}) = 0, \ldots$$

eine Kette der transformierten Gleichungen, welche durch Anwendung sukzessiver Transformationen

$$S_1, S_2, S_3, \ldots$$

aus $f(\xi_0 \eta_0) = 0$ erhalten werden und deren Ordnungen der Reihe nach

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots [1])$$

sind, so haben wir nach Anwendung von S_1:

$$f(\xi_0 \eta_0) = \xi_1^{\mu_1} \cdot f_1(\xi_1 \eta_{11})$$

Die partielle Differentiation dieser Gleichung nach ξ_1 resp. η_{11} ergibt zwei Gleichungen:

$$\mu_1 \xi_1^{\mu_1 - 1} f_1 + \xi_1^{\mu_1} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} = f(\xi_0 \eta_0)_1 \frac{\partial \xi_0}{\partial \xi_1} + f(\xi_0 \eta_0)_2 \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi_1}$$

$$\xi_1^{\mu_1} \frac{\partial f_1}{\partial \eta_{11}} = f(\xi_0 \eta_0)_1 \frac{\partial \xi_0}{\partial \eta_{11}} + f(\xi_0 \eta_0)_2 \frac{\partial \eta_0}{\partial \eta_{11}}$$

[1]) Der Bequemlichkeit wegen wurde die Ordnung der Gleichung $f(\xi_0 \eta_0) = 0$ mit μ_1 bezeichnet.

Digitized by Google

und aus diesen erhalten wir:

$$(1)\quad \frac{\partial(\xi_0\,\eta_0)}{\partial(\xi_1\,\eta_1)}\cdot f(\xi_0\,\eta_0)_2 = \xi_1^{\mu_1-1}\cdot\left[\xi_1\frac{\partial f_1}{\partial\eta_1}\frac{\partial\xi_0}{\partial\xi_1} - \left(\mu_1 f_1 + \xi_1\frac{\partial f_1}{\partial\xi_1}\right)\frac{\partial\xi_0}{\partial\eta_1}\right].$$

Da nun

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial\xi_1} = (g+\alpha\eta_1), \qquad \frac{\partial\xi_0}{\partial\eta_1} = \alpha\xi_1$$

$$\frac{\partial\eta_0}{\partial\xi_1} = (h+\beta\eta_1), \qquad \frac{\partial\eta_0}{\partial\eta_1} = \beta_1\xi_1$$

und folglich

$$(2)\qquad \frac{\partial(\xi_0\,\eta_0)}{\partial(\xi_1\,\eta_1)} = \xi_1$$

ist, so haben wir weiter:

$$(A)\; f(\xi_0\eta_0)_2 = \xi_1^{\mu_1-1}\left[(g+\alpha\eta_1)\frac{\partial f_1(\xi_1\eta_1)}{\partial\eta_1} - \alpha\xi_1\frac{\partial f_1(\xi_1\eta_1)}{\partial\eta_1} - \mu_1\alpha f_1(\xi_1\eta_1)\right],$$

wo der Ausdruck in Klammern die erste transformierte Funktion der Derivierten $f(\xi_0\,\eta_0)_2$ ist. Sie ist — wenn $g\neq 0$ wird und $\frac{\partial f_1(\xi_1\,\eta_1)}{\partial\eta_1}$ von der Ordnung (μ_1-1) ist — von der Ordnung (μ_1-1). Hingegen — wenn $g=0$, also $\alpha\neq 0$ ist — wird sie von der Ordnung $\geqq\mu_1$.

Um nun zu den weiteren transformierten Funktionen der betrachteten Kette zu gelangen, wollen wir zuerst einige Formeln, welche uns nötig sein werden, ableiten.

Wir haben — analog mit (2) — auch

$$(3)\qquad \frac{\partial(\xi_{r-1},\,\eta_{r-1})}{\partial(\xi_r,\,\eta_r)} = \xi_r, \quad r=2,3,\ldots$$

Wenn wir weiter festsetzen, daß:

$$\sigma = 0,1,2,\ldots;\; r=1,2,3,\ldots$$

sind und $\sigma<r$ sein soll, so haben wir

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\xi_\sigma}{\partial\xi_r} = \dfrac{\partial\xi_\sigma}{\partial\xi_{r-1}}\cdot\dfrac{\partial\xi_{r-1}}{\partial\xi_r} + \dfrac{\partial\xi_\sigma}{\partial\eta_{r-1}}\cdot\dfrac{\partial\eta_{r-1}}{\partial\xi_r} \\ \dfrac{\partial\xi_\sigma}{\partial\eta_r} = \dfrac{\partial\xi_\sigma}{\partial\eta_{r-1}}\cdot\dfrac{\partial\xi_{r-1}}{\partial\eta_r} + \dfrac{\partial\xi_\sigma}{\partial\eta_{r-1}}\cdot\dfrac{\partial\eta_{r-1}}{\partial\eta_r} \end{cases}$$

Digitized by Google

Es ist aber:

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi_{r-1}}{\partial \xi_r} = (g_{r-1} + \alpha_{r-1}\eta_r), & \dfrac{\partial \xi_{r-1}}{\partial \eta_r} = \alpha_{r-1}\xi_r \\ \dfrac{\partial \eta_{r-1}}{\partial \xi_r} = (h_{r-1} + \alpha_{r-1}\eta_r), & \dfrac{\partial \eta_{r-1}}{\partial \eta_r} = \beta_{r-1}.\xi_r \end{cases}$$

und — wenn wir dies in (4) einsetzen und dann die Jacobische Determinante $\dfrac{\partial(\xi_0\eta_0)}{\partial(\xi_2\eta_2)}$, $[\alpha = 0, r = 2]$, bilden — so wird

$$\frac{\partial(\xi_0\eta_0)}{\partial(\xi_2\eta_2)} = \frac{\partial(\xi_0\eta_0)}{\partial(\xi_1\eta_1)} \cdot \frac{\partial(\xi_1\eta_1)}{\partial(\xi_2\eta_2)} = \xi_1\xi_2.$$

Nehmen wir jetzt an, daß auch

$$\frac{\partial(\xi_0\eta_0)}{\partial(\xi_{r-1}\eta_{r-1})} = \xi_1 . \xi_2 \ldots \xi_{r-1}$$

ist, so läßt sich weiter nach Anwendung der Formeln (4) für $\alpha = 0$ und $r = r$ und der Formeln (5) beweisen, daß auch

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\xi_0\eta_0)}{\partial(\xi_r\eta_r)} = \dfrac{\partial(\xi_0\eta_0)}{\partial(\xi_{r-1}\eta_{r-1})} \cdot \dfrac{\partial(\xi_{r-1}\eta_{r-1})}{\partial(\xi_r . \eta_r)}, \\ \text{also } = \xi_1 . \xi_2 \ldots \xi_r \text{ ist.} \end{cases}$$

Wir werden noch von folgenden Determinanten:

$$(7)\quad [\sigma, r] = \frac{\partial(\xi_\sigma \xi_\sigma)}{\partial(\xi_r \eta_r)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi_\sigma}{\partial \xi_r}, & \dfrac{\partial \xi_0}{\partial \xi_r} \\ \dfrac{\partial \xi_\sigma}{\partial \eta_r}, & \dfrac{\partial \xi_0}{\partial \eta_r} \end{vmatrix}, \quad \sigma \leqq r$$

Gebrauch machen müssen und wir wollen sie berechnen.

Wir haben:

$$(8)\quad [\sigma, \sigma] = \begin{vmatrix} 1, & \dfrac{\partial \xi_0}{\partial \xi_\sigma} \\ 0, & \dfrac{\partial \xi_0}{\partial \eta_\sigma} \end{vmatrix} = \frac{\partial \xi}{\partial \eta_\sigma} = \gamma_\sigma(\xi_\sigma \eta_\sigma) \cdot \xi_\sigma,$$

wo γ_σ eine in ξ_σ, η_σ ganze und rationale, aus der Transformationenkette $S_1, S_2, \ldots, S_\sigma$ entstammende Funktion ist.

Digitized by Google

Wenn wir nun weiter in $[\sigma, r]$ die Formeln (4) für $\sigma = \sigma$ und $r = r$ und für $\sigma = 0$ und $r = r$ und dann auch die Formeln (5) berücksichtigen, erhalten wir

$$[\sigma, r] = [\sigma, r-1] \cdot \frac{\partial(\xi_{r-1}, \eta_{r-1})}{\partial(\xi_r, \eta_r)}$$

und folglich $= [\sigma, r-1] \,.\, \xi_r$.

Wird nun weiter

$$\begin{aligned} &[\sigma, r-1] \text{ durch } [\sigma, r-2] \,.\, \xi_{r-1} \\ &[\sigma, r-2] \quad \text{„} \quad [\sigma, r-3] \,.\, \xi_{r-2} \\ &\quad \vdots \\ &[\sigma, \sigma+1] \quad \text{„} \quad [\sigma, \sigma]\, \xi_{\sigma+1} = \gamma_\sigma(\xi_\sigma \eta_\sigma)\, \xi_\sigma \,.\, \xi_{\sigma+1} \end{aligned}$$

ersetzt, so wird sich schließlich

$$[\sigma, r] = \gamma_\sigma(\xi_\sigma \eta_\sigma)\, \xi_\sigma \,.\, \xi_{\sigma+1} \ldots \xi_{r-1} \,.\, \xi_r \tag{9}$$

ergeben.

Auf diese vorbereitenden Formeln gestützt, wollen wir nun zur Auflösung unserer Aufgabe übergehen und betrachten die Gleichung:

$$\xi_1^{\mu_1} \,.\, \xi_2^{\mu_2} \,.\, \xi_3^{\mu_3} \ldots \xi_r^{\mu_r} \,.\, f_r(\xi_r \eta_r) = f(\xi_0 \eta_0).$$

Die partielle Differentiation der linken Seite dieser Gleichung nach ξ_r resp. η_r ergibt folgende Ausdrücke:

$$(10) \quad \begin{cases} \xi_1^{\mu_1 - 1} \,.\, \xi_2^{\mu_2 - 1} \ldots \xi_r^{\mu_r - 1} \left[f_r \,.\, \sum_{\sigma=1}^{r} \mu_\sigma \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial \xi_r}\, \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{\sigma-1} \xi_{\sigma+1} \ldots \xi_r + \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_r \frac{\partial f_r}{\partial \xi_r} \right] = L_1 \\ \xi_1^{\mu_1 - 1}\, \xi_2^{\mu_2 - 1} \ldots \xi_r^{\mu_r - 1} \left[f_r \,.\, \sum_{\sigma=1}^{r-1} \mu_\sigma \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial \eta_r}\, \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{\sigma-1} \xi_{\sigma+1} \ldots \xi_r + \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_r \frac{\partial f_r}{\partial \eta_r} \right] = L_2. \end{cases}$$

Aus denselben Differentiationen der rechten Seite in (10) erhalten wir

$$L_1 = f(\xi_0 \eta_0)_1 \frac{\partial \xi_0}{\partial \xi_r} + f(\xi_0 \eta_0)_2 \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi_r}$$

$$L_2 = f(\xi_0 \eta_0)_1 \frac{\partial \xi_0}{\partial \eta_r} + f(\xi_0 \eta_0)_2 \frac{\partial \eta_0}{\partial \eta_r}$$

und daraus

$$L_1 \frac{\partial \xi_0}{\partial \eta_r} - L_2 \frac{\partial \xi_0}{\partial \xi_r} = - \frac{\partial(\xi_0 \eta_0)}{\partial(\xi_r \eta_r)} \cdot f(\xi_0 \eta_0)_2.$$

Digitized by Google

Ersetzt man hier L_1, L_2 durch die in (10) angegebenen Ausdrücke, so wird:

$$\xi_1^{\mu_1-1}\cdot\xi_2^{\mu_2-1}\cdots\xi_r^{\mu_r-1}\left\{f_r\sum_{\sigma=1}^{r-1}\mu_\sigma\cdot[\sigma r]\,\xi_1\xi_2\ldots\xi_{\sigma-1}\,\xi_{\sigma+1}\ldots\xi_r+\right.$$

$$\left.+\mu_r\cdot f_r\cdot\frac{\partial\xi_0}{\partial\eta_r}\,\xi_1\xi_2\ldots\xi_{r-1}+\xi_1\xi_2\ldots\xi_r\frac{\partial(f_r,\xi_0)}{\partial(\xi_r,\eta_r)}\right\}=$$

$$=-\frac{\partial(\xi_0\eta_0)}{\partial(\xi_r\eta_r)}\cdot f(\xi_0\eta_0)_2$$

und daraus — wenn für jedes $[\sigma r]$ die Formel (9), für $\frac{\partial(\xi_0\eta_0)}{\partial(\xi_r\eta_r)}$ die Formel (6) eingesetzt und $\frac{\partial\xi_0}{\partial\xi_r}$ durch

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\xi_r}{\partial\xi_r}, & \frac{\partial\xi_0}{\partial\xi_r}\\ \frac{\partial\xi_r}{\partial\eta_r}, & \frac{\partial\xi_0}{\partial\eta_r}\end{vmatrix}=[rr]=\gamma_r(\xi_r\eta_r)\,\xi_r$$

vertreten wird, wird sich schließlich

$$\xi_1^{\mu_1-1}\,\xi_2^{\mu_1-1}\cdots\xi_r^{\mu_r-1}\left\{f_r\sum_{\sigma=1}^{r}\mu_\sigma\gamma_\sigma(\xi_r\eta_r)\,\xi_{\sigma+1}\cdot\xi_{\sigma+2}\ldots\xi_r+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial(f_r,\xi_0)}{\partial(\xi_r\eta_r)}\right\}=-f(\xi_0\eta_0)_2$$

ergeben.

Die mit Hilfe der sukzessiven Transformationen $S_1, S_2, \ldots, S_r$ resultierende Gleichung $\{f_2\}_r=0$ hat somit die Gestalt:

$$(11)\qquad\frac{\partial(\xi_0,f_r)}{\partial(\xi_r\eta_r)}-f_r\cdot\sum_{\sigma=1}^{r}\mu_\sigma\gamma_\sigma(\xi_r\eta_r)\,\xi_{\sigma+1}\,\xi_{\sigma+2}\ldots\xi_r=0.$$

Der zweite Addend ist hier sicher von der Ordnung $>\mu_r$. Hingegen kann sich die Ordnung (μ_r-1) aus der Jacobischen Determinante

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial\xi_r}\cdot\frac{\partial f_r}{\partial\eta_r}-\frac{\partial\xi_0}{\partial\eta_r}\frac{\partial f_r}{\partial\xi_r},$$

und zwar aus ihrem ersten Addenden ergeben. Denn, wenn auch $\frac{\partial f_r}{\partial\xi_r}$ von der Ordnung (μ_r-1) sein würde, enthält doch $\frac{\partial\xi_0}{\partial\eta_r}$ den Faktor ξ_r, wodurch sich die Ordnung des zweiten Addenden auf μ_r heben muß.

Digitized by Google

Ist hingegen $\frac{\partial f_r}{\partial \xi_r}$ von der Ordnung $(\mu_r - 1)$ und wird berücksichtigt, daß in $\frac{\partial \xi_0}{\partial \xi_r}$ das von ξ_r freie Glied gleich

$$g \cdot g_1 g_2 \ldots g_{r-1} (g_r + \alpha_r \eta_r)$$

ist, so wird im Falle, daß $g, g_1, g_2, \ldots, g_r$ alle von Null verschieden sind, die Ordnung des Produktes $\frac{\partial \xi_0}{\partial \xi_r} \frac{\partial f_r}{\partial \eta_r}$ gleich $= (\mu_r - 1)$ sein.

Da dasselbe auch von den transformierten Gleichungen $f_1\}_r = 0$ der derivierten Gleichung $f(\xi_0 \eta_0)_1 = 0$ (mit der Änderung, daß hier das Nichtverschwinden aller Größen $h, g, g_1, g_2, \ldots, g_r$ die Ordnung $\mu_r - 1$ ergeben kann) bewiesen werden kann, sind wir durch obige Erörterungen zum folgenden Satze angelangt:

I. Die derivierten Kurven $f(xy)_1 = 0$, $f(xy)_2 = 0$ erfüllen jedenfalls in allen M_δ, welche im Endlichen liegen, diejenigen d Bedingungen, welche eine Adjungierte in diesen Punkten zu erfüllen hat.

Art. 38. Liegt nun M_δ im Unendlichen und setzt man voraus, daß in der Gleichung

$$f(xy) = (xy)_n + (xy)_{n-1} + \cdots = 0$$

die homogene Anfangsfunktion $(xy)_n$ für $(xy) = (gh)$, $(g'h')$, ... gleich Null wird, so können wir folgende Untersuchungen durchführen:

Wir setzen

$$x = (g + \alpha\eta)\frac{1}{\xi}, \quad y = (h + \beta\eta)\frac{1}{\xi}, \cdots$$

in $f(xy) = 0$ hinein und nehmen an, daß wir

$$f(xy) = \frac{\varphi(\xi\eta)}{\xi^n}$$

erhalten.

Ist $\varphi(\xi\eta)$ von der Ordnung μ, so haben wir mit dem μ-fachen Stammpunkte, welcher im Unendlichen, und zwar in der Richtung $\frac{h}{g}$ liegt, zu tun.

Differentiert man die Gleichung (12) partiell nach ξ resp. η, so wird:

$$f(xy)_1 \frac{\partial x}{\partial \xi} + f(xy)_2 \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{1}{\xi^{n+1}} \cdot \left(\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - n\varphi\right)$$

$$f(xy)_1 \frac{\partial x}{\partial \eta} + f(xy)_2 \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{\xi^n} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}.$$

Digitized by Google

Daraus ergibt sich

$$(13)\quad -\frac{\partial(xy)}{\partial(\xi\eta)} f(xy)_2 = \frac{1}{\xi^{n+1}}\left[\left(\xi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} - n\varphi\right)\frac{\partial x}{\partial\eta} - \xi\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}\right].$$

Da nun $(g\beta - h\alpha) = 1$,

$$\frac{\partial x}{\partial\xi} = -(g+\alpha\eta)\frac{1}{\xi^2},\quad \frac{\partial x}{\partial\eta} = \frac{\alpha}{\xi},\quad \frac{\partial(xy)}{\partial(\xi\eta)} = -\frac{1}{\xi^3}$$
$$\frac{\partial y}{\partial\xi} = -(h+\beta\eta)\frac{1}{\xi^2},\quad \frac{\partial y}{\partial\eta} = \frac{\beta}{\xi}$$

ist, so erhalten wir aus (13):

$$f(xy)_2 = \frac{1}{\xi^{n-1}}\left[\alpha\xi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} - n\alpha\varphi + (g+\alpha\eta)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right].$$

Die derivierte Gleichung $f(xy)_2 = 0$ wird hiemit durch die Gleichung

$$(A')\qquad \Psi(\xi\eta)_2 = \alpha\xi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} - n\alpha\varphi + (g+\alpha\eta)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0$$

vertreten. Analog erhalten wir $f(xy)_1 = \frac{\Psi(\xi\eta)_1}{\xi^{n-1}}$, wo

$$(A_1')\qquad \Psi(\xi\eta)_1 = -\beta\xi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \beta n\varphi - (h+\beta\eta)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}$$

ist. Die Gleichungen $\Psi_1 = 0$, $\Psi_2 = 0$ sind von den Ordnungen $\geqq(\mu-1)$ und haben dieselbe Form wie die erste transformierte Gleichung von $f(\xi_0\eta_0)_2 = 0$ in (A), vor. Artikel.

Daraus folgt, daß — wenn sich die Gleichung $\varphi(\xi\eta) = 0$ mittels der Transformationen $S_1, S_2, \ldots$ in die sukzessiven Gleichungen von den Ordnungen

$$\mu_1, \mu_2, \ldots$$

transformieren läßt — die transformierten Gleichungen von $\Psi(\xi\eta)_1 = 0$, $\Psi(\xi\eta)_2 = 0$ von den sukzessiven Ordnungen

$$\geqq\mu_1 - 1,\ \geqq\mu_2 - 1, \ldots$$

sein werden.

Wir können somit den Satz I mit folgendem Zusatz ergänzen:

II. Die Derivierten $f(xy)_1$, $f(xy)_2$ haben auch in jedem, im Unendlichen liegenden Punkte M_δ den Charakter einer adjungierten Funktion.

Digitized by Google

Aus diesem folgt, daß die Gleichungen $f(xy)_1 = 0$, $f(xy)_2 = 0$ gewisse spezielle adjungierte Kurven $(n-1)^{ten}$ Grades von folgenden Eigenschaften definieren:

Es seien X_i, $(i = 1, 2, \ldots)$ resp. Y_j, $(j = 1, 2, \ldots)$ diejenigen nichtvielfachen Punkte der Grundkurve $f(xy) = 0$, in welchen zu einem Werte y resp. x mehrere untereinander gleiche Abszissen x resp. Ordinaten y gehören. Sämtliche Durchschnittspunkte der Kurve $f(x\eta)_1 = 0$ mit $f(xy) = 0$ fallen ausschließlich in die Punkte M_δ, X_i hinein.

Im gleichen schneidet $f(xy)_2 = 0$ die Kurve $f(xy) = 0$ nur in den Punkten M_δ, Y_j. Werden nun in beiden Fällen von den sämtlichen Durchschnittspunkten die $2d$ Durchschnittspunkte, welche sicher in allen M_δ liegen, weil $f(xy)_1 = 0$, $f(xy)_2 = 0$ adjungierte Kurven sind, entfernt, so muß die Anzahl aller übrigen Durchschnittspunkte, welche teilweise noch in allen M_δ liegen und somit in X_i resp. Y_j hineinfallen,

$$z + p = 2(n-1) + 2p$$

betragen (Kap. III, Art. 23). Aus dieser Eigenschaft der derivierten Kurve $f(xy)_2 = 0$ haben wir bereits im Art. 36 (Kap. IV) Gebrauch gemacht.

Art. 39. Wir wollen jetzt den Zusammenhang der Funktionenpaare der Punkte M_δ, Y_j resp. M_δ, X_i mit der Gruppierung der $(z+p)$ Nullpunkte der Derivierten $f(xy)_2$ resp. $f(xy)_1$ näher untersuchen, indem wir zuvörderst voraussetzen, daß alle Punkte M_δ, X_i, Y_j im Endlichen liegen.

Aus der Gleichung $f(xy)_1\,dx + f(xy)_2\,dy = 0$ ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{f(xy)_1}{f(xy)_2}.$$

Der Differentialquotient y' ist somit eine rationale Funktion des Paares (xy) und besitzt ihre Null- und Unendlichkeitsstellen ausschließlich in den Punkten M_δ, X_i, Y_j.

Es sei

$$x_t = a + t^{s_1} \cdot \mathfrak{P}_1(t),\quad y_t = b + t^{k_1}\mathfrak{P}_2(t) \tag{14}$$

ein Funktionenpaar, welches entweder ein X_i, $[k_1 > 1, s_1 = 1]$ oder ein Y_j, $[s_1 > 1, k_1 = 1]$ umgibt oder aus r, $(\geqq 1)$ Funktionenpaaren eines Punktes M_δ entnommen wurde. In der Umgebung dieses Punktes (ab) erhalten wir

$$y' = \frac{A \cdot t^{k_1 - 1} + A' t^{k_1} + \cdots}{B\, t^{s_1 - 1} + B' t^{s_1} + \cdots} \tag{15}$$

und wir ersehen, daß — je nachdem $k_1 \gtrless s_1$ ist — (ab) als Mittelpunkt des Elementes (14) betrachtet, zum Null- oder Unendlich-

Digitized by Google

keitspunkte von y' — jedesmal von der Ordnung $|s_1 - k_1|$ — wird. Ist $s_1 = k_1$, so wird y' in diesem Punkte endlich und $\neq 0$.

Werden nun analoge Formen wie (15) in bezug auf sämtliche Funktionenpaare, welche alle X_i, Y_j, M_δ umgeben, in Rücksicht genommen und wird die Summe $\Sigma(s_1 - k_1)$ bezogen auf alle diese Funktionenpaare gebildet, so muß sie — da y' in x, y rational ist — gleich Null sein. Wir setzen also $\Sigma(s_1 - k_1) = 0$, woraus sich

$$\Sigma(s_1 - 1) = \Sigma(k_1 - 1)$$

ergibt.

Nun gibt die Form (15) nicht bloß die Ordnungen der Null- resp. Unendlichkeitsstelle von y' an, denn sie besagt noch, daß diese Ordnung dadurch entsteht, daß im Zähler $(k_1 - 1)$ Nullpunkte und im Nenner $(s_1 - 1)$ Nullpunkte in $(a\,b)$ hineinfallen sollen.

Wie diese Eigenschaft auch dem Quotienten $-\frac{f(xy)_1}{f(xy)_2}$ zuerkannt werden soll, wird auf folgende Weise gezeigt:

Betrachten wir die Funktion

$$\omega(xy) = M(xy) \cdot \prod \frac{y-b}{x-a} = \frac{F_1(xy)}{F_2(xy)},$$

in welcher sich das Produkt auf alle Suffixe $(a\,b)$ der Punkte M_δ, X_i, Y_j, bezieht und $M(xy)$ eine beliebige rationale oder transzendente, im Gebilde $f(xy) = 0$ eindeutige Funktion ist und die Eigenschaft besitzt, daß sie in allen $(a\,b)$ endlich und von Null verschieden ist.

Nach Kap. IV können wir das Produkt $\prod \frac{y-b}{x-a}$ als Quotient zweier adjungierter Funktionen eines genügend großen Grades darstellen. Sind G_1, G_2 die Adjungierten dieses Grades mit noch unbestimmten Koeffizienten, so wird:

$$G_1(x_t y_t) = P.t^{l_1} + \cdots$$

$$G_2(x_t y_t) = Q\,t^{l_1} + \cdots,$$

wo l_1 als „Adjunktionsexponent“ in bezug auf das Funktionenpaar (14) bezeichnet werden kann.

Ist nun für dieses Element

$$M(x_t y_t) = \frac{m_0 t^m + \cdots}{n_0 t^m + \cdots}$$

und beachtet man, daß das erwähnte Produkt in $(a\,b)$ die k_1-fache Nullstelle und die s_1-fache Unendlichkeitsstelle besitzt und daß diese

Digitized by Google

Punkte als die außerhalb M_δ, X_i, Y_j liegenden Nullpunkte der adjungierten G_1, G_2 zu betrachten sind, so wird:

$$(f) \qquad \omega(x_t y_t) = \frac{F_1'(x_t y_t)}{F_2'(x_t y_t)} = \frac{t^{l_1}[R t^{m+k_1} + \dots]}{t^{l_1}[S t^{m+a_1} + \dots]}.$$

Nun setzen wir:

$$y_t - b = \frac{dy_t}{dt}[d_0 t + d_1 t^2 + \cdots] = \frac{dy_t}{dt} \cdot \mathfrak{P}_2(t)$$

$$x_t - a = \frac{dx_t}{dt}[c_0 t + c_1 t^2 + \cdots] = \frac{dy_t}{dt} \cdot \mathfrak{P}_1(t)$$

$$(d_0 \neq 0, \quad c_0 \neq 0),$$

so wird:

$$\omega(x_t y_t) = \frac{dy_t}{dx_t} \cdot \frac{\mathfrak{P}_2(t)}{\mathfrak{P}_1(t)} \cdot M(x_t y_t) \cdot \prod' \frac{y_t - b}{x_t - a},$$

wo der Strich bezeichnen soll, daß im Produkte der Faktor $\frac{y_\cdot - b}{x_t - a}$ ausgelassen wurde.

Setzen wir weiter:

$$M(x_t y_t) \cdot \prod' \frac{y_t - b}{x_t - a} = \frac{t^m \mathfrak{P}_1'(t)}{t^m \mathfrak{P}_2'(t)},$$

so wird:

$$\frac{F_1'(x_t y_t)}{F_2'(x_t y_t)} = \frac{dy_t}{dx_t} \cdot \frac{\mathfrak{P}_2(t)}{\mathfrak{P}_1(t)} \cdot \frac{t^m \mathfrak{P}_1'(t)}{t^m \mathfrak{P}_2'(t)}.$$

Läßt man rechts $\frac{dy_t}{dx_t}$ mit dem Koeffizienten 1 stehen, so erniedrigt sich die Anzahl der Nullstellen und die Anzahl der Unendlichkeitsstellen des rechten Gliedes um $(m+1)$ Einheiten. Soll nun diese Verminderung auch auf der linken Seite gleichzeitig auftreten, so schreiben wir:

$$(h) \qquad \frac{F_1'(x_t y_t)}{\mathfrak{P}_2(t) \cdot t^m \mathfrak{P}_1'(t)} : \frac{F_2'(x_t y_t)}{\mathfrak{P}_1(t) \cdot t^m \mathfrak{P}_2'(t)} = \frac{dy_t}{dx_t}.$$

Nehmen wir nun an, daß wir eine andere Funktion $\overline{\omega}(x y) = \frac{\overline{F}_1(x y)}{\overline{F}_2(x y)}$ von der Eigenschaft haben, daß für sie die analoge Gleichheit

$$\frac{\overline{F}_1'(x_t y_t)}{\mathfrak{P}_2(t) \cdot t^m \mathfrak{P}_1'(t)} : \frac{\overline{F}_2'(x_t y_t)}{\mathfrak{P}_1(t) \cdot t^m \mathfrak{P}_2'(t)} = \frac{dy_t}{dx_t}$$

Digitized by Google

besteht. Aus diesen zwei letzten Beziehnungen ergibt sich

$$(g) \qquad \overline{\omega}(x_t y_t) = \overline{M}(x_t y_t) \cdot \omega(x_t y_t),$$

wo $\overline{M}(a\,b)$ endlich und von Null verschieden ist.

Nun haben wir rechts in (h): $(k_1 - 1)$ Nullstellen und $(s_1 - 1)$ Unendlichkeitsstellen, und da wir diese Gleichheit — ohne irgend welche Vereinfachungen unterwegs zu vollziehen — abgeleitet haben, so können wir — die Gleichungen (f) und (g) in Rücksicht nehmend — folgenden Satz aussprechen:

Kann man einer Funktion in den Umgebungen der Punkte $(a\,b)$ die Formeln von der Gestalt (h) zuordnen, welche $\frac{dy_t}{dx_t}$ definieren, so läßt sich jede dieser Formeln als Quotient zweier Potenzreihen mit dem Anfangsexponenten $l_1 + (k_1 - 1)$ im Zähler und $l_1 + (s_1 - 1)$ im Nenner darstellen. Die letzteren besagen, daß dieser Quotient genau $(k_1 - 1)$ Punkte $(a\,b)$ als Null- und $(s_1 - 1)$ dieser Punkte als Unendlichkeitsstellen (außerhalb der Adjunktionsvielfachheiten l_1) aus dem eingesetzten Elemente einnimmt.

Nun betrachten wir die Funktion $-\frac{f_1(xy)}{f_2(xy)}$ und setzen, wenn $(x_t y_t)$ jetzt das Funktionenpaar bedeutet, welches eine beliebige Stelle (xy) des algebraischen Gebildes umgibt:

$$\frac{y_t - y}{\frac{dy_t}{dt}} = \mathfrak{P}_y(t), \qquad \frac{x_t - x}{\frac{dx_t}{dt}} = \mathfrak{P}_x(t).$$

Schreiben wir $-\frac{f_1}{f_2}$ in der Form

$$\frac{-f_1 \cdot \mathfrak{P}_x(t) \cdot \mathfrak{P}_y(t)}{f_2 \cdot \mathfrak{P}_y(t) \cdot \mathfrak{P}_x(t)} = \frac{F_1(x_t y_t)}{F_2(x_t y_t)},$$

so haben wir:

$$(h') \qquad \frac{\frac{F_1(x_t y_t)}{\mathfrak{P}_y(t) \cdot \mathfrak{P}_x(t)}}{\frac{F_2(x_t y_t)}{\mathfrak{P}_x(t) \cdot \mathfrak{P}_y(t)}} = \frac{dy_t}{dx_t}$$

in der Umgebung jedes Punktes (xy) des Gebildes. In der Umgebung jedes der Punkte $(a\,b)$, welche in M_δ, X_i, Y_j hineinfallen, ist (h') — wenn $\mathfrak{P}_x(t)_{x=a}$ in der Bedeutung $t^m \cdot \mathfrak{P}_1'(t)$ und $\mathfrak{P}_y(t)_{y=b}$ in der Bedeutung $t^m \cdot \mathfrak{P}_2'(t)$ genommen wird — die Formel (h)

Digitized by Google

und deswegen werden ihr Zähler und Nenner mit den Exponenten $l_1 + (k_1 - 1)$, $l_1 + (s_1 - 1)$ beginnen. Da nun:

$$\frac{F_1}{\mathfrak{P}_y(t)\,\mathfrak{P}_x(t)} = -f_1, \quad \frac{F_2}{\mathfrak{P}_x(t)\,.\,\mathfrak{P}_y(t)} = f_2$$

ist, so haben wir in der Umgebung von $(a\,b)$:

$$f_1(x_t y_t) = t^{l_1}[A\,.\,t^{k_1-1} + \cdots]$$

$$f_2(x_t y_t) = t^{l_1}[B\,.\,t^{s_1-1} + \cdots].$$

Unsere Behauptung ist hiemit bewiesen. Wir haben zugleich einen neuen Beweis für die Adjunktion der Derivierten erbracht. Sie sind spezielle Adjungierte $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von der Eigenschaft, daß sich zu ihren $2d$ Nullpunkten in M_b, X_i, Y_j noch resp. $(k_1 - 1)$, $(s_1 - 1)$ Nullpunkte, welche aus einem Element (14) herrühren, anschließen.

Wir wollen uns jetzt über die Adjunktionsbedingungen dieser Derivierten näher orientieren.

Ist $G(x\,y)$ eine allgemeine adjungierte Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades und ersetzt man in ihr (x, y) durch das Funktionenpaar (14), welches aus einem M_b stammt, so möge sich ergeben

$$G(x_t y_t) = t^{l_1}\,.\,[C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots]. \tag{16}$$

Der Adjunktionsexponent l_1 gibt an, wieviel von ihren $2d$ Durchschnittspunkten (Kap. III, Art. 21) in den Mittelpunkt $(a\,b)$ des betrachteten Elements (14) hineinfallen. In den Punkten X_i, Y_j ist stets $l_1 = 0$.

Nun schreiben wir die Gleichung (16) noch einmal in etwas abgeänderter Form:

$$G'(x_t y_t) = t^{l_1}[C_0' + C_1' t + C_2' t^2 + \cdots] \tag{17}$$

auf, wodurch wir andeuten wollen, daß die Entwicklungen (16), (17) gewissen, von einander verschiedenen Bedingungen unterworfen werden. Dann kann der Quotient

$$\frac{C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots}{C_0' + C_1' t + C_2' t^2 + \cdots} = \frac{G(x_t y_t)}{G'(x_t y_t)}$$

— wenn wir jetzt unter $(x_t y_t)$, ein beliebiges aus irgend einem M_b, X_i oder Y_j entnommenes Funktionenpaar verstehen und beachten, daß $f(x\,y)_1$, $f(x\,y)_2$ spezielle adjungierte Funktionen sind — jedesmal nach Erfüllung gewisser Bedingungen mit $\frac{f(x_t y_t)_1}{f(x_t y_t)_2}$ identisch gemacht werden.

Digitized by Google

Diese Bedingungen — indem $-\frac{f(xy)_1}{f(xy)_2} = y'$ ist und y' im Zähler $(k_1 - 1)$ und im Nenner $(s_1 - 1)$ Nullstellen besitzen soll — sind hier folgende:

$$C_0 = 0,\ C_1 = 0, \ldots,\ C_{k_1-2} = 0$$
$$C'_0 = 0,\ C'_1 = 0, \ldots,\ C_{s_1-2} = 0.$$

(Der Exponent $s_1 = 1$ resp. $k_1 = 1$ ergibt keine Bedingung.)

Die Gesamtanzahl der auf diese Weise in allen M_δ, X_i, Y_j aufgestellten Bedingungen wird für den Zähler $\Sigma(k_1 - 1)$ und für den Nenner $\Sigma(s_1 - 1)$ betragen, wo [wie es sich bereits ergeben hat] $\Sigma(s_1 - 1) = \Sigma(k_1 - 1)$ ist.

Nun verursacht je eine Bedingung des Zählers je eine neue seiner Nullstellen, und da er durch $\Sigma(k_1 - 1)$ Bedingungen bestimmt wird, so besitzt er im ganzen $\Sigma(k_1 - 1)$ Nullstellen. Ebenso viel beträgt die Anzahl der Nullstellen des Nenners.

Daraus — mit Rücksicht darauf, daß $f(xy)_1$, $f(xy)_2$ adjungierte Funktionen sind — ergeben sich folgende Relationen

$$\Sigma(s_1 - 1) = \Sigma(k_1 - 1) = z + p, \quad \text{(Kap. III, Art. 23)},$$
$$[z = p + 2(n - 1)].$$

Aus diesen wird ersichtlich, daß unter den $\Sigma(k_1 - 1)$ Bedingungen des Zählers resp. des Nenners p dieser Bedingungen als Folgen der z übrigen dieser Bedingungen betrachtet werden müssen.

Setzt man $\Sigma(s_1 - 1) = \Sigma(k_1 - 1) = s$ und berücksichtigt, daß $z + p = 2p + 2(n - 1)$ ist, so haben wir

$$(A) \qquad \begin{cases} p = \frac{s}{2} - (n - 1) \\ z = \frac{s}{2} + (n - 1). \end{cases}$$

Wir werden im folgenden die s Nullpunkte der Derivierten $f(xy)_1$, $f(xy)_2$ — ungeachtet dessen, daß sie teilweise auch in die Punkte M_δ hineinfallen — als Nullpunkte, welche außerhalb aller M_δ liegen, bezeichnen.

Die Summe aller $(k_1 - 1)$ resp. $(s_1 - 1)$, welche zu allen Funktionenpaaren eines Punktes $M_\delta = (ab)$ gehören, gibt die Gesamtordnung der Nullstelle (ab) der Derivierten $f(xy)_1$ resp. $f(xy)_2$ an. Diese Gesamtordnungen bezeichnen wir hier und im folgenden mit $\varkappa_\delta = \Sigma(k_1 - 1)_\delta$, $\sigma_\delta = \Sigma(s_1 - 1)_\delta$.

In einem X_i resp. Y_j — wenn jetzt die Exponenten des bezüglichen Funktionenpaares mit $k_i > 1$, $s_i = 1$ resp. $s_j > 1$, $k_j = 1$ bezeichnet werden — tritt die Nullstelle der Derivierten $f(xy)_1$

Digitized by Google

mit der Ordnung $(k_i - 1)$ und die der Derivierten $f(xy)_2$ mit der Ordnung $(s_j - 1)$ auf.

Der Quotient $\frac{f(xy)_1}{f(xy)_2}$ wird in einem M_δ Null oder unendlich, und zwar von der Ordnung $|\varkappa_\delta - \sigma_\delta|$, je nachdem $\varkappa_\delta \gtrless \sigma_\delta$ ist. Ist $\varkappa_\delta = \sigma_\delta$, so bleibt er in diesem M_δ endlich und von Null verschieden, obwohl er in einzelnen Elementen $(x_t y_t), \ldots$ dieses Punktes Null oder unendlich werden kann.

Mit diesen Auseinandersetzungen ist die Gruppierung der $(z + p)$ außerhalb aller M_δ liegenden Nullpunkte der beiden Derivierten vollkommen aufgeklärt.

Art. 40. Die bereits erhaltenen Resultate ergeben eine neue Methode, welche bei Bekanntschaft aller Funktionenpaare $(x_{t_1} y_{t_1}), \ldots$ der Punkte M_δ zur Bildung der adjungierten Funktionen beliebigen Grades angewendet werden kann.

Indem wir die Voraussetzung, daß alle Punkte M_δ, X_i, Y_j im Endlichen liegen, festhalten, bilden wir die Entwicklungen

$$f(x_{t_1}, y_{t_1})_1 = t^{r_1}[B_0 + B_1 t + \cdots]$$
$$f(x_{t_1}, y_{t_1})_2 = t^{\varrho_1}[B_0' + B_1' t + \cdots]$$
$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Dann ist

$$\left.\begin{aligned} r_1 - (k_1 - 1) &= l_1 \\ \varrho_1 - (s_1 - 1) &= l_1 \end{aligned}\right\} \text{ u. s. w.,}$$

wo $l_1, \ldots$ — wie früher — die Exponenten der Anfangsglieder der Entwicklungen einer adjungierten Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades sind.

Aus diesem — wenn wir beachten, daß die Bedingungen, welche eine Adjungierte eines beliebigen Grades charakterisieren sollen, stets dieselben sein müssen (Kap. III, Art. 21) — folgt, daß zur Bildung einer Adjungierten folgender Weg eingeschlagen werden kann:

III. Liegt eine allgemeine Funktion $G(xy)$, q^{ten} Grades, vor und werden in ihre Entwicklungen

$$G(x_{t_1}, y_{t_1}) = D_0 + D_1 t + D_2 t^2 + \cdots$$
$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

die Bedingungen

$$D_0 = 0,\ D_1 = 0,\ D_2 = 0, \ldots\ D_{l_1 - 1} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

eingeführt, so wird $G(xy)$ zu einer adjungierten Funktion q^{ten} Grades.

Digitized by Google

Diese Bedingungen sind in der Anzahl $\Sigma l_i = 2d$; von ihnen brauchen jedoch nur d Bedingungen (l. c.) in Rücksicht genommen werden, da die übrigen sich als Folgen der ersteren herausstellen werden.

Art. 41. Wir werden jetzt zeigen, daß sich die Adjunktionsexponenten $l_1, \ldots$ als Funktionen der $s_1, k_1, \ldots$ darstellen lassen. Dadurch wird auch ermöglicht, die Anzahl d [aller in $f(xy) = 0$ enthaltenen Doppelpunkte], welche früher (Kap. II), der Summe $\Sigma\Sigma\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ gleich war, in der Funktion aller $s_1, k_1, \ldots$ anzugeben.

Um dies durchzuführen, wollen wir von nun an mit

$$(s_1, k_1),\ (s_2\ k_2), \ldots, (s_r\ k_r), \quad r \geqq 1$$

die Exponenten aller derjenigen Funktionenpaare $(x_{t_1}\ y_{t_1}), (x_{t_2}\ y_{t_2}), \ldots$ $\ldots, (x_{t_r}, y_{t_r})$, welche einen der Punkte $M_\delta = (a\,b)$ umgeben, bezeichnen.

Setzen wir $x - a = \xi$, $y - b = \eta$ und $f(xy) = \varphi(\xi\eta)$, so hat die Gleichung $\varphi(\xi\eta) = 0$ $s_1 + s_2 + \cdots + s_r$ Wurzeln $\eta =$

$$\begin{array}{c} \eta_1', \ \eta_{l_2}', \ldots, \eta_{l_{s_1}}' \\ \eta_1'', \ \eta_{l_2}'', \ldots, \eta_{l_{s_2}}'' \\ \vdots \quad\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ \eta_1^{(r)}, \eta_{l_2}^{(r)}, \ldots, \eta_{l_{s_r}}^{(r)}, \end{array}$$

welche sich für $\xi = 0$ annullieren. Sie entstammen sukzessive aus dem 1^{ten}, $2^{\text{ten}}, \ldots r^{\text{ten}}$ der betrachteten Funktionenpaare und können zweckmäßig und der Kürze halber mit den Anfangsgliedern ihrer Entwicklungen nach (gebrochenen) Potenzen von ξ auf folgende Weise:

$$\xi^{\frac{k_1}{s_1}},\ \varepsilon_1 \xi^{\frac{k_1}{s_1}},\ \varepsilon_1^2 \xi^{\frac{k_1}{s_1}}, \ldots, \varepsilon_1^{s_1-1} \xi^{\frac{k_1}{s_1}},\ \varepsilon_1 = e^{\frac{2\pi i}{s_1}}$$

$$\xi^{\frac{k_2}{s_2}},\ \varepsilon_2 \xi^{\frac{k_2}{s_2}},\ \varepsilon_2^2 \xi^{\frac{k_2}{s_2}}, \ldots, \varepsilon_2^{s_2-1} \xi^{\frac{k_2}{s_2}},\ \varepsilon_2 = e^{\frac{2\pi i}{s_2}}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\xi^{\frac{k_r}{s_r}},\ \varepsilon_r \xi^{\frac{k_r}{s_r}},\ \varepsilon_r^2 \xi^{\frac{k_r}{s_r}}, \ldots, \varepsilon_r^{s_r-1} \xi^{\frac{k_r}{s_r}},\ \varepsilon_r = e^{\frac{2\pi i}{s_r}}$$

dargestellt werden.

Da nun $f(xy) = \varphi(\xi, \eta) =$

$$= (\eta - \eta_1') \cdots (\eta - \eta_{l_{s_1}}') \cdots (\eta - \eta_1^{(r)}) \cdots (\eta - \eta_{l_{s_r}}^{(r)}) \cdots$$

Digitized by Google

ist, so wird, wenn wir $\xi^{\frac{1}{s_1}} = t$ setzen,

$$f(x_{t_1}, y_{t_1})_2 =$$

$$= \begin{cases} \left(t^{k_1} - \varepsilon_1 t^{k_1}\right) \cdot \left(t^{k_1} - \varepsilon_1^2 t^{k_1}\right) \cdots \left(t^{k_1} - \varepsilon_1^{s_1-1} t^{k_1}\right) \\ \left(t^{k_1} - t^{\frac{k_2 s}{s_2}}\right) \cdot \left(t^{k_1} - \varepsilon_2 t^{\frac{k_2 s}{s_2}}\right) \cdot \left(t^{k_1} - \varepsilon_2^2 t^{\frac{k_2 s}{s_2}}\right) \cdots \left(t^{k_1} - \varepsilon_2^{s_2-1} t^{\frac{k_2 s}{s_2}}\right) \\ \left(t^{k_1} - t^{\frac{k_3 s}{s_3}}\right) \cdot \left(t^{k_1} - \varepsilon_2 t^{\frac{k_3 s}{s_3}}\right) \cdot \left(t^{k_1} - \varepsilon_3^2 t^{\frac{k_3 s}{s_3}}\right) \cdots \left(t^{k_1} - \varepsilon_3^{s_3-1} t^{\frac{k_3 s}{s_3}}\right) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \left(t^{k_1} - t^{\frac{k_r s}{s_r}}\right) \cdot \left(t^{k_1} - \varepsilon_r t^{\frac{k_r s}{s_r}}\right) \cdot \left(t^{k_1} - \varepsilon_r^2 t^{\frac{k_r s}{s_r}}\right) \cdots \left(t^{k_1} - \varepsilon_r^{s_r-1} t^{\frac{k_r s}{s_r}}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Die weiteren hier nicht eingeschriebenen Faktoren ergeben das Produkt, welches für $t = 0$ sicher von Null verschieden wird.

Aus dem Produkte der ersten Reihe der $(s_1 - 1)$ Faktoren läßt sich die höchste Potenz $t^{k_1(s_1-1)}$ ausscheiden.

Betrachten wir weiter je zwei Produkte

$$[k_1 s_2, k_2 s_1], [k_1 s_3, k_3 s_1], \ldots, [k_1 s_r, k_r s_1]$$

und bezeichnen das kleinere (nicht größere) von je zwei in einem Paare vorkommenden Produkten mit

$$(12), (13), \ldots, (1r),$$

so ist klar, daß sich aus dem Produkte aller weiteren $(s_2 + s_3 + \cdots + s_r)$ Faktoren die höchste Potenz $t^{(12)+(13)+\cdots+(1r)}$ ausscheiden läßt. Wir haben somit

$$f(x_{t_1}, y_{t_1})_2 = t^{k_1(s_1-1)+(12)+(13)+\cdots+(1r)} \cdot \mathfrak{P}_1(t)$$

$$\mathfrak{P}_1(0) \neq 0.$$

Formen wir nun $k_1(s_1-1) + (12) + \cdots + (1r)$ in

$$[(k_1-1)(s_1-1) + (12) + (13) + \cdots + (1r)] - (s_1-1)$$

um, so ist nach den Erörterungen des vorigen Artikels

$$(k_1-1)(s_1-1) + (12) + (13) + \cdots + (1r) = l_1.$$

Wir finden im gleichen für das g^{te} Funktionenpaar des betrachteten Punktes $M_\delta = (a\,b)$:

$$(k_g-1)(s_g-1) + (g1) + (g2) + \cdots + (gh) + \cdots + (gr) = l_g,$$

wo natürlich $(gh) = (hg)$, $(gg) = (hh) = 0$ ist.

Digitized by Google

Wir können jetzt

$$(B) \qquad 2d = \sum [(k_g - 1)(s_g - 1) + (g\,1) + (g\,2) + \cdots + (g\,r)]$$

setzen, wo sich die Summe auf alle Funktionenpaare sämtlicher in $f(xy) = 0$ enthaltenen M_δ bezieht. Nennt man diese Summe S, so wird

$$(C) \qquad d = \frac{S}{2}$$

und man sieht, daß die in S vorkommende Summe $\sum (k_g - 1)(s_g - 1)$ stets eine gerade Zahl sein muß.

Mit obigen Ausführungen ist die zu Anfang dieses Artikels gestellte Aufgabe vollkommen aufgelöst.

Art. 42. Nun betrachten wir die drei Entwicklungen

$$f(x_t\, y_t)_2 = t^{l_1 + (s_1 - 1)} \cdot \mathfrak{P}_2(t), \quad G_q(x_t\, y_t) = t^{l_1} \cdot \mathfrak{P}_q(t)$$

$$\frac{dx_t}{dt} = t^{s_1 - 1}\, \mathfrak{P}_1(t),$$

von $G_q(xy)$ eine Adjungierte beliebigen Grades q ist und $(x_t\, y_t)$ ein beliebiges, aus einem M_δ oder einem Y_j entnommenes Funktionenpaar sein soll. Dann ist

$$(D) \qquad \frac{G_q(x_t\, y_t)}{f(x_t\, y_t)_2} \cdot \frac{dx_t}{dt} = c_0 + c_1 t + \cdots; \quad c_0 \neq 0$$

und

$$(D') \qquad \frac{G_q(x_t\, y_t)}{f(x_t\, y_t)} = d_0\, t^{-s_1 + 1} + d_1\, t^{-s_1 + 2} + \cdots$$

Die analogen Entwicklungen werden sich in bezug auf alle Funktionenpaare sämtlicher M_δ, Y_j ergeben.

Die Exponenten $l_1, \ldots$ treten auf in den Entwicklungen:

$$(D'') \qquad \frac{\frac{dx_t}{dt}}{f(x_t\, y_t)_2} = e_0\, t^{-l_1} + e_1\, t^{-l_1 + 1} + \cdots$$

Art. 43. Nehmen wir jetzt an, daß unter den Punkten M_δ, X_i, Y_j auch solche vorhanden sind, welche im Unendlichen liegen, und setzen zuvörderst voraus, daß in der Gleichung

$$f(xy) = (xy)_n + (xy)_{n-1} + \cdots = 0$$

die Größen (g, h), $(g'\, h')$, ..., welche $(xy)_n$ annullieren, alle von Null verschieden sind. [In $(xy)_n$ kommt sowohl das Glied Ax^n wie auch das Glied By^n vor.] In diesem Falle sind die Anfangsexponenten

Digitized by Google

in x_t, y_t je eines jeden Funktionenpaares, welches die unendlich ferne Stelle umgibt, sich gleich. Wir haben also

$$x_{t_1} = t^{-s_1} \cdot \mathfrak{P}_1(t), \quad y_{t_1} = t^{-s_1} \mathfrak{P}_1'(t) \quad \text{u. s. w.} \tag{18}$$

Diese Funktionenpaare werden auf folgendem Wege erhalten. Wird durch die Substitution

$$x = (g + \alpha\eta)\frac{1}{\xi}, \quad y = (h + \beta\eta)\frac{1}{\xi} \tag{19}$$

$$f(xy) = \frac{\varphi(\xi\eta)}{\xi^n}$$

und ergibt $\varphi(\xi\eta) = 0$ in der Umgebung der Stelle $(\xi\eta) = 0$ das Funktionenpaar

$$\xi_{t_1} = t^{s_1} \overline{\mathfrak{P}}_1(t), \quad \eta_{t_1} = t^{k_1} \overline{\mathfrak{P}}_1'(t) \text{ u. s. w.,} \tag{20}$$

so erhalten wir durch Einsetzen von $\xi_{t_1}, \eta_{t_1}, \ldots$ in (19) die Funktionenpaare (18).

Nun hatten wir im Art. 38

$$f(xy)_1 = \frac{\Psi(\xi\eta)_1}{\xi^{n-1}}, \quad f(xy)_2 = \frac{\Psi(\xi\eta)_2}{\xi^{n-1}}$$

und es ist

$$\begin{aligned} \Psi(\xi_{t_1}, \eta_{t_1})_1 &= t^{l_1 + s_1 - 1}[k_0 + k_1 t + \cdots] \\ \Psi(\xi_{t_1}, \eta_{t_1})_2 &= t^{l_1 + s_1 - 1}[k_0' + k_1' t + \cdots] \end{aligned} \quad \text{u. s. w.,}$$

vorausgesetzt, daß

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} &= \alpha \cdot t^{l_1 + s_1 - 1} + \cdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= b \cdot t^{l_1 + k_1 - 1} + \cdots \end{aligned} \quad \text{u. s. w.}$$

sind und die Exponenten $l_1, l_2, \ldots$ in derselben Bedeutung wie im Art. 39 auftreten.

Da nun $\Psi(\xi\eta)_1$, $\Psi(\xi\eta)_2$ ihrer Form nach adjungierte Funktionen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades für das Gebilde $\varphi(\xi\eta) = 0$ sind, so werden die Bedingungen, durch welche eine adjungierte Funktion $G(xy)$, $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades — nach Einsetzen der Funktionenpaare — vom Charakter der Derivierten $f(xy)_1$ resp. $f(xy)_2$ wird, folgende sein:

Ist nach Anwendung der Transformation (19)

$$G(xy) = \frac{\overline{G}(\xi\eta)}{\xi^{n-1}} \quad \text{und}$$

Digitized by Google

$$\overline{G}(\xi_{t_1}\eta_{t_1}) = t^{l_1}[D_0 + D_1 t + \cdots], \cdots$$

so sind

$$D_0 = 0,\ D_1 = 0, \ldots\ D_{s_1-2} = 0; \ldots$$

die gesuchten Bedingungen. Sie sind in der Anzahl $\Sigma'(s_1 - 1)$ — wo sich die Summe auf alle Funktionenpaare (20) bezieht — sowohl für $f(xy)_1$ wie auch für $f(xy)_2$ und vernichten $\Sigma'(s_1 - 1)$ Unendlichkeitsstellen der Funktion $G(xy)$. Darum müssen die durch diese Bedingungen eingeführten $\Sigma'(s_1 - 1)$ Nullstellen als Nullpunkte der Derivierten selbst betrachtet werden.

Demgemäß können wir folglich

$$\Sigma(s_1 - 1) = \Sigma(k_1 - 1) = z + p$$

setzen, wo sich jetzt die Summen auf alle Funktionenpaare sämtlicher Punkte M_δ, X_i, Y_j ohne Unterschied, ob sie im Endlichen oder im Unendlichen liegen, beziehen und wo für alle unendlich fernen Elemente stets $s_1 = k_1, \ldots$ ist.

Werden die Summen mit s bezeichnet, so haben wir — wie früher —

$$(A_1) \qquad z = \frac{s}{2} + (n-1), \qquad p = \frac{s}{2} - (n-1).$$

Art. 44. Wir teilen jetzt die Summe s in zwei Summanden. Von diesen soll sich der erste s' auf alle M_δ, X_i, Y_j, welche im Endlichen, der zweite s'' auf alle M_δ, X_i, Y_j, welche im Unendlichen liegen, beziehen.

Die Veränderlichen x, y unterziehen wir einer linearen homogenen Transformation und es soll dadurch $f(xy)$ in $F(x'y')$ übergehen.

Kommt nun in $F(x'y')$ die homogene Funktion $(x'y')_u$ von solcher Beschaffenheitvor, daß die Größen $(\overline{g}, \overline{h})$, $(\overline{g'}, \overline{h'})$, ..., welche sie annullieren sollen, wieder alle von Null verschieden sind, so beginnen die aus (18) hervorgehenden Funktionenpaare $(x'_{t_1}, y'_{t_1}), \ldots$ mit unveränderten Exponenten $-s_1, -s_2, \ldots$ Daraus folgt, daß die Summen s', s'' ihre Werte nicht verändert haben.

Wird hingegen die lineare, homogene Transformation von einer der Formen

$$a)\ x' = gy - hx, \quad y' = y$$
$$b)\ x' = x, \quad y' = gy - hx$$
$$c)\ x' = gy - hx, \quad y' = g'y - h'x$$

Digitized by Google

sein, so werden im Unendlichen außer der Funktionenpaare, welche noch immer die früheren Exponenten beibehalten, auch Funktionenpaare von folgenden Entwicklungen:

$$a') \quad x' = \frac{\eta}{\xi} = c_0 t^{k_1 - s_1} + \cdots, \qquad y' = (h + \beta\eta)\frac{1}{\xi} = c_0' t^{-s_1} + \cdots$$

$$b') \quad x' = (g + \alpha\eta)\frac{1}{\xi} = c_0 t^{-s_1} + \cdots, \quad y' = \frac{\eta}{\xi} = c_0' t^{k_1 - s_1} + \cdots$$

$$c') \begin{cases} x' = \dfrac{\eta}{\xi} = c_0 t^{k_1 - s_1} + \cdots, & y' = (\bar{h} + \bar{\beta}\eta)\dfrac{1}{\xi} = c_0' t^{-s_1} + \cdots \\ x' = (\bar{g} + \bar{\alpha}\eta)\dfrac{1}{\xi} = c_0 t^{-s_1} + \cdots, & y' = \dfrac{\eta}{\xi} = c_0' t^{k_1 - s_1} + \cdots \end{cases}$$

vorkommen.

Wir finden jetzt in $(x'y')_n$ außer den linearen Faktoren $(d_0 x' + d_1 y')$, $d_0 \neq 0, d_1 \neq 0$

im Falle a') den Faktor x'^{r_1}
„ „ b') „ „ y'^{r_2}
„ „ c') „ „ $x'^{r_1} y'^{r_2}$.

Da nun die Relationen a'), b'), c'), welche x', y' mit ξ, η verbinden, vom allgemeinen Typus

$$x' = (g + \alpha\eta)\frac{1}{\xi}, \quad y' = (h + \beta\eta)\frac{1}{\xi},$$

in welchem $g = 0$ oder $h = 0$ sein soll, sind, so können wir die betrachteten drei Fälle mit Zugrundelegung der Gleichung $f(xy) = 0$ untersuchen, und zwar unter der Voraussetzung, daß in $(xy)_n$ 1^0 ein $g = 0$, 2^0 ein $h = 0$ und 3^0 ein $g = 0$ und ein $h' = 0$ vorkommt.

Wir erhalten nämlich mit Rücksicht auf die Gleichheiten

$$f(x_{t_1} y_{t_1})_\nu = \frac{\Psi^r(\xi_{t_1}, \eta_{t_1})_\nu}{\xi_{t_1}^{n-1}}, \quad \nu = 1, 2$$

die Entwicklungen der Derivierten

$$f(x_{t_1} y_{t_1})_2, \; f(x_{t_1} y_{t_1})_1$$

mit folgenden Anfangsexponenten:

Im Falle a)

α) $-s_1(n-1) + l_1 + (s_1 + k_1) - 1, \quad -s_1(n-1) + l_1 + (s_1 - 1);$

im Falle b)

β) $-s_1(n-1) + l_1 + (s_1 - 1), \quad -s_1(n-1) + l_1 + (s_1 + k_1) - 1;$

Digitized by Google

im Falle *c*) werden für einige Funktionenpaare die Exponenten α), für einige andere die Exponenten β) auftreten.

Kommen nun im Falle *a*) oder *c*) im Unendlichen μ Funktionenpaare mit den Anfangsexponenten

$$[k_1 - s_1, -s_1],\ [k_2 - s_2, -s_2],\ \ldots,\ [k_\mu - s_\mu, -s_\mu]$$

vor, so müssen wir annehmen, daß $\sigma_\mu = \sum_1^\mu (s_\lambda + k_\lambda) - \mu$ Punkte, welche im Unendlichen liegen, zu den $(z+p)$ Nullpunkten der Derivierten $f(xy)_2$ gehören.

Finden sich unter den betrachteten Funktionenpaaren [im Falle *b*), *c*)] ν Funktionenpaare mit den Anfangsexponenten

$$[-s_1, k'_1 - s_1],\ [-s_2, k'_2 - s_2],\ \ldots,\ [-s_\nu, k'_\nu - s_\nu],$$

so liegen von den $(z+p)$ Nullpunkten der Derivierten $f(xy)_1$, $\sigma'_\nu = \sum_1^\nu (s_\lambda + k_\lambda) - \nu$ dieser Punkte im Unendlichen. Schreiben wir nun

$$\sigma_\mu = \sum_1^\mu (s_\lambda - 1) + \sum_1^\mu k_\lambda,\ \sigma'_\nu = \sum_1^\nu (s_\lambda - 1) + \sum_1^\nu k'_\lambda$$

und beachten, daß wir früher (bei allen anderen Transformationen)

$$s = \Sigma (s_1 - 1) = \Sigma (k_1 - 1)$$

hatten, so kommen wir zum Schlusse, daß sich s' nach Anwendung einer der drei Transformationen *a*), *b*), *c*) um $\sum_1^\mu k_\lambda$ resp. $\sum_1^\nu k'_\lambda$ verkleinert und daß sich s'' um ebenso viel vergrößert. Die Summe $s = s' + s''$ bleibt hiemit bei allen Transformationen dieselbe und beträgt $(z+p)$.

Art. 45. Wir wollen weiter untersuchen, inwiefern die Formeln (D), (D'), (D'') des Art. 42 für die im Unendlichen liegenden Punkte M_δ, Y_j bestehen bleiben.

Ohne Unterschied, wie die homogene Anfangsfunktion $(xy)_n$ in $f(xy) = 0$ beschaffen ist und folglich ohne Rücksicht auf die Werte

$$[(-s_1, -s_1),\ (k_1 - s_1, -s_1),\ (-s_1, k_1 - s_1)]$$

der Anfangsexponenten des benützten Funktionenpaares $(x_t y_t)$, erhalten wir — unter $G_q(xy)$ eine Adjungierte q^{ten} Grades verstanden — folgende Entwicklungen:

$$(D_1) \qquad \frac{G_q(x_t y_t)}{f(x_t y_t)} \cdot \frac{dx_t}{dt} = A_0 t^{-\nu_1 - (n-1)\cdot - 2s_1} + \ldots.$$

Digitized by Google

Für $q = (n-3), (n-2), (n-1)$ folgt daraus:

$$(d_1) \qquad \frac{G_{n-3}(x_t y_t)}{f(x_t y_t)_2} \frac{dx_t}{dt} = A_0 + A_1 t + \cdots, \quad A_0 \neq 0$$

$$(d_2) \qquad \frac{G_{n-2}(x_t y_t)}{f(x_t y_t)_2} \cdot \frac{dx_t}{dt} = A_0 t^{-s_1} + A_1 t^{-s_1+1} + \cdots$$

$$(d_3) \qquad \frac{G_{n-1}(x_t y_t)}{f(x_t y_t)_2} \cdot \frac{dx_t}{dt} = A_0 t^{-2s_1} + \cdots$$

Die Entwicklung (d_1) ist bekanntlich in der Weierstraßschen Theorie von großer Bedeutung. Der Quotient (d_3) ist dadurch wichtig, daß er in der Form (30), Art. 36, [Kap. IV] der Funktion $H(xy, x'y')\frac{dx'}{dt}$ — dieselbe als Funktion von x', y' betrachtet — vorkommt.

Aus ihm und aus den Entwicklungen (D), Art. 42, für die im Endlichen liegenden Punkte M_δ, Y_j ergibt sich, daß

$$H(xy, x'_t y'_t)\frac{dx'_t}{dt} = \pm t^{-1} + \mathfrak{P}(t)$$

ist, wenn $(x'_t y'_t)$ den Punkt (xy) resp. $(a_0 b_0)$ umgibt und daß diese die einzigen Stellen sind, an denen in dem betrachteten Produkte die negativen Potenzen von t auftreten.

Wir haben weiter

$$(D'_1) \qquad \frac{G_q(x_t y_t)}{f(x_t y_t)_2} = A'_0 t^{-s_1[q-(n-1)]-(s_1-1)} + \cdots,$$

was für $q = n-1$

$$\frac{G_{n-1}(x_t y_t)}{f(x_t y_t)_2} = A'_0 t^{-(s_1-1)} + \cdots$$

ergibt und

$$(D''_1) \qquad \frac{\frac{dx_t}{dt}}{f(x_t y_t)_2} = A'' t^{-s_1[(n-1)-2]-s_1} + \cdots$$

Ist nun in einem M_δ oder X_i

$$f(x_t y_t)_1 = t^{r_1}[B_0 + B_1 t + \cdots]$$

und in einem M_δ oder Y_j

$$f(x_t y_t)_2 = t^{\varrho_1}[B'_0 + B'_1 t + \cdots$$

Digitized by Google

— (M_δ, X_i, Y_j liegen im Unendlichen) —, so ist

$$r_1 = -s_1(n-1) + l_1 + (s_1 - 1) \text{ oder}$$
$$= -s_1(n-1) + l_1 + (s_1 + k_1' - 1)$$
$$\rho_1 = -s_1(n-1) + l_1 + (s_1 - 1) \text{ oder}$$
$$= -s_1(n-1) + l_1 + (s_1 + k_1 - 1).$$

Daraus lassen sich $l_1, \ldots$ berechnen und sind sie bekannt, so gewinnen wir aus den Entwicklungen der allgemeinen Funktion

$$G_q(x_t y_t) = \frac{1}{t^{s_1 q}}[D_0 + D_1 t + \cdots], \cdots$$

die nötigen Bedingungen

$$D_0 = 0,\ D_1 = 0, \ldots,\ D_{l_1 - 1} = 0; \ldots,$$

um $G_q(xy)$ im Unendlichen zu adjungieren.

Dies gibt das Mittel, den Satz III, Art. 40, in der Richtung zu ergänzen, daß durch die Bekanntschaft der Funktionenpaare sämtlicher Punkte M_δ, Y_j (M_δ, X_i) — auch im Falle, wo manche oder alle von ihnen im Unendlichen liegen — die Bildung der Adjungierten beliebigen Grades ermöglicht wird.

Art. 46. Es soll im folgenden stets $z = p + 2(n-1)$ sein und die Anzahl der willkürlichen Nullpunkte einer Adjungierten $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades bezeichnen.

Die Anzahl der willkürlichen Nullpunkte einer Adjungierten $G_q(xy)$ q^{ten} Grades soll mit z_q bezeichnet werden.

Ist nun $q = (n-1) + h$, so ist nach Art. 25 (Kap. III)

$$z_q = z + nh,$$

woraus folgt, daß

$$z_q - (z + p) = nh - p \tag{21}$$

ist.

Nach diesen Bemerkungen wollen wir in der Theorie der adjungierten Funktionen einen Schritt weiter machen und folgende Definition aufstellen.

Erfüllt eine Gleichung $G_q(xy) = 0$ in je einem der Punkte M_δ, Y_j die Bedingungen, durch welche $f(xy)_2$ charakterisiert wird, so wird $G_q(xy)$ „deriviert adjungierte Funktion" genannt und mit $G_q(xy)_y$ bezeichnet.[1])

[1]) Diese Bedingungen werden durch Nullsetzen der Anfangskoeffizienten von $G_q(x_t y_t)$ in den Punkten M_δ, Y_j aufgestellt. Die verschwindenden Koeffizienten sind dieselben wie in $f(x_t y_t)_2$.

Digitized by Google

Dieser Definition entsprechend, muß $G_q(xy)_y$ $2d$ Nullpunkte in allen M_δ besitzen und aus ihren z_q willkürlich in $f(xy)=0$ anzunehmenden Nullpunkten müssen $(z+p)$ dieser Punkte unter die Punkte M_δ, Y_j gruppenweise zerteilt werden, und zwar so, wie sie in $f(xy)_x$ gruppiert sind. Soll dies durchführbar sein, so muß augenscheinlich

$$nh-p\geqq 0 \tag{22}$$

werden, was wir von nun an annehmen wollen. Es bleiben noch $nh-p)$ Nullpunkte, welche in $f(xy)=0$ willkürlich fixiert werden können und welche wir kurz als wesentliche Nullpunkte der $G_q(xy)_y$ bezeichnen.

Wir wollen gleich auf die Anwendung der deriviert adjungierten Funktionen eingehen.

Es ist wichtig — unter ν die Ordnung einer rationalen Funktion $s=R(xy)$ verstanden — die Differenz

$$\nu_{h\nu}=(hn-p)-[(n-1)\nu+(\nu-p)]=n(h-\nu)$$

zu bilden und zu konstatieren, daß sie für $h=\nu,\ \nu+1,\ldots$ nicht negativ wird.

Dies vorausgeschickt, nehmen wir an, daß s die Unendlichkeitsstellen

$$P_1=(a_1\,b_1),\ P_2=(a_2\,b_2),\ \ldots,\ P_\nu=(a_\nu b_\nu)$$

und $(\nu-p)$ Nullstellen

$$Q_1=(a_1\,\beta_1),\ Q_2=(a_2\,\beta_2),\ \ldots,\ Q_{\nu-p}=(a_{\nu-p}\,b_{\nu-p}),$$

welche willkürlich fixiert sind und p abhängige Nullpunkte

$$R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_p$$

besitzt.

Die Gleichung $f(xy)=0$ soll für $x=a_g,\ y=1,2,\ldots,\nu$ außer $y=b_g$ noch folgende $(n-1)$ Wurzeln

$$y=b_{g1},\ b_{g2},\ \ldots,\ b_{g,n-1},\ g=1,2,\ldots\nu$$

ergeben und wir wollen die Gruppen der Punkte

$$(a_g,\ b_{g1}),\ (a_g,\ b_{g2}),\ \ldots,\ (a_g,\ b_{g,n-1})$$

kurz mit B_g, $g=1,2,\ldots\nu$, bezeichnen.

Da nun $\nu>p$ sein soll, so ist auch $\nu n>p$ und wir können $h=\nu$ setzen (woraus $\nu_{h\nu}=0$ folgt) und eine deriviert adjungierte Funktion $[(n-1)+\nu]^{\text{ten}}$ Grades bilden. Sie soll $(n\nu-p)=$ $=\nu(n-1)+(\nu-p)$ wesentliche Nullpunkte besitzen und für diese nehmen wir die Gruppen $B_1, B_2, \ldots, B_\nu$ und $(\nu-p)$ Punkte $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{\nu-p}$. Die so gebildete deriviert adjungierte Funktion bezeichnen wir mit

$$G_{n-1+\nu}(xy,\ B_1\,B_2\ldots B_\nu,\ Q_1\,Q_2\ldots Q_{\nu-p}\mid R_1'\,R_2'\ldots R_p')_y$$

Digitized by Google

oder kurz mit

$$G_{n-1+\nu}(xy)_{\nu}.$$

Der Quotient

$$C\,\frac{G_{n-1+\nu}(xy)_{\nu}}{f(xy)_2\,(x-a_1)\,(x-a_2)\ldots(x-a_\nu)}, \tag{23}$$

dessen Zähler und Nenner von demselben Grade $(n-1+\nu)$ ist, stellt eine Funktion dar, welche im Endlichen ν Unendlichkeitsstellen $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ und ν Nullstellen $Q_1\,Q_2\ldots Q_{\nu-\rho}$, $R_1'R_2'\ldots R_\rho'$ besitzt.

Anderseits ist bekannt, daß sich jede rationale Funktion des Paares (xy) durch Division und Einführung symmetrischer Funktionen in der Form

$$\frac{\gamma_0(xy)\,y^{n-1}+\gamma_1(xy)\,y^{n-2}+\cdots+\gamma_{n-1}(xy)}{f(xy)_2\,.\,g(x)} \tag{24}$$

mit rationalen ganzen Funktionen $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}, g$ darstellen läßt. Ist sie gerade die Funktion s, so muß

$$g(x) = (x-a_1)\,(x-a_2)\ldots(x-a_\nu)$$

und $[\gamma_0(xy)\,y^{n-1}+\cdots+\gamma_{n-1}(xy)$ die deriviert adjungierte Funktion $G_{n-1+\nu}(xy)_y$ sein, denn es muß 1^0 der Zähler in (24) die $(2d+z+p)$ Nullpunkte der im Nenner befindlichen $f(xy)_2$ aufheben und 2^0 existiert nur eine deriviert adjungierte Funktion mit den oben vorgeschriebenen wesentlichen Nullstellen. Wir haben also

$$s = C\cdot\frac{G_{n-1+\nu}(xy)_y}{f(xy)_2\,(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)} \tag{25}$$

mit einer wohl bestimmten Konstanten C und mit $R_1 = R_1', R_2 = R_2', \ldots, R_\rho = R_\rho'$ und können folgenden Satz aussprechen:

Die deriviert adjungierten Funktionen, welche zur Bildung einer beliebigen rationalen Funktion gebraucht werden, sind stets in der Veränderlichen y vom Grade $(n-1)$.

Diese Eigenschaft müssen wir dem Umstande zuschreiben, daß in $G_{n-1+\nu}$ die speziellen Nullpunktgruppen $B_1, B_2, \ldots, B_\rho$ auftreten.

Obwohl die Form (25) in jedem Falle anwendbar ist — [die Punkte $P_1, P_2, \ldots$ können teilweise im Unendlichen liegen oder auch in M_0 und Y hineinfallen] — müssen wir doch, wenn in der

Digitized by Google

Funktion s alle $(z+p)$ Nullstellen von $f(xy)_z$ zu den Unendlichkeitspunkten der Funktion s gehören sollen, die Form

$$\frac{G(xy)}{f(xy)_z(x-a_1)\ldots},$$

in welcher G eine gewöhnlich adjungierte Funktion ist, bevorzugen.

In dieser Form treten $H(x'y')$, $H(xy, x'y')$ — die zweite als Funktion von x', y' verstanden — auf.

Soll s nur einen Teil von $(z+p)$ genannten Punkten zu ihren Unendlichkeitspunkten haben, so hat $G(xy)$ in M_δ, Y_j nur $2d+\zeta$ Nullpunkte, wo $0<\zeta<(z+p)$ ist. Solche adjungierte Funktionen nehmen eine Mittelstellung zwischen den gewöhnlichen und den deriviert adjungierten Funktionen ein und können „semideriviert adjungierte" genannt werden.

Es scheint, daß die deriviert adjungierten Funktionen auch in der Theorie der Funktionen mit nur einer einzigen Unendlichkeitsstelle eine bedeutende Rolle spielen. Darauf wird aber hier nicht eingegangen.

Digitized by Google

Über Teiler von Formen.

Von O. **Dorner** in Königsberg i. Pr.

Der Zweck dieser Arbeit ist, über einige Untersuchungen betreffend die Teilbarkeit der Formen von ν Variablen zu berichten, die in meiner Dissertation[1]) näher ausgeführt sind. Bevor ich jedoch zum eigentlichen Thema übergehe, möchte ich kurz die im Gebiete der Teilbarkeit in Frage kommenden Arbeiten und Methoden besprechen. Dieselben knüpfen im wesentlichen an die Namen: Kronecker, Brill, Gordan, Junker, Fr. Meyer und Hočevar. Aronhold[2]), Brioschi[3]) und Thaer[4]) behandeln nur die kubische Ternärform und die Bedingung ihres Zerfallens in drei lineare Faktoren.

Die Kroneckersche Methode[5]) lehrt, wie man allgemein die Faktoren einer Form ermitteln kann. Man setze $x_1 = t^{q^0} \ldots x_\nu = t^{q^{\nu-1}}$, wo $q > \mu$. (μ = höchster Grad der Form in einer der Variablen.) Die so entstehende Form $F(t)$ wird auf ihre Zerlegbarkeit geprüft und aus ihren Faktoren werden die dazu gehörigen möglichen Teiler von f gefunden; ob sie wirklich Teiler sind, lehrt die Division. Herr Brill[6]) hat sich vornehmlich mit der Frage der Zerlegbarkeit einer Ternärform in lineare Faktoren beschäftigt. Er findet die Bedingungen dafür in der Gestalt:

$$\begin{aligned} 0 &= (s_j f_n)_n \\ 0 &= (s_j f_{n-1})_{n-1} + \cdots + (n)\,(s_{j-1} f_n)_{n-1} \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ 0 &= s_j + s_{j-1} f_1 + s_{j-n} f_n, \end{aligned}$$

---

[1]) Dissertation: Königsberg i. Pr. 1908.

[2]) Aronhold: Journ. f. r. u. a. Math. 55 (1858).

[3]) F. Brioschi: Ann. math. pur. appl. 7 (1875/76).

[4]) Thaer: Math. Ann. 14, 1879.

[5]) L. Kronecker: Grundzüge einer arithmetischen Theorie d. algebraischen Größen. Berlin 1882. Vgl. auch für diese und die folgenden Zitate: Enzyklopädie der math. Wissenschaften, I. Artikel von Netto: Über Reduktibilität, sowohl in deutscher wie in französischer Ausgabe.

[6]) Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung 1896. Math. Ann. 50, 1898. A. Brill: Über die Zerfällbarkeit der Ternärform in lineare Faktoren.

Digitized by Google

wobei die Form ist: $t^n f_0 + t^{n-1} f_1 + \cdots f_n = f(t)$, die s_j die Ausdrücke in den f sind, die die Potenzsummen der Wurzeln von $f(t) = 0$ darstellen und die Klammern den Überschiebungsprozeß andeuten. Diese Formeln für $j = n$ bis $3(n-1)^2$ enthalten das Kriterium für den Zerfall der Form in lineare Faktoren. Durch Hesses Verfahren der Ränderung mittels Linienkoordinaten u, v, w geht die linke Seite der ersten Gleichung für $j = n$ in eine ternäre Form über, die, wie Herr Gordan[1]) gezeigt hat, noch den Faktor $(ux + vy + wz)^2$ besitzt; wird durch ihn gehoben, so stellt das identische Verschwinden der erhaltenen Form die notwendige und hinreichende Bedingung dar für das Zerfallen von f in lineare Faktoren.

Herr Junker[2]) behandelt ebenfalls die Kriterien für den Zerfall einer Form in Linearfaktoren mit Hilfe von symmetrischen Funktionen. Er zeigt, daß zwischen den Elementarfunktionen der symmetrischen Funktionen mehrerer Größenreihen Beziehungen bestehen und stellt für diese Relationen auch die Differentialgleichungen auf. Die Bedingungen dafür, daß die Form gleich sei dem Produkte von ν Linearfaktoren, ist dann dadurch gegeben, daß zwischen entsprechenden Koeffizienten die Relationen erfüllt sind, die für Elementarfunktionen gelten, wobei die Form die Gestalt habe: $a_{\nu,0} x_1^{\nu} + a_{\nu-1,1} x_1^{\nu-1} x_2 + \cdots + 1 = 0$. Die Bestimmung der Faktoren geschieht hier so, daß die Koeffizienten von x_1 aus der Gleichung $\varphi = u^{\nu} - a_1 u^{\nu-1} + \cdots = 0$ und die zugehörigen Koeffizienten der $x_2 \ldots x_n : v, w \ldots$ aus den Gleichungen:

$$v_i = \left(a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{11}} + \cdots\right) : \frac{\partial \varphi}{\partial n} \qquad w_i = \left(a_3 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + \cdots\right) : \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdots$$

berechnet werden. In einer kürzlich erschienenen Arbeit hat er in § 7 die Differentialgleichungen der Zerfallsbedingungen einer ternären Form in invariantentheoretischer Hinsicht betrachtet und gezeigt, daß diese Differentialgleichungen die der Semiinvarianten sind.[3])

Ein anderes Problem hat sich Herr Prof. W. Fr. Meyer[4]) gestellt. Er löst allgemein die Aufgabe nach den Kriterien, denen eine Form genügen muß, wenn sie einen in einer der Unbekannten linearen in den andern rationalen Faktor hat. Es ergibt sich durch sukzessive Vereinfachung des Problems das Resultat: Das Kriterium dafür, daß eine ganze Funktion $F(\lambda^m \ldots \mu_{n-1})$ einen rational be-

---

[1]) P. Gordan: Das Zerfallen der Kurven in gerade Linien, Math. Ann. 45, 1894.

[2]) Junker: Die symmetrischen Funktionen und die Relationen zwischen deren Elementarfunktionen, 1894. Math. Ann. 45, 1894.

[3]) Junker: Die Differentialgleichungen der Invarianten u. Semiinvarianten einer binären (ternären Form). Math. Ann. 64, 1907.

[4]) Fr. Meyer: Zur Theorie der reduziblen ganzen Funktionen von n Variablen. Math. Ann. 30, 1887.

Digitized by Google

kannten Linearfaktor in λ enthält, wird gewonnen, indem F nach rational unabhängigen ganzen Funktionen von λ entwickelt wird:

$$F(\lambda^m, \mu_1 \dots \mu_d) = \sum_{i=0}^{i=d} \mu_i (\mu_1 \dots \mu_{n-1}) f_i^{(m)}(\lambda) \quad (n-1) \leqq d.$$ Dann

müssen sich die μ_i aus je d erzeugenden Funktionen $\varphi_i^k(\mu)$ eines Fundamentalsystems linear und homogen komponieren lassen, so daß

$$\mu_i (\mu_1 \dots \mu_{n-1}) = \sum_{k=1}^{k=d} \varphi_i^{(k)}(\mu)\, \mu_k',$$ wo die $\mu, \mu' \dots$ von den $\mu_1 \dots \mu_{n-1}$ und den Koeffizienten von $f_i(\lambda)$ rational abhängen. Hier ist ein Fundamentalsystem durch die Bedingungen charakterisiert:

$$\varphi_0^{(k)}(\lambda)^{\nu_k} f_0^m(\lambda) + \dots \varphi_d^{(k)}(\lambda)^{\nu_k} f_d^m(\lambda) = 0, \quad \text{wenn} \sum_{i=1}^{d} \nu_i = m \text{ u. } d \text{ gleich}$$

der Anzahl der unabhängigen Funktionen von λ.

Gegenüber den Arbeiten über die linearen Teiler von Brill und Junker stellt Herr Hočevar[1]) die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür auf, daß eine Form überhaupt Linearteiler enthält. Seine Voraussetzungen für die Betrachtungen sind dabei folgende:

1. Daß die Form keine vielfachen Teiler hat,

2. daß das Glied mit x_1^n vorkomme, wenn n der Grad der Form ist. Hieraus ergibt sich, daß f zu f_i teilerfremd und daß jeder Faktor von f von x_1 abhängt.

Das elegante Kriterium wird nun durch die Sätze gegeben.

I. Jeder Linearfaktor von f ist Teiler der dreireihigen Minoren der Hesseschen Determinante.

II. Jeder gemeinsame Faktor u von f und den dreireihigen Minoren von $H(f)$ läßt sich in Linearteiler zerspalten.

Satz I wird mit Hilfe einiger Determinantensätze bewiesen. Um Satz II zu begründen, betrachtet er zunächst den Fall $u = f$ und die aus $f = 0$ sich ergebende Abhängigkeit der Veränderlichen x_1 von den übrigen. Für die n Werte von x_1 werden in der Umgebung von $a_1^{(1)}, a_2 \dots a_\nu, \dots a_1^{(n)}, a_2 \dots a_\nu$, die Potenzreihen angesetzt und es wird gezeigt, daß dieselben mit den ersten Gliedern abbrechen, wenn die Bedingung erfüllt ist. Werden die Variablen auf eine Seite gebracht, so erhält man die n linearen Faktoren von f.

[1]) Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie in Wien 1904. Hočevar: Über die Zerlegbarkeit algebraischer Formen in lineare Faktoren.

Digitized by Google

In einer anderen Arbeit hat Hočevar[1]) dann diese Betrachtungen auf jeden gemeinsamen Teiler von f und den dreireihigen Minoren von $H(f)$ ausgedehnt. Ferner hat er Formeln[2]) für die linearen und quadratischen Teiler angegeben. Die Formel für die linearen Faktoren verlangt nur die Kenntnis eines Wertsystems, für welches der Teiler verschwindet, und wird gegeben durch die erste Polare von f für dies System; die Formel für die quadratischen Teiler verlangt die Kenntnis zweier Wertsysteme, für die der Teiler $= 0$ und wird dargestellt durch eine Kombination der ersten und zweiten Polaren.

Es schien nun wünschenswert, worauf mich Herr Prof. Meyer freundlichst hinwies, den Hočevarschen Satz ohne Zuhilfenahme der Potenzreihen zu begründen. Hiebei ergab sich das Resultat, daß man die dreireihigen Minoren von $H(f)$ auch ersetzen kann durch die Ausdrücke in den Ableitungen von f, die sich bei Elimination der v_i und u_i aus den ersten und zweiten Ableitungen von $f = u.v$, wo u linear, ergeben. Es lag daher nahe, entsprechende Eliminationsresultate für höhere Teiler zu bilden, was im folgenden bis zu den kubischen Faktoren durchgeführt wird. Man erhält gleichzeitig Formeln für lineare, quadratische und kubische Teiler, wobei diese durch ein Wertsystem charakterisiert sind, das sie zum Verschwinden bringt. Die Hočevarschen Voraussetzungen sind beibehalten.

I. Linearteiler.

§ 1. Algebraischer Beweis des Hočevarschen Satzes. II.

Mit diesem Satze gleichwertig ist der folgende: Jeder gemeinsame Teiler von f und $f_\alpha f_\beta^2 - 2 f_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta + f_\beta f_\alpha^2$ zerfällt in Linearfaktoren; denn durch Verwendung des Eulerschen Satzes findet man, daß jeder gemeinsame Faktor der dreireihigen Minoren von $H(f)$ mit f auch in $f_\alpha f_\beta^2 - 2 f_\alpha f_\beta f_{\alpha\beta} + f_\beta f_\alpha^2$ aufgeht; wird nämlich $(m-1) f \begin{vmatrix} f_{\alpha\beta} & f_{\alpha\alpha} \\ f_{\beta\beta} & f_{\alpha\beta} \end{vmatrix}$ zu $f_\alpha f_\beta^2 - 2 f_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta + f_\beta f_\alpha^2$ addiert, so erhält man dafür:

$$\sum x_i x_k \begin{vmatrix} f_{ik} & f_{i\beta} & f_{i\alpha} \\ f_{\alpha k} & f_{\alpha\beta} & f_{\alpha\alpha} \\ f_{\beta k} & f_{\beta\beta} & f_{\beta\alpha} \end{vmatrix} \cdot 2m(m-1)^2 + \sum m.(m-1)^2 x_i^2 \begin{vmatrix} f_{ii} & f_{i\beta} & f_{i\alpha} \\ f_{\alpha i} & f_{\alpha\beta} & f_{\alpha\alpha} \\ f_{\beta i} & f_{\beta\beta} & f_{\beta\alpha} \end{vmatrix}.$$

[1]) Sitzungsberichte des Heidelberger Mathematikerkongresses 1905. Hočevar: Über die Zerlegbarkeit algebraischer Formen in lineare Faktoren.

[2]) Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie in Wien 1907. Hočevar: Über die Bestimmung der quadratischen Teiler algebraischer Formen.

Digitized by Google

Man denke sich nun f nach fallenden Potenzen von x_1 geordnet: $f(x_1 \dots x_\nu) = x_1^n + x_1^{n-1}(a_{\underset{n-1}{1}\ 2} x_2 + \cdots) + \cdots$ Die Bedingung dafür, daß f einen Linearfaktor von der Form $a_1 x_1 + \cdots + a_\nu x_\nu$ hat, ist dann: $f\left(-\frac{(a_2 x_2 + \cdots a_\nu x_\nu)}{a_1}, x_2 \dots x_\nu\right) = 0$. Dieser Ausdruck sei $F(x_2 \dots x_\nu)$, er muß identisch verschwinden. Es werde F nach Potenzen von $x_2 \dots x_\nu$ entwickelt; dann ist jeder Koeffizient von F durch die n^{te} Derivierte von F nach dem Variablenprodukte, mit welchem er multipliziert ist, darstellbar. Diese Derivierte findet man, wenn man x_1 als von $x_2 \dots x_\nu$ abhängig faßt und dementsprechend ableitet. Es ergibt sich: $\frac{\partial F}{\partial x_i} = f_1 \frac{dx_1}{dx_i} + f_i$. Allgemein:

$$I\frac{\delta^\varrho F}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\varrho}} = \sum^{\alpha=1 \dots \varrho} \Sigma f_{1_{(\varrho-\alpha)}\, i_1 \dots i_\alpha} \frac{dx_1}{dx_{i_{\alpha+1}}} \dots \frac{dx_1}{dx_{i_\varrho}}.$$ Diese Summe

wird ermittelt, indem man für jedes α die Produkte von je α der Variablen bildet; $f_{1_{(\varrho-\alpha)}}$ nach jeder dieser Kombinationen differentiiert, mit dem Produkte der Ableitungen von x_1 nach jeder der übrig bleibenden Veränderlichen multipliziert und dann summiert. Die Richtigkeit der Formel folgt unter Benützung des Schlusses von ρ auf $\rho+1$ mit Berücksichtigung des Umstandes, daß $\frac{dx_1^k}{dx_{i_1} \dots dx_{i_k}} = 0$ für $k > 1$. Wird statt $\frac{dx_1}{dx_{i_\varrho}} : \frac{-a_{i_\varrho}}{a_1}$ geschrieben, so geht die Formel über in:

$$\sum (-1)^\alpha \sum f^1_{(\varrho-\alpha)\, i_1 \dots i_\alpha} a_{i_{\varrho+1}} \dots a_{i_\varrho} a_1^\alpha = a_1^\varrho \frac{\partial^\varrho F}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\varrho}}.$$

Die aus $f = 0$ für x_1 sich ergebende Abhängigkeit von $x_2 \dots x_\nu$ liefert nun bei Derivierung die Gleichungen: $f_1 \frac{dx_1}{dx_i} + f_i = 0$. — $-f_1^3 \frac{d^2 x_1}{dx_i\, dx_k} = f_{11} f_i f_k - f_{i1} f_1 f_k - f_{k1} f_1 f_i + f_{ik} f_1^2$ u. s. w.

Da $(f_l f_i^2 - 2 f_{il} f_i f_l + f_i f_l^2) f_k^2 + (f_l f_k^2 - 2 f_{lk} f_l f_k + f_k f_l^2) f_i^2 -$ $- (f_i f_k^2 - 2 f_{ik} f_i f_k + f_k f_i^2) f_l^2 = 2 f_i f_k [f_l f_i f_k - f_{li} f_l f_k -$ $- f_{lk} f_l f_i + f_{ik} f_l^2]$, so ist $\frac{d^2 x_1}{dx_i\, dx_k} = 0$ für jedes Wertsystem, das den gemeinsamen Teiler von f und den dreireihigen Minoren von $H(f)$ verschwinden läßt Ebenso ist es mit den höheren Ab-

Digitized by Google

leitungen $\frac{d^\varrho x_1}{dx_{i_1} \dots dx_{i_\varrho}}$; denn man hat für dieselben den Wert: $Uu + V\left(\frac{dx_1}{dx_l} + f_l\right)$,[1] wo U eine Funktion der $x_2 \dots x_\nu$. Es ergibt sich bei fortgesetzter Derivierung so die Beziehung: $\sum (-1)^\alpha \sum f_{1_{\varrho-\alpha} i_1 \dots i_\alpha} f_1^\alpha \dots f_{i_\varrho} = 0$. Die Vergleichung dieser Formel mit der früheren, für $\frac{\partial^\varrho F}{dx_{i_1} \dots dx_{i_\varrho}}$ gefundenen lehrt, daß für $a_1 = f_1 \dots a_\nu = f_\nu$, $\frac{\partial^n F}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\varrho}} = 0$; wobei $f_1 \dots f_\nu$ die konstanten Werte sind, welche man erhält, wenn in $f_1 \dots f_\nu$ für $x_1 \dots x_\nu$ Werte eingesetzt werden, für die $u = 0$, während $f_1 \neq 0$. Am einfachsten verfährt man so, daß man für $x_2 \dots x_\nu$ in $u = 0$ Werte $\xi_2 \dots \xi_\nu$ setzt und die m sich daraus ergebenden $\xi_1^{(1)} \dots \xi_1^{(m)}$ berechnet. Die $\xi_1^{(1)} \dots \xi_1^{(m)}$ müssen alle voneinander verschieden sein.

Ein Spezialfall des Hočevarschen Satzes ist der Satz, daß f in Linearfaktoren zerfällt, wenn f selbst in den dreireihigen Minoren von $H(f)$ aufgeht. Es läßt sich ferner zeigen, daß jeder gemeinsame Teiler u von f und $f_\alpha f_\beta^2 - 2 f_{\alpha\beta} f_\alpha f_\beta + f_\beta f_\alpha^2 = F_{\underset{22}{\alpha\beta}}$ in $U_{\underset{22}{\alpha\beta}}$ aufgeht. Denn für $f = u.\ v$ ist $F_{\underset{22}{\alpha\beta}} = U_{\underset{22}{\alpha\beta}} . v^3 + u(\ )$. Ebenso gilt, daß durch Ausübung der linearen Transformation auf f ein Faktor, der f und den $F_{\underset{22}{\alpha\beta}}$ gemeinsam war, nicht verloren geht, denn durch:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1 x_1' + a_2 x_2' + \cdots \\ x_2 &= b_1 x_1' + b_2 x_2' + \cdots \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \text{geht, z. B. } F_{\underset{22}{13}} \text{ über in } (a_1 b_2 - a_2 b_1) F'_{\underset{22}{12}} + (a_1 b_3 - a_3 b_1) F'_{\underset{22}{13}} + 2(a_1 c_2 - c_1 a_2)(a_1 c_3 - a_3 c_1)(f_1^2 f_{23} - f_1 f_2 f_{13} - f_1 f_3 f_{12} + f_{11} f_2 f_3) + \cdots$$

Für die $F_{\underset{22}{ik}}$ gelten entsprechende Formeln. Die Faktoren der doppelten Produkte lassen sich durch die $F'_{\underset{22}{ik}}$ darstellen und es geht also jeder Teiler von f' und den $F'_{\underset{22}{ik}}$ in $F_{\underset{22}{ik}}$ auf. Bei Anwendung der umgekehrten Transformation erkennt man daher die Richtigkeit der Behauptung.

---

[1]) Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie in Win. Hočevar: Über die Zerlegbarkeit algebraischer Formen in lineare Faktoren.

Digitized by Google

§ 2. Geometrische Begründung des Satzes.

Für Kurven hat Hočevar schon den Beweis geführt. Es hat die Kurve $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ mit $H(f) = 0$ alle Punkte gemein, für welche die erste Krümmung $= 0$, und nur solche. Sind daher alle Punkte von $u = 0$ zugleich Punkte von $H(f) = 0$, so ist jeder Punkt Wendepunkt, d. h. die Kurve zerfällt in Gerade. Die Ausdehnung des Beweises auf Flächen gelingt folgendermaßen:

Hat bei Zugrundelegung von Tetraederkoordinaten die Fläche $f(x_1 \ldots x_4) = 0$ die Eigenschaft, daß die durch das Nullsetzen der dreireihigen Minoren von $H(f)$ definierten Flächen alle Punkte von $u = 0$ enthalten, so wähle man eine beliebige Ebene $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$ und mache sie durch Koordinatentransformation zu einer der Koordinatenebenen. Da die Gesamtheit der dreireihigen Minoren von $H(f)$ ein invariantes Gebilde darstellt, so wird durch lineare Transformation die Eigenschaft von f gegenüber den dreireihigen Minoren von $H(f)$ nicht berührt. Die Schnittkurve der Ebene mit $f = 0$ hat nun die Gleichungen: $\xi_1 = 0, f(\xi_2', \xi_3', \xi_4') = 0$. Durch $\xi_2 = \frac{\xi_2'}{\sin \varphi_2} r, \xi_3 = \frac{\xi_3'}{\sin \varphi_3}, \xi_4 = \frac{\xi_4'}{\sin \varphi_4}$ gehe $f(\xi_2', \xi_3', \xi_4') = 0$ in $f(\xi_2, \xi_3, \xi_4) = 0$ über. Die φ_i mögen die Neigungswinkel von $\xi_1 = 0$ gegen $\xi_i' = 0$ darstellen. Diese Transformation bedeutet, daß die Lote auf die Koordinatenebenen $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = 0$ durch Lote auf die Schnittlinien der Ebenen $\xi_i = 0$ und $\xi_1 = 0$ für die Punkte von $\xi_1 = 0$ zu ersetzen sind. Die Hessesche Kurve von $f(\xi_2, \xi_3, \xi_4) = 0$ hat dann alle Punkte $u_1 = 0$ mit $f_1 = 0$ gemein. Daher schneidet die Ebene $\xi_1 = 0$ aus der Fläche $u = 0$ nur Gerade aus, und da dies für jede beliebige Ebene gilt, so zerfällt die Fläche in Ebenen.

Die Verallgemeinerung auf n dimensionale Gebilde kann entsprechend durchgeführt werden.

Als ein günstiges Beispiel möge die kubische ternäre Form behandelt werden. Sie sei: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 6 m x_1 x_2 x_3$. Die Hočevarsche Bedingung für $u = f$ verlangt hier, daß $H(f) = \text{const.} f$. Man findet daraus für m die Gleichung $m^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$. Es braucht nur $m = \frac{1}{2}$ berücksichtigt zu werden, da die beiden anderen Fälle durch $y_1 = \varepsilon x_1$, $y_1 = \varepsilon^2 x_1$ sich auf diesen zurückführen lassen. $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3 x_1 x_2 x_3$ zerfällt dann in die drei Faktoren: $(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3)(x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3)$.

Digitized by Google

§ 3. Aufstellung eines allgemeinen Ausdruckes in den Ableitungen, der jeden Linearfaktor von f enthält.

Definition: Unter $\Sigma f_{i_1 \ldots i_\varrho} f_{i_{\varrho+1}} \ldots f_{i_{2\varrho}} (-1)^\varphi$ sei folgende Summe verstanden: Aus dem Anfangsgliede $(c_0) = f_{i_1 \ldots i_\varrho} f_{i_{\varrho+1}} \ldots f_{i_{2\varrho}}$ mögen ρ weitere Glieder dadurch erhalten werden, daß je einer der Indizes $1 \ldots \rho$ mit einem der $\rho+1 \ldots 2\rho$ so vertauscht werde, daß für jeden der Indizes $1 \ldots \rho$ und $\rho+1 \ldots 2\rho$ ein Glied vorkommt, in welchem er an anderer Stelle steht, wie in (c_0). Der Komplex dieser Glieder sei (c_1). Es möge 1 und $\rho+1$, 2 und $\rho+2, \ldots \rho$ und 2ρ transponiert werden. Aus (c_1) findet man $\binom{n}{2}$ Glieder, indem man im ersten Gliede von (c_1) 2 und $\rho+2$, 3 und $(\rho+3) \ldots \rho$ und 2ρ permutiert; im zweiten 3 und $\rho+3$ u. s. w.; entsprechend bei den übrigen Gliedern. Die Summe aller dieser Glieder sei (c_2). Bei Anwendung derselben Bildungsregel findet man aus (c_2): (c_3) u. s. w. (c_ϱ) wird wieder durch ein Glied dargestellt. Das Zeichen der (c) sei durch $\varphi =$ Index der (c) bestimmt. Also $c_0 = +$, $c_1 = -$ u. s. w. Es gilt nun der Satz:

$\Sigma f_{i_1 \ldots i_\varrho} f_{i_{\varrho+1}} \ldots f_{i_{2\varrho}} (-1)^\varphi$ enthält jeden Linearfaktor von f. (I.)

Beweis: Sei $f = u.v$, wo u linear in den x_i, so hat man für $f_{i_1 \ldots i_\varrho}$: $u v_{i_1 \ldots i_\varrho} + u_{i_1} v_{i_2 \ldots i_\varrho} + u_{i_2} v_{i_1 i_3 \ldots i_\varrho} + \cdots$ Für f_i ergibt sich: $u_i v + u v_i$.

Es werde $f_{i_{\nu_1} \ldots i_{\nu_\varrho}} f_{i_{\nu_{\varrho+1}}} \ldots f_{i_{\nu_{2\varrho}}}$ mit Glied und $v_{i_{\nu_1} \ldots i_{\nu_{\varrho-1}}} u_{i_{\nu_\varrho}} \ldots u_{i_{\nu_{2\varrho}}}$ mit Ausdruck bezeichnet.

Der Satz ist bewiesen, wenn dargetan ist, daß die Summe der Ausdrücke in Σ, die u nicht enthalten, verschwindet. Es zeigt sich, daß jeder Ausdruck von (c_0) in (c_1) vorkommt, jeder noch übrige von (c_1) in (c_2) u. s. w.; denn da zwei Glieder, die sich nur durch eine Transposition unterscheiden, immer einen Ausdruck gemeinsam haben, ergibt sich aus der Zahl der Ausdrücke von (c_0) und der der Glieder in (c_1), daß alle Ausdrücke von (c_0) in (c_1) auftreten. Es enthält hiebei jedes Glied von (c_1) denjenigen Ausdruck von (c_0), bei welchem im Index von v nicht der vertauschte Index vorkommt. Daß die Glieder von (c_2) alle noch übrigen Ausdrücke von (c_1) enthalten, folgt wieder aus denselben Gründen wie bei (c_0) und (c_1); z. B. erscheinen in (c_2) alle Ausdrücke von (c_1), in denen $\rho+k$ im Index von v vorkommt; d. h. alle noch übrigen des Gliedes, in dem $\rho+k$ mit k vertauscht war. Ebenso läßt sich beweisen, daß jeder noch übrige Ausdruck von (c_2) in (c_3) aufgeht; denn von den noch übrigen Gliedern von $f_{i_1 \ldots i_{\varrho+k} i_{k+1} \ldots i_{\varrho+\nu} i_{\nu+1} \ldots i_\varrho} f_{i_{\varrho+1}} \ldots f_{i_{\varrho+k-1}} f_{i_k} \ldots f_{i_{\varrho+\nu-1}} f_{i_\nu} \ldots f_{i_{2\varrho}}$

Digitized by Google

erscheint das erste in $f_{i_{\varrho+1}\cdots i_{\varrho+k}i_k+1\cdots i_{\varrho+\nu}i_{\nu+1}\cdots i_\varrho}f_{i_1}\cdots$ $\cdots f_{i_{\varrho+k-1}}f_{i_k}f_{i_{\varrho+k+1}}f_{i_{\varrho+\nu-1}}f_{i_\nu}f_{i_{\varrho+\nu+1}}f_{i_{2\varrho}}$ u. s. w. In entsprechender Weise schließt man, daß die noch vorhandenen Ausdrücke von (c_3) in (c_4) erscheinen u. s. f. Bei Berücksichtigung der Vorzeichen sieht man daher, daß alle diese Ausdrücke sich fortheben, da im vorletzten n übrig bleiben und im letzten n vorhanden sind.

Aus (I) lassen sich durch Gleichsetzen mehrerer der i_k Folgerungen ziehen.

Wird z. B. in $\Sigma f_{i_1\ldots i_\varrho}f_{i_{\varrho+1}}\cdots f_{i_{2\varrho}}(-1)^\varphi$, $i_1=i_2=\cdots i_\varrho$ gesetzt, so verwandelt sich die Summe in die folgende:

$\sum^{\varphi-1\ldots\varrho}(-1)^\varphi\Sigma f_{\substack{i_1\\(\varrho-\varphi)}i_{\varrho+1}\cdots i_{\varrho+\varphi}}f_{i_1}^\varphi f_{i_{\varrho+\varphi+1}}\cdots f_{i_{2\varrho}}$, unter welcher dasselbe zu verstehen ist, wie unter der entsprechenden in § 1. Also: $\sum^{\alpha=1\ldots\varrho}(-1)^\alpha\Sigma f_{\substack{\nu\\(\varrho-\alpha)}i_1\ldots i_\alpha}f_\nu^\alpha f_{i_\varrho}$ enthält jeden Linearfaktor von f. (II.)

Setzt man weiter: $i_1=i_2=\cdots i_\varrho=\mu$, so folgt:

$f_\nu f_\mu^\varrho-\binom{\varrho}{1}f_{\substack{\nu\\\varrho-1}\mu}f_\nu f_\mu^{\varrho-1}+\cdots(-1)^\varrho f_{\substack{\mu\\\varrho}}f_\nu^\varrho$ enthält jeden Linearfaktor von f. (III.) Ich schreibe für diesen Ausdruck $F_{\substack{\nu\mu\\\varrho\varrho}}$.

Eine Folgerung ist die, daß die abgeleiteten Summen f enthalten, wenn f selbst in Linearfaktoren zerfällt. Daher enthalten die Komplexe (III) f immer, wenn eine Binärform vorliegt, mit den Veränderlichen x_ν und x_μ. Für $\varrho=2$ ist $F_{\substack{\nu\mu\\22}}=$ const. $H(f).f$.

II. Höhere Teiler.

Die Methode, die ich hier zur Ermittlung von Teilern verwendet habe, besteht darin, daß man aus der Reihe der Ableitungen von f, die unter der Voraussetzung des Vorhandenseins von Faktoren gebildet werden, die gesuchten Unbekannten ermittelt, wie dies Hočevar für Linearteiler bereits durchgeführt hat. Voraussetzung für die Möglichkeit der Berechnung ist vor allem die, daß die zu verwendende Gleichung algebraisch auflösend wird und daß der zu berechnende Faktor der einzige von f ist, der für dies Wertsystem verschwindet. Da die Methode die charakteristische Eigenschaft der Formen u vom m^{ten} Grade verwendet, nämlich die, daß $\frac{\partial^{m+1}}{\partial x_i\ldots}=0$, so war von vornherein zu erwarten, daß man auf diesem Wege Teiler m^{ten} Grades von $f^{(n)}$ würde ermitteln können.

Digitized by Google

Da die Ausdrücke recht kompliziert werden, möchte ich mich darauf beschränken, die Formeln für die Teiler zweiten und dritten Grades herzuleiten. Für quadratische Teiler muß man bis zu den vierten Ableitungen vorgehen, für die kubischen Faktoren habe ich außerdem noch die fünften und sechsten Derivierten verwandt. Die Formeln werden zunächst für die Ternärform gegeben.

Es möge die Tabelle der typischen zu verwendenden Ableitungen folgen:

I. $f_i - u v_i = u_i v.$

II. $f_{\underset{2}{i}} - u v_{\underset{2}{i}} = v u_{\underset{2}{i}} + 2 u_i v_i$

$f_{ik} - u v_{ik} = u_i v_k + u_k v_i + v u_{ik}.$

III. $f_{\underset{3}{i}} - u v_{\underset{3}{i}} = u_{\underset{3}{i}} v + 3 u_i v_{\underset{2}{i}} + 3 u_{\underset{2}{i}} v_i$

$f_{\underset{2}{ik}} - u v_{\underset{2}{ik}} = u_{\underset{2}{ik}} v + u_{\underset{2}{i}} v_k + 2 u_{ik} v_i + 2 u_i v_{ik} + u_k v_i$

$f_{ikl} - u v_{ikl} = u_{ikl} v + u_{ik} v_l + u_{il} v_k + u_{kl} v_i + v_{ik} u_l + v_{il} u_k + v_{kl} u_i$

IV. $f_{\underset{4}{i}} - u v_{\underset{4}{i}} = 4 u_{\underset{3}{i}} v_i + 6 u_{\underset{2\,2}{i}} v_i + 4 v_{\underset{3}{i}} u_i$

$f_{\underset{3}{ik}} - u v_{\underset{3}{ik}} = u_{\underset{3}{i}} v_k + 3 u_{\underset{2}{ik}} v_i + 3 u_{ik} v_{\underset{2}{i}} + 3 u_{\underset{2}{i}} v_{ik} + 3 u_i v_{\underset{2}{ik}} + u_k v_{\underset{3}{i}}$

$f_{\underset{22}{ik}} - u v_{\underset{22}{ik}} = 2 v_k u_{\underset{2}{ik}} + 2 v_{\underset{2}{i}} u_{\underset{2}{ik}} + u_{\underset{2\,2}{i}} v_k + 4 u_{ik} v_{ik} + u_{\underset{2\,2}{k}} v_i +$
$+ 2 u_i v_{\underset{2}{ik}} + 2 u_k v_{\underset{2}{ik}}$

$f_{\underset{2}{ikl}} - u v_{\underset{2}{ikl}} = v_l u_{\underset{2}{ik}} + v_k u_{\underset{2}{il}} + 2 u_{ikl} v_i + v_{kl} u_{\underset{2}{i}} + 2 u_{ik} v_{\underset{2}{il}} +$
$+ 2 u_{il} v_{\underset{2}{ik}} + u_{\underset{2}{kl}} v_i + 2 u_i v_{\underset{2}{ikl}} + u_k v_{\underset{2}{il}} + u_l v_{\underset{2}{ik}}.$

V. $f_{\underset{5}{i}} - u v_{\underset{5}{i}} = 10 u_{\underset{3\,2}{i}} v_i + 10 u_{\underset{2\,3}{i}} v_i + 5 u_i v_{\underset{4}{i}}$

$f_{\underset{4}{ik}} - u v_{\underset{4}{ik}} = 4 u_{\underset{3}{i}} v_{ik} + 6 u_{\underset{2\,2}{ik}} v_i + 6 u_{\underset{2\,2}{i}} v_{ik} + 4 u_{ik} v_{\underset{3}{i}} +$
$+ 4 u_i v_{\underset{3}{ik}} + u_k v_{\underset{4}{i}}$

$f_{\underset{32}{ik}} - u v_{\underset{32}{ik}} = u_{\underset{3\,2}{i}} v_k + 6 u_{\underset{2}{ik}} v_{ik} + 3 u_{\underset{2\,2}{ik}} v_i + 3 u_{\underset{2\,2}{i}} v_{ik} + 6 u_{ik} v_{\underset{2}{ik}} +$
$+ u_{\underset{2\,3}{k}} v_i + 3 u_i v_{\underset{22}{ik}} + 2 u_k v_{\underset{3}{ik}}$

$f_{\underset{3}{ikl}} - u v_{\underset{3}{ikl}} = u_{\underset{3}{i}} v_{kl} + 3 u_{\underset{2}{ik}} v_{il} + 3 u_{\underset{2}{il}} v_{ik} + 3 u_{ikl} v_{\underset{2}{i}} + 3 u_{\underset{2}{i}} v_{ikl} +$
$+ 3 u_{ik} v_{\underset{2}{il}} + 3 u_{\underset{2}{il}} v_{ik} + u_{\underset{3}{kl}} v_i + 3 u_i v_{\underset{2}{ikl}} + u_{\underset{3}{k}} v_{il} + u_{\underset{3}{l}} v_{ik}$

$f_{\underset{22}{ikl}} - u v_{\underset{22}{ikl}} = 2 u_{\underset{2}{ik}} v_{kl} + u_{\underset{2\,2}{il}} v_k + u_{ik} v_{\underset{2}{il}} + 4 u_{ikl} v_{ik} + u_{\underset{2\,2}{kl}} v_i +$
$+ u_{\underset{2\,2}{i}} v_{kl} + 4 u_{ik} v_{ikl} + u_{il} v_{\underset{2}{ik}} + u_{\underset{2\,2}{k}} v_{il} + 2 u_{kl} v_{\underset{2}{ik}} + 2 u_i v_{\underset{2}{ilk}} + 2 u_k v_{\underset{2}{ikl}} + u_l v_{\underset{22}{ik}}.$

Digitized by Google

VI. $f_{\underset{6}{i}} - u v_{\underset{6}{i}} = 20 u_{\underset{3\,3}{i}} v_i + 15 u_{\underset{2\,4}{i}} v_i + 6 u_i v_{\underset{5}{i}}$

$$f_{\underset{5}{ik}} - u v_{\underset{5}{ik}} = 10 u_{\underset{3\,2}{i}} v_{ik} + 10 u_{\underset{2\,3}{ik}} v_i + 10 u_{\underset{2\,3}{i}} v_{ik} + 5 u_{\underset{4}{ik}} v_i + 5 u_i v_{\underset{4}{ik}} + u_k v_{\underset{5}{i}}$$

$$f_{\underset{42}{ik}} - u v_{\underset{42}{ik}} = 4 u_{\underset{3\,2}{i}} v_{ik} + 12 u_{\underset{2\,2}{ik}} v_{ik} + 4 u_{\underset{2\,3}{ik}} v_i + 6 u_{\underset{2\,22}{i}} v_{ik} + 8 u_{ik} v_{\underset{3}{ik}} + u_k v_{\underset{2\,4}{i}} + 4 u_i v_{\underset{32}{ik}} + 2 u_k v_{\underset{4}{ik}}$$

$$f_{\underset{33}{ik}} - u v_{\underset{33}{ik}} = u_{\underset{3\,3}{i}} v_k + 9 u_{\underset{2\,2}{ik}} v_{ik} + 9 u_{\underset{2\,2}{ik}} v_{ik} + u_k v_{\underset{3\,3}{i}} + 3 u_{\underset{2\,2}{i}} v_{ik} + 9 u_{ik} v_{\underset{22}{ik}} + 3 u_k v_{\underset{2\,3}{ik}} + 3 u_i v_{\underset{23}{ik}} + 3 u_k v_{\underset{32}{ik}}.$$

Das Glied der linken Seite möge allgemein nur mit $f_{ikl\ldots}$ bezeichnet werden, nicht wie bisher mit $f_{ikl\ldots} - u \cdot v_{ikl\ldots}$. Die $f_{ikl\ldots}$ sind dann als bekannt anzusehen.

Es ist ferner ersichtlich, daß als Unbekannte statt u_{ikl} und $v_{ikl\ldots}$, $u_{ikl} \cdot v$ und $\frac{v_{ikl\ldots}}{v}$ betrachtet werden können, was im folgenden ohne Änderung der Bezeichnung geschehen möge.

§ 4. Berechnung quadratischer Teiler.

Fügt man zu den Gleichungen II noch die der ersten [II (1)] entsprechende in x [II (1)'] hinzu, multipliziert die erste mit f_k^2, die zweite mit $-2 f_i f_k$ und die dritte mit f_i^2, so erhält man bei Verwertung von I: $F_{\underset{22}{ik}} = U_{\underset{22}{ik}}$ (A).

Aus den Gleichungen III mögen die $v_{\alpha\beta}$ eliminiert werden, wobei zu den beiden ersten noch die hinzu genommen werden, die durch Vertauschung von i und k entstehen. (1)' und (2)'. Man multipliziere (1) mit f_k^3, (2) mit $-3 f_k^2 f_i$, (2)' mit $3 f_i^2 f_k$, (1)' mit f_i^3. Bei der Addition ergibt sich dann:

$$F_{\underset{33}{ik}} - U_{\underset{33}{ik}} = 3 F_{\underset{22}{ik}} (f_k v_i - f_i v_k) \quad (B_1).$$

Aus den drei ersten Gleichungen IV in Verbindung mit denen, die durch Vertauschung von i und k aus den beiden ersten hervorgehen, findet man ferner bei Multiplikation der ersten mit f_k^4, der zweiten mit $-4 f_k^3 f_i$, der dritten mit $+6 f_i^2 f_k^2$, der vierten mit $-4 f_i^3 f_k$, der fünften mit f_i^4 die Relation:

$$F_{\underset{44}{ik}} = 6 F_{\underset{22}{ik}} V_{\underset{22}{ik}} + 4 U_{\underset{33}{ik}} (f_i v_k - f_k v_i) \quad (\Gamma_1).$$

Digitized by Google

Es ist hier noch $V_{\substack{ik\\22}}$ zu ermitteln. Zunächst werde $v_i f_k^2 - v_{ik} f_i f_k$ berechnet. Dazu multipliziere ich in III Gleichung 1 mit f_k^2, Gleichung (2) mit $-f_i f_k$ und bilde ihre Summe. Es wird so:

$$(v_i f_k^2 - v_{ik} f_i f_k) = \big[f_k^3 f_i - f_k^2 f_i f_{ik} - f_k^3 u_i + f_k^2 f_i u_{ik} +$$
$$+ f_k^2 u_i (f_i v_k - f_k v_i) + 2 v_i f_k (u_{ik} f_i f_k - u_i f_k^2)\big] : 2 f_i f_k \quad (\Gamma_1')$$

und daher ist $V_{\substack{ik\\22}} = \big[(f_k^3 f_i + f_i^3 f_k - f_i^2 f_k f_{ik} - f_i f_k^2 f_{ik}) - (f_k^3 u_i +$
$+ f_i^3 u_k - f_i^2 f_k u_{ik} - f_i f_k^2 u_{ik}) + (f_k v_i - f_i v_k)(F_{\substack{ik\\22}} +$
$+ 2 (u_k f_i^2 - u_i f_k^2)\big) - 2 f_k v_i F_{\substack{ik\\22}}\big] : 2 f_i f_k \quad (\Gamma_1'')$. Es möge

$f_i f_k^3 + f_k f_i^3 - f_{ik} f_i f_k^2 - f_{ki} f_i^2 f_k = F_{\substack{33\\ik}}$ gesetzt werden. Ferner geht bei Bildung von $\big(\mathrm{II}\,(1)\big) f_k^2 - \big(\mathrm{II}\,(1)' f_i^2\big)$ die Gleichung hervor:

$$(A_2): \quad f_k^2 f_i - f_i^2 f_k = 2 f_i f_k (v_i f_k - f_i v_k) + (u_i f_k^2 - u_k f_i^2);$$

entsprechend findet man:

$$f_i f_k f_{ik} - f_k f_i^2 = f_i f_k (f_k v_i - f_i v_k) + u_{ik} f_i f_k - u_k f_i^2.$$

Mit Hilfe der Relationen (A_1), (A_2), (A_3), bei Verwendung von (B_1) kann man weiter für $(ikl) = (1, 2, 3)$ die u_{ik} durch u_{11} ausdrücken. Man erhält:

$$\left.\begin{aligned}
u_{\substack{2\\2}} &= \big[2 f_1 f_2 (F_{\substack{12\\33}} - U_{\substack{12\\33}}) + 3 F_{\substack{12\\22}} (f_1^2 f_{\substack{2\\2}} - f_2^2 f_{\substack{1\\2}})\big] : 3 f_1^2 F_{\substack{12\\22}} + u_{11} \frac{f_2^2}{f_1^2} \\
u_{\substack{3\\2}} &= \big[2 f_1 f_3 (F_{\substack{13\\33}} - U_{\substack{13\\33}}) + 3 F_{\substack{13\\22}} (f_1^2 f_{\substack{3\\2}} - f_3^2 f_{\substack{1\\2}})\big] : 3 f_1^2 F_{\substack{13\\22}} + u_{11} \frac{f_3^2}{f_1^2} \\
u_{12} &= \big[f_1 f_2 (F_{\substack{12\\33}} - U_{\substack{12\\33}}) + 3 F_{\substack{12\\22}} (f_1 f_2 f_{12} - f_2^2 f_{\substack{1\\2}})\big] : 3 f_1 f_2 F_{\substack{12\\22}} + u_{11} \frac{f_2}{f_1} \\
u_{13} &= \big[f_1 f_3 (F_{\substack{13\\33}} - U_{\substack{13\\33}}) + 3 F_{\substack{13\\22}} (f_1 f_3 f_{13} - f_3^2 f_{\substack{1\\2}})\big] : 3 f_1 f_3 F_{\substack{13\\22}} + u_{11} \frac{f_3}{f_1}
\end{aligned}\right\} (B_1')$$

Digitized by Google

$$u_{23} = f_3 \left[\frac{2 (F_{12}^{33} - U_{12}^{33}) f_1 f_2 - 3 F_{12}^{22} (f_1 f_2^2 - f_2 f_1^2)_2}{6 F_{12}^{22} f_1^2 f_2} \right] +$$

$$+ f_2 \left[\frac{2 (F_{13}^{33} - U_{13}^{33}) - 3 F_{13}^{22} (f_1 f_3^2 - f_1^2 f_3)_2}{6 f_1^2 f_3 F_{13}^{22}} \right] - \frac{F_{23}^{22}}{2 f_2 f_3} + \frac{u_{11} f_2 f_3}{f_1^2}.$$

Diese Formeln (B_1') genügen in Verbindung mit einer aus (Γ_1'') zu folgernden zur Darstellung eines quadratischen Teilers; denn ein solcher ist gegeben durch

$$u_{11} x_1^2 + 2 u_{12} x_1 x_2 + 2 u_{13} x_1 x_3 + 2 u_{23} x_2 x_3 + x_2^2 u_{22} + x_3^2 u_{33} + \cdots \quad (Q).$$

Bei Benützung von (A_2), (B_1) und (Γ_1) ergibt sich nämlich aus (Γ_1''):

$$(f_i - u_i)_2 = \left[\frac{-3 f_i f_k F_{ik}^{22} F_{ik}^{44} + 9 F_{ik}^{22\,2} (F_{33}^{ik} - U_{33}^{ik})}{9 F_{ik}^{22\,3} f_k} \right] f_i +$$

$$+ \left[\frac{(F_{ik}^{33} - U_{ik}^{33}) (3 F_{ik}^{22\,2} + 4 F_{ik}^{33} f_i f_k - 6 F_{ik}^{22} (f_i f_k^2 - f_k f_i^2)_2}{9 F_{ik}^{22\,3} f_k} \right] f_i \quad (\Gamma_1''').$$

Setzt man die Werte der u_{ik} in Q ein, so findet man die Formel:

$$(\mathrm{I}') \qquad \frac{P_1^2}{f_1^2} (u_1 - f_1)_2 + \frac{2}{3} \frac{P_1}{f_1} \left(\frac{F_{13}^{33}}{F_{13}^{22}} x_3 + \frac{F_{12}^{33} x_2}{F_{12}^{22}} \right) + P_2,$$

wo unter P_1: $x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3$ und unter P_2: $f_{11} x_1^2 + 2 f_{12} x_1 x_2 + + f_{22} x_2^2 + 2 f_{13} x_1 x_3 + 2 f_{23} x_2 x_3 + f_{33} x_3^2$ verstanden ist. Bei Verwendung von (Γ_1''') lautet die Formel, in welcher der Übersichtlichkeit halber $\frac{F_{13}^{33} x_3}{F_{13}^{22}} + \frac{F_{12}^{33} x_2}{F_{12}^{22}} + \left(\frac{F_{11}^{33} x_1}{F_{11}^{22}} \right) = G_1$ den Faktor von P_1 darstellen möge:

$$P_1^2 \Big[3 f_1 f_2 F_{12}^{44} . F_{12}^{22} - 9 F_{12}^{22\,2} F_{33}^{12} - 2 F_{12}^{33} \left(3 F_{12}^{22} (f_2 f_1^2 - f_1 f_2^2)_2 + 2 f_1 f_2 F_{12}^{33} \right) -$$

$$- 3 F_{12}^{33} F_{12}^{22\,2} \Big] : 9 F_{12}^{22\,3} f_1 f_2 + \frac{2}{3} \frac{P_1 . G_1}{f_1} + P_2 \quad (\mathrm{I}).$$

Digitized by Google

Diese Formel gilt für eine Form von n Veränderlichen, wenn unter P_1, P_2 und G_1 die entsprechenden Ausdrücke verstanden werden, wie man aus dem durchaus symmetrischen Bau hinsichtlich der x_2 und x_3 in (I') ersieht. Man kann auch leicht vollständig symmetrischer Schreibweise sich bedienen, doch liefert dieses keine wesentliche Vereinfachung.

Macht man die Annahme, daß ein Wertsystem bekannt sei, das einen quadratischen Teiler u zu 0 macht, so ist der Teiler aus der angegebenen Formel zu berechnen. Läßt das Wertsystem einen linearen Faktor verschwinden, so sind die F alle $= 0$. Der Ausdruck wird daher unbestimmt.

Über die Wahl des Wertsystems ist folgendes zu bemerken. Erstens ist darauf zu achten, daß kein anderer Teiler von f für dasselbe annulliert wird, da sonst $v = 0$. Die u_{ik} sind ja $(u_{ik}.v)$. Ferner dürfen die f_i nicht verschwinden und ebensowenig die F_{ik}; wenn die Nullstelle keinem linearen Teiler entspricht. Diesen Bedingungen für die Wertsysteme kann man, falls f keine Linearteiler enthält, immer genügen; denn aus den über f gemachten Voraussetzungen folgt, daß stets Wertsysteme existieren, für die $u = 0\ v \neq 0$, $f_i \neq 0$. Ferner haben für Ternärformen F_{12} oder F_{13} nur dann mit f einen gemeinsamen Teiler, wenn derselbe in Linearfaktoren zerfällt, so daß stets Wertsysteme gefunden werden können, die einen nicht zerfällbaren quadratischen Teiler annullieren, während die $F_{ik} \neq 0$. Für Formen von mehr als drei Veränderlichen kann es vorkommen, daß f und mehrere der F_{ik} einen gemeinsamen Teiler haben, der nicht in Linearteiler zerfällt; doch kann man dann mit Hilfe von linearer Transformation auf ein solches f kommen, das mit keinem seiner F_{ik} einen gemeinsamen Faktor hat, was bei geeigneter Wahl der Transformationen sich leicht ergibt.

§ 5.

Es mögen nun Ausdrücke angegeben werden, die jeden quadratischen Faktor von f enthalten.

Zwischen den drei Formeln (B_1) besteht eine Relation, da: $f_l(v_i f_k - f_i v_k) + f_k(v_l f_i - f_l v_i) + f_i(f_l v_k - v_l f_k) = 0$. Man erhält: (B_2) $F_{ik}^{33} f_l F_{il}^{22} F_{kl}^{22} + F_{kl}^{33} f_i F_{ik}^{22} F_{il}^{22} + F_{li}^{33} f_k F_{kl}^{22} F_{ki}^{22} = U_{ik}^{33} f_l F_{li}^{22} F_{lk}^{22} + U_{kl}^{33} f_i F_{ik}^{22} F_{il}^{22} + U_{li}^{33} f_k F_{ik}^{22} F_{kl}^{22}$. Da $f_{ikl} = f_{ikl} - u v_{ikl}$, so ist die linke Seite: $F_{ik}^{33} f_l F_{kl}^{22} F_{il}^{22} + F_{kl}^{33} F_{ik}^{22} F_{il}^{22} f_i + F_{li}^{33} F_{ik}^{22} F_{kl}^{22} f_k - u(V_{ik}^{33} f_l F_{il}^{22} F_{kl}^{22} + V_{kl}^{33} f_i F_{ik}^{22} F_{il}^{22} + V_{li}^{33} f_k F_{ik}^{22} F_{kl}^{22})$.

Digitized by Google

Wenn also $U_{ik}, U_{kl}, U_{li} = 0$, was immer für $u_{ikl} = 0$ eintritt, so ist die linke Seite durch u teilbar: Es gilt also der Satz:

$$F_{ik}\, f_l\, F_{il}\, F_{kl} + F_{kl}\, f_i\, F_{ik}\, F_{il} + F_{li}\, f_k\, F_{ik}\, F_{lk} = A_{ikl}$$ enthält jeden quadratischen Teiler von f. Ich schreibe hiefür A_{ikl}.

Ferner eliminiere ich mit Hilfe der dritten Gleichung in III die $v_{\alpha\beta}$, wobei am besten wie folgt verfahren wird: Aus der ersten Beziehung in III durch Vertauschung von i mit k und l und aus der zweiten durch Vertauschung von (ik) mit (kl) und (li) werden je zwei andere abgeleitet. Diese Formeln mögen mit (1'), (1''). (2'), (2'') bezeichnet werden. Es werde gebildet: (3) $f_i^2 f_k^2 f_l^2 \cdot 6 + + (1) f_l^3 f_k^3 + (1') f_i^3 f_l^3 + (1'') f_k^3 f_i^3 - 3\big((2) f_l^3 f_k^2 f_i + f_i^3 f_l^2 f_k (2') + + f_k^3 f_i^2 f_l (2'')\big)$. Dies ergibt: ($B_3$) $6 f_{ikl} f_i^2 f_k^2 f_l^2 + f_i^3 f_k^3 f_l + + f_k^3 f_l^3 f_i + f_i^3 f_l^3 f_k - 3(f_{ik} f_i f_k^2 f_l^3 + f_{kl} f_k f_l^2 f_i^3 + f_{li} f_l f_i^2 f_k^3) + + 3\big[F_{ik} f_l^2 f_k (v_i f_l - f_i v_l) + F_{kl} f_i^2 f_l (v_k f_i - f_k v_i) + + F_{il} f_k^2 f_i (v_l f_k - f_l v_k)\big] - \big(6 u_{ikl} f_i^2 f_k^2 f_l^2 + u_l f_i^3 f_k^3 + u_i f_k^3 f_l^3 + + u_k f_i^3 f_l^3 - 3(u_{ik} f_i f_k^2 f_l^3 + f_k f_l^2 f_i^3 u_{kl} + f_l f_i^2 f_k^3 u_{il})\big)$. Setzt man für das Aggregat der $f_{ikl} f_i^\alpha f_k^\beta f_l^\gamma$: F_{ikl}, so erhält man den Satz:

$$F_{ikl}\, F_{ik}\, F_{il}\, F_{kl} + f_l^2 f_k\, F_{il} F_{ik}^2 F_{lk} + f_i^2 f_l\, F_{ki} F_{kl}^2 F_{il} + f_k^2 f_i\, F_{il}^2 F_{ik} F_{lk}$$ enthält jeden quadratischen Teiler von f.

Man kann diesem zweiten Ausdrucke noch eine andere Form geben; durch Elimination der $v_{\alpha\beta}$ mit Hilfe anderer Gleichungen. Man bilde:

(3) $\cdot\, 4 f_i^2 f_k^2 - (2) f_i f_k^2 f_l - f_i^2 f_k f_l (2') + f_k^3 f_l (1) + f_i^3 f_l (1') - - 2 f_i^3 f_k (2''') - 2 f_i f_k^3 (2'')$, wobei (2''') durch $\binom{ik}{kl}$ aus (2) hervorgeht; (2') durch (i und k), (2'') durch (k und l). Bei Verwendung von (B_2) findet man so: $-3 F_{ikl} F_{ik} F_{il} + 2 F_{ikl} F_{il} F_{ik} - F_{ik}^2 F_{li} = = -3 U_{ikl} F_{ik} F_{il} + 2 F_{ikl} F_{il} U_{ik} - F_{ik}^2 U_{li}$; wo $F_{ikl} = f_i f_k^2 f_l^3 + + 2 f_{ikl} f_i^2 f_k - 2 f_i f_k f_l f_{ik} + f_i^2 f_l f_{ki} - f_{il} f_i f_k^2 - f_{kl} f_i^3$. Man hat so: $-F_{ikl} F_{ik} F_{il} + 2 F_{ikl} F_{il} F_{ik} - F_{ik}^2 F_{li}$ enthält jeden quadratischen Teiler von f. (A_{ikl}).

Digitized by Google

§ 6. Berechnung kubischer Teiler.

Zu den drei ersten Formeln V mögen noch die hinzugenommen werden, die aus ihnen durch Vertauschung von i und k entstehen. Aus diesen sechs Formeln werden die v_{iklj} eliminiert, indem die erste mit f_k^5, die zweite mit $-5f_k^4 f_i$, die dritte mit $+10 f_k^3 f_i^2$ u. s. w. multipliziert wird. Man findet dann:

$$(\Delta_1) \qquad \underset{55}{F_{ik}} = 10\,\underset{22}{F_{ik}}\,\underset{33}{V_{ik}} + 10\,\underset{22}{V_{ik}}\,\underset{33}{U_{ik}}.$$

Weiter werden zu den Formeln VI die hinzugefügt, welche durch Vertauschung von i und k aus den drei ersten sich ergeben; die erste wird mit f_k^6, die zweite mit $-6f_i f_k^5$, die dritte mit $15 f_i^2 f_k^4$ u. s. w. multipliziert. Dies gibt:

$$(E_1) \qquad \underset{66}{F_{ik}} = 15\,\underset{44}{V_{ik}}\,\underset{22}{F_{ik}} + 20\,\underset{33}{U_{ik}}\,\underset{33}{V_{ik}}.$$

Es werde ferner in IV aus der ersten Gleichung (1) durch (i mit k) (1'), aus (2) durch (i und k): (2') durch (k und l): (2''), $\big((ik)$ und $(kl)\big)$: (2'''); ferner aus (4) durch (i und k): (4') hergestellt. Man bilde nun: $3\big(f_i f_k^2(4) - f_i^2 f_k(4') + f_i^2 f_l(2') - f_k^2 f_l(2)\big) 4 f_i f_k + + 2\big((1) f_l f_k^4 - (1') f_i^4 f_l\big) + 4\big(f_i^4 f_k(2''') - f_k^4 f_i(2'')\big)$. Man erhält so:

$$\underset{43}{F_{kil}} = \underset{33}{U_{ik}}(f_k v_l - f_l v_k) + 3\,\underset{32}{U_{kil}}(f_i v_k - f_k v_i) + + 3\,(\underset{22}{F_{ik}}\,\underset{2}{V_{kil}} + \underset{22}{V_{ik}}\,\underset{2}{F_{kil}}) \quad (\Gamma_2).$$

Hier ist $\underset{4}{f_k f_i^3 f_l} - 2\underset{3}{f_{ki}} f_i^2 f_k f_l + 3\underset{2}{f_{ilk}} f_i^2 f_k - \underset{3}{f_{kl}} f_i^3 f_k + + 3\underset{22}{f_{ik}} f_i f_l f_k^2 - 3 f_i f_k^3 \underset{2}{f_{ikl}} - \underset{3}{f_k^3} f_l f_{ik} + \underset{3}{f_{il}} f_k^4 = \underset{43}{F_{kil}}$.

Es mögen ferner die v_{iklj} aus V folgendermaßen entfernt werden. (i und k) liefert: (3') und (4') und (2''). (k und l): (2') $\big((ik)$ und $(kl)\big)$ (2'''). Ich setze an: $30 f_i^3 f_k^3(5) - 5 f_i^2 f_k^2 f_l\big(f_k(3) + + f_i(3')\big) - 30 f_i^2 f_k^2\big(f_k^2(4) + f_i^2(4')\big) + 10\big(f_i f_l f_k^4(2) + f_i^4 f_k f_l(2'')\big) + + 5\big((2') f_i f_k^5 + (2''') f_i^5 f_k\big) - 3 f_l\big(f_k^5(1) + f_i^5(1')\big)$. Dies wird, wenn

$$\underset{34}{F_{kil}} = \underset{5}{f_k} f_i^4 f_l - 4\underset{4}{f_{ik}} f_i^3 f_k f_l - f_i^4 f_k \underset{4}{f_{kl}} + 4 f_i^3 f_k \underset{3}{f_{kil}} + + 6 f_i^2 f_k^2 f_l \underset{23}{f_{ik}} - 4 f_i f_l f_k^3 \underset{32}{f_{ik}} - 6\underset{22}{f_{ikl}} f_i^2 f_k^3 + 4 f_i f_k^4 \underset{3}{f_{ikl}} + + f_k^4 f_l \underset{4}{f_{ik}} - 10 f_k^5 \underset{4}{f_{il}}. \qquad \underset{54}{F_{kil}} = 6(\underset{22}{F_{ik}}\,\underset{32}{V_{kil}} + \underset{22}{V_{ik}}\,\underset{32}{U_{kil}}) + + 4\,(\underset{35}{V_{ki}}\,\underset{2}{F_{kil}} + \underset{33}{U_{ki}}\,\underset{2}{V_{kil}}). \quad (\Delta_2)$$

Digitized by Google

Weiter werde $V_{\substack{ik\\33}}$ ermittelt. Man findet diesen Ausdruck aus den beiden letzten Formeln IV und denen, die durch (i und k) aus ihnen erhalten werden. Man stelle sich dazu her:

$$(1)\, f_k^4 - 2 f_i f_k^3\,(2) + 2 f_i^3 f_k\,(2') - (1')\, f_i^4.$$

Setzt man $f_i f_k^4 - 2 f_{ik} f_i f_k^3 + 2 f_{ik} f_i^3 f_k - f_k f_i^4 = F_{\substack{44\\ik}}$, so lautet die Formel:

$$2\, V_{\substack{ik\\33}} f_i f_k = -\,(U_{\substack{ik\\33}}\,(f_k v_i + f_i v_k) + (f_k v_i - f_i v_k)\, U_{\substack{33\\ik}}) + F_{\substack{44\\ik}} -$$

$$- 6\,\big((f_k^2 u_i - f_i f_k u_{ik})\,(v_i f_k^2 - v_{ik} f_i f_k) -$$

$$- (u_k f_i^2 - u_{ik} f_i f_k)\,(v_k f_i^2 - v_{ik} f_i f_k)\big). \quad (\Delta_3)$$

Weiter hat man für $V_{\substack{ik\\44}}$ durch Berechnung von

$$f_k^5\,(1) + f_i^5\,(1') - 3\,\big(f_i f_k^4\,(2) + f_k f_i^4\,(2')\big) + 2\,\big(f_i^2 f_k^3\,(3) + f_i^3 f_k^2\,(3')\big)$$

$$2 f_i f_k V_{\substack{ik\\44}} = F_{\substack{55\\ik}} + 4\,\big[u_k f_i^2 - u_i f_k^2)\, V_{\substack{ik\\33}} + U_{\substack{ik\\33}}\,(v_k f_i^2 - v_i f_k^2)\big] -$$

$$- 6\,(F_{\substack{ik\\22}} V_{\substack{33\\ik}} + V_{\substack{ik\\22}} U_{\substack{33\\ik}})\ (\mathrm{E}_2). \qquad \text{Hier ist:}\quad F_{\substack{55\\ik}} = f_i f_k^5 + f_k f_i^5 -$$

$$- 3\,(f_i f_k^4 f_{ik} + f_i^4 f_k f_{ik}) + 2\,(f_i^2 f_k^3 f_{ik} + f_i^3 f_k^2 f_{ik}).$$

Die Formeln V wurden hier benützt. Ferner ergibt sich für $V_{\substack{33\\ik}}$ aus IV durch Bildung von $f_i^4\,(1') + f_k^4\,(1) - 4 f_i f_k^3\,(2)$ der Wert: $3 f_i f_k V_{\substack{33\\ik}} =$

$$= F'_{\substack{44\\ik}} - (u_i f_k^3 - u_k f_i^3)\,(f_k v_i - f_i v_k) - 3\,\big(f_k v_i\,(u_i f_k^3 - u_{ik} f_i f_k^2) +$$

$$+ v_k f_i\,(u_k f_i^3 - u_{ki} f_i^2 f_k)\big) - 3\,\big(F_{\substack{ik\\22}}\,(v_i f_k^2 + v_k f_i^2) +$$

$$+ (v_k f_i^2 - v_i f_k^2)\,(u_k f_i^2 - u_i f_k^2)\big),$$

wo $F'_{\substack{44\\ik}} = f_i^4 f_k + f_i f_k^4 - f_{ik} f_i f_k^3 - f_{ik} f_i^3 f_k$.

Es zeigt sich nun im weiteren Verlaufe der Rechnung, daß man die beiden Formeln (Γ_2), die von einander unabhängig sind, in Verbindung mit (B_2) und (B'_3) dazu verwenden kann, um $v_i f_k - f_i v_k$ u. s. w. zu ermitteln. Man findet nach längerer Umformung so die Gleichung:

Digitized by Google

$$\frac{A_{ikl}(v_l f_i - v_i f_l)}{f_i f_l \underset{22}{F_{il}} \underset{22}{F_{kl}}} f_k + \underset{743}{A_{ikl}} \frac{(v_i f_k - f_i v_k)}{\underset{22}{F_{ik}} \underset{22}{F_{kl}}} =$$

$$= 4 \underset{43}{F_{kil}} f_i f_l \underset{22}{F_{ik}} \underset{22}{F_{il}} \underset{22}{F_{lk}} - 2 \underset{2}{F_{kil}} f_i f_l \underset{22}{F_{il}} \underset{22}{F_{kl}} \underset{44}{F_{ik}} -$$

$$- f_l^2 \underset{44}{F_{ik}} \underset{22}{F_{ik}} \underset{22}{F_{il}} \underset{22}{F_{kl}} - f_i^2 \underset{44}{F_{kl}} \underset{22}{F_{ik}^2} \underset{22}{F_{il}} + f_k^2 \underset{44}{F_{il}} \underset{22}{F_{ik}^2} \underset{22}{F_{kl}} \Big] : 4 \underset{22}{F_{ik}} \underset{22}{F_{il}} \underset{22}{F_{kl}} f_i f_l.$$

Der Zähler der rechten Seite werde $= \underset{886}{B_{kil}}$ gesetzt. Dann gilt:

$$\underset{22}{F_{ik}} A_{ikl} f_k (v_l f_i - v_i f_l) + \underset{743}{A_{ikl}} (v_i f_k - f_i v_k) f_i f_l \underset{22}{F_{il}} = \underset{886}{B_{kil}} : 4 \mid (1)$$

Durch Vertauschung von ikl mit (kli) erhält man diese Formel:

$$\underset{22}{F_{kl}} A_{ikl} f_l (v_i f_k - v_k f_i) + \underset{743}{A_{kli}} (v_k f_l - f_k v_l) f_k f_i \underset{22}{F_{ki}} = \underset{886}{B_{lki}} : 4 \mid (2)$$

Ferner gilt:

$$f_l (v_i f_k - f_i v_k) + f_k (v_l f_i - v_i f_l) + f_i (v_k f_l - v_l f_k) = 0. \quad (3)$$

Daher:

$$(v_i f_k - f_i v_k) =$$

$$= \begin{vmatrix} \underset{886}{B_{kil}} : 4 & 0 & \underset{22}{F_{ik}} A_{ikl} f_k \\ \underset{886}{B_{lki}} : 4 & \underset{743}{A_{kli}} f_k f_i \underset{22}{F_{ki}} & 0 \\ 0 & f_i & f_k \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \underset{743}{A_{ikl}} f_i f_l \underset{22}{F_{il}}, & 0 & \underset{22}{F_{ik}} A_{ikl} f_k \\ A_{ikl} f_l \underset{22}{F_{kl}}, & \underset{743}{A_{kli}} f_k f_i \underset{22}{F_{ki}} & 0 \\ f_l, & f_i & f_k \end{vmatrix} =$$

$$= Z_{ik} : N_{ikl}$$

$$v_k f_l - f_k v_l =$$

$$= \begin{vmatrix} \underset{743}{A_{ikl}} f_i f_l \underset{22}{F_{il}} & \underset{886}{B_{kil}} : 4 & \underset{22}{F_{ik}} A_{ikl} f_k \\ \underset{22}{F_{kl}} A_{ikl} f_l & \underset{886}{B_{lki}} : 4 & 0 \\ f_l & 0 & f_k \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \underset{743}{A_{ikl}} f_i f_l \underset{22}{F_{il}}, & 0, & \underset{22}{F_{ik}} f_k A_{ikl} \\ A_{ikl} f_l \underset{22}{F_{kl}} & \underset{743}{A_{kli}} f_k f_i \underset{22}{F_{ki}}, & 0 \\ f_l & f_i & f_k \end{vmatrix} =$$

$$= Z_{kl} : N_{ikl}$$

$$v_l f_i - f_l v_i =$$

$$= \begin{vmatrix} \underset{743}{A_{ikl}} f_i f_l \underset{22}{F_{il}} & 0 & \underset{886}{B_{kil}} : 4 \\ \underset{22}{F_{kl}} A_{ikl} f_l & \underset{74}{A_{kli}} f_k f_i \underset{22}{F_{ik}} & \underset{886}{B_{lki}} : 4 \\ f_l & f_i & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \underset{743}{A_{ikl}} f_i f_l \underset{22}{F_{il}} & 0 & \underset{22}{F_{ik}} f_k A_{ikl} \\ A_{ikl} f_l \underset{22}{F_{kl}} & \underset{743}{A_{kli}} f_k f_i \underset{22}{F_{ik}} & 0 \\ f_l & f_i & f_k \end{vmatrix} =$$

$$= Z_{li} : N_{ikl}.$$

Digitized by Google

$$F_{ik}^{33} - U_{ik}^{33} = 3 F_{ik}^{22} Z_{ik} : N_{ikl}, \quad F_{kl}^{33} - U_{kl}^{33} = 3 F_{kl}^{22} Z_{kl} : N_{ikl},$$

$$F_{li}^{33} - U_{li}^{33} = 3 F_{li}^{22} Z_{li} : N_{ikl}.$$

Man findet ferner aus (Γ_1) bei symmetrischer Rechnung:

$$F_{ik}^{33} - U_{ik}^{33} - F_{ik}^{22}(f_{ik} - u_{ik}) = \frac{Z_{ki}}{N_{ikl}} F_{ik}^{22} + \frac{f_i f_k}{3 F_{ik}^{22}} F_{ik}^{44} - 2 a_{ik} \frac{Z_{ik}}{N_{ikl}},$$

wo $a_{ik} = 3 F_{ik}^{22}(f_k f_i^2 - f_i f_k^2) + 2 f_i f_k F_{ik}^{33}$. So erhält man die Formel:

$$f_l F_{il}^{22}(F_{ik}^{33} - U_{ik}^{33}) - f_k F_{ik}^{22}(F_{il}^{33} - U_{il}^{33}) = \Gamma_{ikl}^2 =$$

$$= -2 \frac{(F_{il}^{22} F_{ik}^{22})}{N_{ikl}} (Z_{ik} f_l - Z_{li} f_k) + \left[\left(f_i f_k F_{ik}^{44} - 6 a_{ik} \frac{Z_{ik} F_{ik}^{22}}{N_{ikl}} \right) f_l F_{il}^{22} - \right.$$

$$\left. - \left(f_i f_l F_{il}^{44} - 6 a_{il} F_{il}^{22} \frac{Z_{li}}{N_{ikl}} \right) f_k F_{ik}^{22} \right] : F_{ik}^{22} F_{il}^{22}.$$

Ferner hat man nach (Δ_1):

$$V_{ik}^{33} = \left[3 F_{ik}^{55} - 5 \left(F_{ik}^{44} - 4 U_{ik}^{33} (f_k v_i - f_i v_k) \right) \frac{U_{ik}^{33}}{F_{ik}^{22}} \right] : 30 F_{ik}^{22}.$$

Bei Verwendung von (Δ_3) erhält man nach einiger Rechnung die Gleichung: $B_{ik} = (F_i^3 - U_i^3) \rho_{ik} + (F_k^3 - U_k^3) \rho_{ki}$.

Hier sind folgende Abkürzungen gewählt:

$$F_i^3 = f_i f_k^3 - f_{ik}^2 f_i f_k^2, \quad F_k^3 = f_k f_i^3 - f_{ik}^2 f_i^2 f_k.$$

$$\rho_{ki} = f_i f_k F_{ki}^{33} + f_i f_k f_{ik} - f_k f_i^2, \quad \rho_{ik} = f_i f_k F_{ki}^{33} + (f_i f_k^2 - f_i f_k f_{ik}).$$

$$B_{ik} = F_{ik}^{22} f_i f_k \cdot \left[\left(f_i \; f_k \left(3 F_{ik}^{55} F_{ik}^{22} + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. - 5 \left(F_{ik}^{44} - 4 \frac{Z_{ik}}{N_{ikl}} \left(F_{ki}^{33} + 3 \frac{Z_{ik}}{N_{ikl}} F_{ik}^{22} \right) \right) \left(F_{ki}^{33} + \frac{3 Z_{ik} F_{ik}^{22}}{N_{ikl}} \right) \right) \right] : 15 F_{ik}^{22}$$

Digitized by Google

$$-3F_{ik}\frac{Z_{ik}}{N_{ikl}}f_{ik}+\frac{a_{ik}+f_if_kF_{ik}}{f_if_k}\Bigg(\Bigg(-f_if_kF_{ik}+\frac{6a_{ik}Z_{ik}F_{ik}}{N_{ikl}}\Bigg):3F_{ik}$$

$$-3\left(F_{ik}^2+\left(f_i^2f_k-f_k^2f_i+2\frac{Z_{ik}}{N_{ikl}}f_if_k\right)^2\right)\Bigg].$$

Es bestehen so im ganzen folgende Gleichungen, wenn $F_i - U_i$ mit W_i bezeichnet wird:

(1) $$B_{ik}=W_i\,\varrho_{ik}+W_k\,\varrho_{ki}$$

(2) $$\Gamma_{ikl}=f_lF_{il}W_{ik}-f_kF_{ik}W_{il}$$

(3) $$3F_{ik}\frac{Z_{ik}}{N_{ikl}}=W_{ik}$$

(4) $$W_{ikl}=F_{ik}f_l^2f_k\frac{Z_{il}}{N_{ikl}}+F_{kl}f_i^2f_l\frac{Z_{ki}}{N_{ikl}}+F_{il}f_k^2f_i\frac{Z_{lk}}{N_{ikl}}.$$

Aus (1) und (3) erhält man durch geeignetes Vertauschen der Indizes je zwei weitere, aus (2) noch eine Gleichung, so daß im ganzen 9 vorhanden sind. Diese werden benützt, um W_{ikl} durch W_i auszudrücken. Die Formeln werden:

$$W_kf_i^3=W_if_k^3+3\frac{\left(A_{ikl}\frac{F_{kl}}{s_{kl}}f_k^2+A_{kli}\frac{F_{li}}{s_{li}}f_i^2\right)s_{ki}s_{lk}s_{li}}{2f_if_kf_lA_{ikl}\cdot f_l}$$

$$W_lf_i^3=W_if_l^3+3\frac{\left(A_{ikl}\frac{F_{kl}}{s_{kl}}f_l^2+A_{lki}\frac{F_{ik}}{s_{ki}}f_i^2\right)s_{ki}s_{lk}s_{li}}{2f_if_kf_lA_{ikl}\cdot f_l}$$

$$W_{ik}f_if_k^2=W_if_k^3+\varrho_{ki}\frac{\left(A_{ikl}\frac{F_{kl}}{s_{kl}}f_k^2+A_{kli}\frac{F_{li}}{s_{li}}f_i^2\right)s_{ki}s_{lk}s_{li}-}{f_if_kf_lA_{ikl}s_{ki}f_l}$$

$$-\frac{-B_{ik}+3\frac{F_{ik}Z_{ik}\varrho_{ki}}{N_{ikl}}}{s_{ki}}$$

Digitized by Google

$$W_{2}^{ki} f_i^2 f_k = W_{3}^{i} f_k^3 + (3\rho_{ki} + \rho_{ik}) \frac{\left(A_{2}^{ikl} \frac{F_{lk}^{22}}{s_{kl}} f_k^2 + A_{2}^{kli} \frac{F_{li}^{22}}{s_{li}} f_i^2 \right) s_{ki} s_{lk} s_{li}}{2 f_l f_k f_i A_{ikl}(s_{ki}) f_l}$$

$$+ 3 \frac{\frac{F_{ik}^{22} Z_{ik} \rho_{ik}}{N_{ikl}} - B_{ik}}{s_{ki}}$$

$$W_{2}^{il} f_i^2 f_l = W_{3}^{i} f_l^3 + \rho_{li} \frac{\left(A_{2}^{ikl} \frac{F_{kl}^{22}}{s_{kl}} f_l^2 + A_{2}^{lki} \frac{F_{ki}^{22}}{s_{ki}} f_i^2 \right) s_{ki} s_{lk} s_{li}}{2 f_k^2 f_i f_l A_{ikl}(s_{li})} -$$

$$- 3 \frac{\frac{F_{il}^{22} Z_{li}}{N_{ikl}} \rho_{il} - B_{il}}{s_{li}}$$

$$W_{2}^{li} f_i^2 f_l = W_{3}^{i} f_l^3 + (3\rho_{li} + \rho_{il}) \frac{\left(A_{2}^{ikl} \frac{F_{lk}^{22}}{s_{lk}} f_l^2 + \frac{A_{2}^{lki}}{s_{ki}} F_{ik}^{22} f_i^2 \right) s_{ki} s_{lk} s_{li}}{2 f_i f_k f_l A_{ikl} s_{li} f_k}$$

$$- 3 \frac{\frac{F_{il}^{22} Z_{li} \rho_{il}}{N_{ikl}} - B_{il}}{s_{li}}$$

$$W_{2}^{kl} f_l^2 f_k = \frac{f_l^3 f_k^3}{f_i^3} W_{3}^{i} + \rho_{lk} \frac{f_k^3}{f_i^3} \frac{\left(A_{2}^{ikl} \frac{F_{lk}^{22}}{s_{lk}} f_l^2 + A_{2}^{lki} \frac{F_{ki}^{22}}{s_{ki}} f_i^2 \right) s_{ki} s_{lk} s_{li}}{f_i f_k f_l A_{ikl} f_k s_{kl}}$$

$$- \frac{\left(B_{kl} + 3 \frac{F_{kl}^{22} Z_{kl}}{N_{ikl}} \rho_{lk} \right)}{s_{kl}}$$

$$+ (3\rho_{kl} + \rho_{lk}) \frac{f_l^3}{f_i^3} \frac{\left(A_{2}^{ikl} \frac{F_{kl}^{22}}{s_{lk}} f_k^2 + A_{2}^{kil} \frac{F_{il}^{22}}{s_{li}} f_i^2 \right) s_{li} s_{lk} s_{ki}}{2 f_i f_k f_l A_{ikl} f_l s_{lk}}$$

Digitized by Google

$$W_{kl}\,f_k^2 f_l = \underline{-B_{kl} + 3\frac{F_{lk}\,Z_{kl}\,\varrho_{kl}}{{}_{22}\,N_{ikl}} + \cdots}$$

$$s_{kl}$$

$$+\frac{\varrho_{kl}\,f_l^3}{f_i^3}\underline{\left(A_{ikl}\frac{F_{kl}}{{}_{22}\,s_{lk}}f_k^2 + A_{kli}\frac{F_{il}}{{}_{22}\,s_{li}}f_i^2\right)s_{ki}\,s_{lk}\,s_{li}} + \frac{f_l^3 f_k^3}{f_i^3}\,W_i +$$

$$f_i f_k f_l\,A_{ikl}\,f_l\,s_{kl}$$

$$+\frac{(3\varrho_{lk}+\varrho_{kl})}{2\,s_{lk}}\underline{\left(A_{ikl}\frac{F_{lk}}{{}_{22}\,s_{lk}}f_l^2 + A_{lki}\frac{F_{ik}}{{}_{22}\,s_{ki}}f_i^2\right)s_{ki}\,s_{lk}\,s_{li}}\frac{f_k^3}{f_i^3}$$

$$f_i f_k f_l\,A_{ikl}\cdot f_k$$

$$W_{ikl}\,f_i^2 f_k^2 f_l^2 = -3\left[f_i^2 f_l F_{ik}\,F_{kl}\,Z_{ik} + f_k^2 f_i F_{il}\,F_{kl}\,Z_{kl} + \right.$$

$$\left. + F_{il}\,F_{ik}\,f_l^2 f_k\,Z_{li}\right] : N_{ikl} - \frac{(W_k f_i^3 f_l^3 + W_l f_i^3 f_k^3)}{6} +$$

$$+\frac{W_{ik}\,f_i f_k^2 f_l^3 + W_{kl}\,f_k f_l^2 f_i^3 + W_{li}\,f_i^2 f_l f_k^3}{3}.$$

Hier ist: $A_{ikl} = \Gamma_{ikl} - f_l F_{il}\underline{\left(-B_{ik} + 3\frac{F_{ik}\,Z_{ik}\,F_{ik}}{{}_{22}\,N_{ikl}}\right) + \cdots}$

$$s_{ki}$$

$$+ f_k F_{ik}\underline{\left(-B_{il} + 3\frac{F_{il}\,Z_{il}\,F_{il}}{{}_{22}\,N_{ikl}}\right)}, \quad s_{ki} = \varrho_{ik} + \varrho_{ki}.$$

$$s_{li}$$

Ferner sei

$$\alpha_i = \frac{F_{lk}\,A_{ikl}}{{}_{22}\;{}_{2}\,A_{ikl}\,s_{kl}\,f_i f_k f_l}, \quad \alpha_k = \frac{A_{kli}\,F_{li}}{{}_{2}\;{}_{22}\,A_{ikl}\,s_{li}\,f_i f_k f_l}, \quad \alpha_l = \frac{A_{lki}\,F_{ik}}{{}_{2}\;{}_{22}\,A_{ikl}\,s_{ki}\,f_i f_k f_l}$$

$$\varrho_{kl} = f_l f_k\,F_{kl} + (f_l f_k f_{lk} - f_k f_l^2).$$

Die Formel der kubischen Teiler lautet dann:

$$\frac{P_1^3}{f_i^3}(u_i \quad f_i) + P_3 + 3\frac{P_1}{f_i f_k f_l}\left(\frac{B_{ik}}{s_{ki}}x_i x_k f_i f_k + \frac{B_{kl}}{s_{kl}}x_k x_l f_k f_l + \frac{B_{il}}{s_{li}}x_i x_l f_i f_l\right)$$

Digitized by Google

$$-\frac{3}{2}\frac{P_1}{f_i f_k f_l}\Bigg[\Bigg(\frac{\alpha_k}{f_k^2}\Big(x_k f_k+\frac{2\rho_{ki}}{s_{ki}}x_i f_i+\frac{2\rho_{kl}}{s_{kl}}x_l f_l\Big)x_k f_k+$$

$$+\frac{\alpha_l}{f_l^2}\Big(x_l f_l+\frac{2\rho_{li}}{s_{li}}x_i f_i+\frac{2\rho_{lk}}{s_{kl}}x_k f_k\Big)x_l f_l+$$

$$+\frac{\alpha_i}{f_i^2}\Big((x_k f_k+x_l f_l)^2+2x_i f_i\Big(x_k f_k\frac{\rho_{ki}}{s_{ki}}+x_l f_l\frac{\rho_{li}}{s_{li}}\Big)\Big)\Bigg]+$$

$$+\frac{3x_i x_k x_l(f_i^2 f_l F_{kl}{}_{22} Z_{ik}+f_k^2 f_i F_{il}{}_{22} Z_{lk}+f_l^2 f_k F_{ik}{}_{22} Z_{li})}{f_i^2 f_k^2 f_l^2 N_{ikl}}-$$

$$-\frac{9F_{ik}{}_{22}Z_{ik}}{N_{ikl}s_{ki}}\Big(\rho_{ki}f_l\frac{x_i x_k x_l}{f_i^2 f_k^2}+\rho_{ki}\frac{x_i^2 x_k}{f_i f_k^2}+\rho_{ik}\frac{x_i x_k^2}{f_i^2 f_k}\Big)-$$

$$-\frac{9F_{kl}{}_{22}Z_{kl}}{s_{kl}N_{ikl}}\Big(\rho_{lk}\frac{x_i x_k x_l}{f_k^2 f_l^2}f_i+\frac{x_k^2 x_l}{f_k f_l^2}\rho_{lk}-\rho_{kl}\frac{x_l^2 x_k}{f_k^2 f_l^2}\Big)-$$

$$-\frac{9F_{il}{}_{22}Z_{li}}{s_{li}N_{ikl}}\Big(\rho_{il}x_i x_l\Big(\frac{x_l}{f_i^2 f_l}+\frac{x_k f_k}{f_i^2 f_l^2}\Big)-\rho_{l,}\frac{x_i^2 x_l}{f_i f_l^2}\Big).$$

Denn ein kubischer Teiler ist in der Form: $u_{i}{}_{3}x_i^3+u_{k}{}_{3}x_k^3+$ $+u_{l}{}_{3}x_l^3+3x_i^2x_k u_{ik}{}_{2}+3u_{ik}{}_{2}x_i x_k^2+3u_{il}{}_{2}x_i^2x_l+3u_{il}{}_{2}x_i x_l^2+$ $+3u_{kl}{}_{2}x_k^2x_l+3u_{kl}{}_{2}x_l^2x_k+6u_{ikl}x_i x_k x_l$ darstellbar. P_1 und P_3 sind hier wieder den Polaren proportional. $P_1=x_i f_i+x_k f_k+x_l f_l$, $P_3=x_i^3 f_i{}_{3}+x_k^3 f_k{}_{3}+x_l^3 f_l{}_{3}+3x_l^2 x_i f_{li}{}_{2}+3x_l x_i^2 f_{li}{}_{2}+\cdots$

Den Wert für $(u_i{}_{3}-f_i{}_{3})$ findet man aus (E_1). Es wird, wenn folgende Abkürzungen eingeführt werden:

$$(\Gamma_1''')\qquad (f_i{}_{2}-u_i{}_{2})f_k^2=\nu_i{}_{2},\ (f_{ik}-u_{ik})=\nu_{ik}=$$

$$=\Big(W_{ik}{}_{33}-\frac{Z_{ki}F_{ik}{}_{22}}{N_{ikl}}+2\frac{a_{ik}Z_{ik}}{N_{ikl}}\frac{f_i f_k F_{ik}{}_{44}}{3F_{ik}{}_{22}}\Big):F_{ik}{}_{22}.$$

Digitized by Google

$$U_{\substack{33\\ik}} = \lambda_{ik} = F_{\substack{33\\ik}} - W_k f_i^3 - W_i f_k^3 + W_{\substack{ki\\2}} f_i^2 f_k + W_{\substack{ik\\2}} f_i f_k^2$$

$$U_i - U_k = \mu_{ik} = f_i f_k^3 - f_k f_i^3 + f_i^2 f_k f_{ik} - f_i f_k^2 f_{ik} - W_i f_k^3 +$$
$$+ W_k f_i^3 - W_{ik} f_i^2 f_k + W_{ik} f_i f_k^2,$$

wo aus den angegebenen Formeln für die W die Werte einzusetzen sind.

$$W_i = \frac{f_i^2 f_k^2}{2 f_k^3 F_{ik}^2}\left[\frac{f_i f_k F_{ik}}{15 F_{ik}} - F_{ik} + \right.$$

$$+ a_{ik}\left(\frac{3 F_{ik} F_{ik} - 5\left(F_{ik} - 3 F_{ik}\frac{Z_{ik}}{N_{ikl}}\right)\left(F_{ik} - 4\left(F_{ik} - 3 F_{ik}\frac{Z_{ik}}{N_{ikl}}\right)\frac{Z_{ik}}{N_{ikl}}\right)}{45 F_{ik}^3}\right.$$

$$+ \frac{F_{ik} F'_{ik}}{f_i f_k} + \frac{3 Z_{ki}}{N_{ikl}} \frac{F_{ik}}{f_i^3 f_k^3} a_{ik}\underline{\left(A_{ikl}\frac{F_{kl}}{s_{kl}} f_k^2 + \frac{A_{kli} F_{il}}{s_{li}} f_i^2\right) s_{ki} s_{li} s_{lk}} -$$
$$\underline{\qquad\qquad 2 f_i f_k f_l A_{ikl} f_l \qquad\qquad}$$

$$- \frac{a_{ik} F_{ik}^2 Z_{ki}}{2 N_{iki} f_i^2 f_k^2} - \frac{a_{ik}^2 f_{ik}}{6 f_i^2 f_k^2 F_{ik}} + \frac{a_{ik} f_{ik}}{f_i f_k}\underline{\frac{\left(F_{ik} - 3 F_{ik}\frac{Z_{ik}}{N_{ikl}}\right)}{3 F_{ik}}} -$$
$$\underline{\qquad\qquad}$$

$$- 3\rho_{ki}\underline{\left(A_{iki}\frac{F_{kl}}{s_{kl}} f_k^2 + A_{kli} f_i^2 \frac{F_{li}}{s_{li}}\right) s_{ki} s_{li} s_{lk}} \frac{F_{ik}^2}{f_i^2 f_k^2} +$$
$$\underline{\qquad\qquad f_i f_k f_l A_{ikl} s_{ki} f_l \qquad\qquad}$$

$$+ \frac{\left(F_{ik} - 4\frac{Z_{ik}}{N_{ikl}}\left(F_{ik} - 3 F_{ik}\frac{Z_{ik}}{N_{ikl}}\right)\right)}{2 F_{ik}}\left(\lambda_{ik} - \frac{F_{ik}^2}{f_i f_k}\right) -$$

$$- \frac{3}{2}\frac{F_{ik}}{f_i f_k}\left(\frac{Z_{ik}}{N_{ikl}}\mu_{ik} + \lambda_{ik} - \nu_{ik}\right) + \left(f_k f_i^2 - f_i f_k^2\right)\frac{a_{ik}}{2 f_i^2 f_k^2}\left(f_{ik} - \nu_{ik}\right)$$

$$\left. - \frac{Z_{ik} F_{ik}^2}{N_{ikl} f_i^2 f_k^2}\left(f_i f_k^2 - \nu_i\right) + 6\nu_i \frac{F_{ik}^2}{f_i^2 f_k^2}\cdot\left(f_{ik} - \nu_{ik}\right)\right]\cdot$$

Digitized by Google

Macht man die Annahme, daß ein Wertsystem bekannt sei, das einen kubischen Teiler verschwinden läßt, so ist derselbe aus der angegebenen Formel zu berechnen. Läßt das Wertsystem einen quadratischen oder linearen Faktor $= 0$ werden, so wird der vorgelegte Ausdruck unbestimmt, da A_{ikl} und A_{ikl} jeden quadratischen Faktor besitzen.
$\underset{2}{}$

Man verfährt, um die Teiler einer Form bis zum dritten Grade zu ermitteln so, daß man ein $x_2 = \xi_2$, $x_\nu = \xi_\nu$ setzt und die daraus für X_1 sich ergebende Gleichung $f = 0$ auflöst. Man erhält n Wertsysteme. $\xi_1^{(1)} \ldots \xi_{(\nu)} \ldots \xi_{(\,)}^{(n)} \ldots \xi_\nu$. Zunächst werden die ersten Polaren gebildet und es wird festgestellt, ob sie Teiler sind; bleiben noch Wertsysteme übrig, so bilde man den im § 4 angegebenen Ausdruck; sind quadratische Faktoren vorhanden, so müssen mindestens zwei der gebildeten Ausdrücke einander gleich sein. Bleiben noch mehr als drei Wertsysteme, so bilde man den hier gegebenen Komplex, der jedoch nur für Ternärformen gilt. Über eine einfachere Methode, die die Teiler einer Form, die den 7. Grad nicht übersteigt, siehe die oben erwähnte Dissertation.

§ 7.

Es mögen nun noch Ausdrücke gegeben werden, die jeden kubischen Teiler von f enthalten.

Daß für Ternärformen keine Aggregate, aus den vier ersten Ableitungen gebildet, existieren, ergab die Rechnung. Schon für Formen von vier Variablen müssen aber Komplexe dieser Art vorhanden sein, wie daraus ersichtlich, daß zur Elimination von 69 Unbekannten hier 70 Gleichungen vorliegen. Es werde nun so verfahren, daß aus zweien der Formeln (A_2) die Unbekannten entfernt werden:

$$\left.\begin{aligned} F_{ikl} &= 6\,(F_{ik}\,V_{ikl} + U_{ikl}\,V_{ik}) - 4\,(V_{kl}\,F_{ikl} + U_{ki}\,V_{ikl}) \\ F_{kli} &= 6\,(F_{kl}\,V_{kli} + U_{kli}\,V_{kl}) - 4\,(V_{lk}\,F_{kil} + U_{lk}\,V_{kil}) \end{aligned}\right\}.$$

Da die Relation:

$$3\,(V_{ikl}\,f_k\,f_l^2 - V_{kli}\,f_i^2\,f_l) = (2f_l^3\,V_{ik} - f_i^3\,V_{kl} - f_k^3\,V_{li})$$

besteht, so erhält man bei Benützung von (A_1) und (B_3):

$$\frac{F_{ikl}\,f_k\,f_l^2}{F_{ik}} - \frac{F_{kli}\,f_i^2\,f_l}{F_{kl}} = \frac{2\,(2f_l^3\,(F_{ik} - 10\,U_{ik}\,V_{ik})}{10\,F_{ik}} -$$

Digitized by Google

$$-f_k^3\frac{(F_{li}-10\,U_{li}\,V_{il})}{10\,F_{il}}-f_i^3\frac{(F_{kl}-10\,U_{kl}\,V_{kl})}{10\,F_{kl}}-$$

$$-\frac{4f_k f_l^2 F_{ikl}}{10F_{ik}^2}(F_{ki}-10\,U_{ki}\,V_{ik})+\frac{4F_{kil}f_i^2 f_l}{10F_{kl}^2}(F_{lk}-10\,U_{lk}\,V_{lk})+$$

$$+\frac{2V_{ik}f_k f_l^2}{F_{ik}^2F_{il}}(2F_{ikl}F_{il}U_{ik}-F_{ik}^2U_{li}-A_{ikl})-$$

$$-2f_i^2f_l\frac{V_{kl}(2F_{kil}F_{ik}U_{kl}-F_{kl}^2U_{ik}-A_{kli})}{F_{ik}F_{kl}}-$$

$$-\frac{2U_{ki}f_l}{F_{ik}}(V_{ik}f_l^2+V_{il}f_k^2-V_{kl}f_i^2)+$$

$$+\frac{2f_iU_{lk}}{F_{kl}}(V_{ik}f_l^2+V_{kl}f_i^2-V_{il}f_k^2).$$

Dies gibt, wenn alle Ausdrücke auf eine Seite gebracht werden:

$$15(F_{ikl}f_kf_l^2F_{kl}-F_{kli}f_i^2f_lF_{ik})F_{ik}^2F_{il}^2F_{kl}^2-6f_l^3F_{il}^2F_{ik}^2F_{kl}^3F_{ik}+$$

$$+3f_k^3F_{li}F_{il}F_{ik}^3F_{kl}^3+3f_i^3F_{kl}F_{il}^2F_{kl}^2F_{ik}^3+$$

$$+6f_kf_l^2F_{ikl}F_{ik}F_{il}^2F_{kl}^3F_{ki}-6f_i^2f_lF_{kil}F_{kl}^2F_{il}^2F_{ik}^3F_{lk}-$$

$$-5A_{ikl}F_{ik}F_{kl}^2\left[\left(f_k^2F_{il}-4\left(F_{li}-3\frac{Z_{li}F_{il}}{N_{ikl}}\right)\frac{Z_{li}}{N_{ikl}}\right)F_{ik}-\right.$$

$$\left.-f_l^2\left(F_{ik}-4\left(F_{ik}-3\frac{F_{ik}Z_{ik}}{N_{ikl}}\right)\frac{Z_{ik}}{N_{ikl}}\right)F_{il}\right]+$$

Digitized by Google

$$+5f_k f_l^2 F_{il}\,{}_{22} F_{kl}^3\,{}_{22} A_{ikl\,743}\left(F_{ik\,44} - 4\frac{Z_{ik}}{N_{ikl}}\left(F_{ik\,33} - 3F_{ik\,22}\frac{Z_{ik}}{N_{ikl}}\right)\right) -$$

$$-5f_i^2 f_l F_{ik}^2\,{}_{22} F_{il}^2\,{}_{22} A_{kli\,743}\left(F_{kl\,44} - 4\frac{Z_{kl}}{N_{ikl}}\left(F_{kl\,33} - 3F_{kl\,22}\frac{Z_{kl}}{N_{ikl}}\right)\right) = 0.$$

Da allgemein $f_{ikl\ldots} - uv_{ikl\ldots} = f_{ikl\ldots}$ gesetzt war, so enthält dieser Ausdruck, wenn die $f_{ikl\ldots}$ als Ableitungen gefaßt werden, jeden kubischen Teiler von f.

Durch Vertauschung der Indizes findet man entsprechende Bedingungen.

Inwieweit die in § 5 und § 7 aufgestellten Sätze die hinreichenden Bedingungen für die Existenz quadratischer oder kubischer Faktoren darstellen, soll hier nicht entschieden werden.

Digitized by Google

Sur une coïncidence bicubique.

Par **Lucien Godeaux** à Liège.

Dans cette note, nous nous proposons d'étudier une coïncidence représentée par l'évanouissement d'une matrice de formes biquaternaires; nous utilisons pour cela les méthodes de M. Stuyvaert.[1])

1. Designons par x_i, u_i $(i = 1, \ldots, 4)$ les coordonnées courantes respectivement ponctuelles et tangentielles, et représentons par

$$a_x u_\alpha$$

une forme doublement linéaire en x et en u.

La matrice dont l'évanouissement donne lieu à la coïncidence que nous voulons étudier est la suivante:

$$\left\| \begin{matrix} a_x u_\alpha & b_x u_\beta & c_x u_\gamma \\ a'_x u_\alpha, & b'_x u_\beta, & c'_x u_\gamma, \end{matrix} \right\| = 0. \tag{1}$$

Pour abréger le discours, nous désignerons cette coïncidence par la lettre M.

M est d'ordre et de classe trois, car si dans la matrice (1) nous supposons les u fixes, nous avons une cubique gauche; si au contraire ce sont les x qui sont constants, nous avons une développable de la troisième classe.

2. Aux plans d'une droite correspondent ∞^1 cubiques gauches engendrant une surface. Recherchons l'ordre d'une telle surface, la droite étant donnée par les plans de coordonnées v_i, w_i $(i = 1, \ldots, 4)$; les coordonnées d'un plan quelconque passant par la droite sont de la forme

$$k v_i + k' w_i \qquad (i = 1, \ldots, 4). \tag{2}$$

Il est evident que le nombre cherché est égal au nombre d'éléments point-plan dont le point se trouve sur une droite donnée et dont le plan passe par une autre droite; si y_i, z_i $(i = 1, \ldots, 4)$ sont les coordonnées de deux points de la première droite, un point quelconque aura pour coordonnées

$$\lambda y_i + \lambda' z_i \qquad (i = 1, \ldots, 4). \tag{3}$$

---

[1]) „Cinq Études de Géometrie Analytique". Gand, Librairie Van Goethem, 1908.

Digitized by Google

Aux coordonnées courantes substituons dans (1) les coordonnées (2) et (3). Il vient:

$$(4)\quad \begin{Vmatrix} (\lambda a_y + \lambda' a_z)(k v_\alpha + k' w_\alpha) & (\lambda b_y + \lambda' b_z)(k v_\beta + k' w_\beta) \\ (\lambda a'_y + \lambda' a'_z)(k v_{\alpha'} + k' w_{\alpha'}) & (\lambda b'_y + \lambda' b'_z)(k v_{\beta'} + k' w_{\beta'}) \end{Vmatrix}$$
$$\begin{Vmatrix} (\lambda c_y + \lambda' c_z)(k v_\gamma + k' w_\gamma) \\ (\lambda c'_y + \lambda' c'_z)(k v_{\gamma'} + k' w_{\gamma'}) \end{Vmatrix} = 0.$$

Faisons les substitutions

$$\lambda = \sigma\rho_1,\ \lambda' = \sigma\rho_3,\ k = \tau\rho_2,\ k' = \tau\rho_3,$$

σ et τ étant des facteurs convenablement choisis. La matrice (4) devient:

$$\begin{Vmatrix} (\rho_1 a_y + \rho_3 a_z)(\rho_2 v_\alpha + \rho_3 w_\alpha) & (\rho_1 b_y + \rho_3 b_z)(\rho_2 v_\beta + \rho_3 w_\beta) \\ (\rho_1 a'_y + \rho_3 a'_z)(\rho_2 v_{\alpha'} + \rho_3 w_{\alpha'}) & (\rho_1 b'_y + \rho_3 b'_z)(\rho_2 v_{\beta'} + \rho_3 w_{\beta'}) \end{Vmatrix}$$
$$\begin{Vmatrix} (\rho_1 c_y + \rho_3 c_z)(\rho_2 v_\gamma + \rho_3 w_\gamma) \\ (\rho_1 c'_y + \rho_3 c'_z)(\rho_2 v_{\gamma'} + \rho_3 w_{\gamma'}) \end{Vmatrix} = 0.$$

Cette matrice s'annule pour douze systèmes de valeurs des ρ, mais il faut en décompter trois fois le système $(\rho_1 = \rho_3 = 0)$ et trois fois le système $(\rho_2 = \rho_3 = 0)$.

Aux plans passant par une droite correspondent les points d'une surface du sixième ordre.

3. Recherchons le lieu des points tels que les développables qui leur correspondent aient deux de leurs plans passant par la droite commune aux deux plans de coordonnées v_i et w_i $(i = 1, \ldots, 4)$. Si ω est une variable, il faut exprimer que les équations suivantes ont deux solutions $\frac{k}{k'}$ communes:

$$a_x(k v_\alpha + k' w_\alpha) + \omega a'_x(k v_{\alpha'} + k' w_{\alpha'}) = 0$$
$$b_x(k v_\beta + k' w_\beta) + \omega b'_x(k v_{\beta'} + k' w_{\beta'}) = 0$$
$$c_x(k v_\gamma + k' w_\gamma) + \omega c'_x(k v_{\gamma'} + k' w_{\gamma'}) = 0.$$

On a

$$\begin{Vmatrix} a_x v_\alpha & a_x w_\alpha & a'_x v_{\alpha'} & a'_x w_{\alpha'} \\ b_x v_\beta & b_x w_\beta & b'_x v_{\beta'} & b'_x w_{\beta'} \\ c_x v_\gamma & c_x w_\gamma & c'_x v_{\gamma'} & c'_x w_{\gamma'} \end{Vmatrix} = 0.$$

Donc: Le lieu des points qui correspondent à la fois à deux plans passant par une droite fixe est une courbe gauche d'ordre six et de genre trois.

Digitized by Google

4. Recherchons le nombre de cubiques gauches passant par un point fixe $(y_i,\ i=1,\ldots,4)$ et rencontrant une seconde fois une droite passant par ce point et par un second point $(z_i,\ i=1,\ldots,4)$.

La condition pour que la cubique gauche passe par le point (y_i) est

$$\left\| \begin{matrix} a_y u_\alpha & b_y u_\beta & c_y u_\gamma \\ a'_y u_{\alpha'} & b'_y u_{\beta'} & c'_y u_{\gamma'} \end{matrix} \right\| = 0. \tag{5}$$

La condition pour que la cubique gauche ait une bisécante $(y_i,\ z_i)$ est exprimée par

$$\left\| \begin{matrix} a_y u_\alpha & a'_y u_{\alpha'} & a_z u_\alpha & a'_z u_{\alpha'} \\ b_y u_\beta & b'_y u_{\beta'} & b_z u_\beta & b'_z u_{\beta'} \\ c_y u_\gamma & c'_y u_{\gamma'} & c_z u_\gamma & c'_z u_{\gamma'} \end{matrix} \right\| = 0. \tag{6}$$

Les équations (5) et (6) représentent un nombre fini de plans (u) qui est le nombre cherché. Les matrices (5) et (6) s'annulent respectivement par les plans d'une développable de troisième classe et d'une développable de sixième classe et de genre trois. Ces développables appartiennent à deux surfaces de troisième classe dont elles forment l'intersection, donc: Il y a huit cubiques gauches passant par un point fixe et remontant une seconde fois une droite passant par ce point.

5. Occuppons nous des cubiques dégénérées. Les plans auxquels correspondent ces cubiques enveloppent une surface dont nous allons rechercher la classe. Désignons par

$$[u_\alpha u_\beta u_\gamma u_{\alpha'} (a\,b\,c\,a')], \ldots$$

les déterminants

$$\begin{vmatrix} a_1 u_\alpha & a_2 u_\alpha & a_3 u_\alpha & a_4 u_\alpha \\ b_1 u_\beta & b_2 u_\beta & b_3 u_\beta & b_4 u_\beta \\ c_1 u_\gamma & c_2 u_\gamma & c_3 u_\gamma & c_4 u_\gamma \\ a'_1 u_{\alpha'} & a'_2 u_{\alpha'} & a'_3 u_{\alpha'} & a'_4 u_{\alpha'} \end{vmatrix}, \ldots$$

Exprimons que l'invariant de la cubique gauche correspondant à un plan (u) est nul.[1])

$$\begin{vmatrix} u_\alpha u_\beta u_\gamma u_{\alpha'} (a\,b\,c\,a') & u_\alpha u_\beta u_{\alpha'} u_{\gamma'} (a\,b\,a'\,c') - u_\alpha u_\gamma u_{\alpha'} u_{\beta'} (a\,c\,a'\,b') \\ u_\alpha u_\beta u_\gamma u_{\beta'} (a\,b\,c\,b') & u_\alpha u_\gamma u_{\alpha'} u_{\beta'} (a\,c\,a'\,b') - u_\alpha u_\beta u_{\beta'} u_{\gamma'} (a\,b\,b'\,c') \\ u_\alpha u_\beta u_\gamma u_{\gamma'} (a\,b\,c\,c') & u_\beta u_\gamma u_{\beta'} u_{\gamma'} (b\,c\,b'\,c') - u_\beta u_\gamma u_{\alpha'} u_{\gamma'} (b\,c\,a'\,c') \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} u_\alpha u_{\alpha'} u_{\beta'} u_{\gamma'} (a\,a'\,b\,c') \\ u_\beta u_{\alpha'} u_{\beta'} u_{\gamma'} (b\,a'\,b\,c') \\ u_\gamma u_{\alpha'} u_{\beta'} u_{\gamma'} (c\,a\,b'\,c') \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

[1]) Stuyvaert, Sur l'invariantologie de la cubique gauche. Bull. de l'Acad. R. de Belgique — 1907.

Digitized by Google

Les plans auxquels correspondent des cubiques gauches dégénérées enveloppent une surface de classe douze.

Une cubique dégénère en une droite et une conique. Le plan de cette conique a pour équation, moyennant (7).

$$\begin{vmatrix} u_\alpha u_\beta u_\gamma u_{\alpha'} (a\,b\,c\,a') & u_\alpha u_{\alpha'} u_{\beta'} u_{\gamma'} (a\,a'\,b'\,c') & a_x \\ u_\alpha u_\beta u_\gamma u_{\beta'} (a\,b\,c\,b') & u_\beta u_{\alpha'} u_{\beta'} u_{\gamma'} (b\,a'\,b'\,c') & b_x \\ u_\alpha u_\beta u_\gamma u_{\gamma'} (a\,b\,c\,c') & u_\gamma u_{\alpha'} u_{\beta'} u_{\gamma'} (c\,a'\,b'\,c') & c_x \end{vmatrix} = 0.$$

Recherchons l'enveloppe de ces plans lorsque (u) enveloppe (7). Il faut rechercher le nombre de plans (u) qui satisfait à l'équation (7) et aux équations

$$\left\| \begin{matrix} u_\alpha u_\beta u_\gamma u_{\alpha'} (a\,b\,c\,a') & u_\alpha u_{\alpha'} u_{\beta'} u_{\gamma'} (a\,a'\,b'\,c') & a_y & a_z \\ u_\alpha u_\beta u_\gamma u_{\beta'} (a\,b\,c\,b') & u_\beta u_{\alpha'} u_{\beta'} u_{\gamma'} (b\,a'\,b'\,c') & b_y & b_z \\ u_\alpha u_\beta u_\gamma u_{\gamma'} (a\,b\,c\,c') & u_\gamma u_{\alpha'} u_{\beta'} u_{\gamma'} (c\,a'\,b'\,c') & c_y & c_z \end{matrix} \right\| = 0.$$

Ces dernières représentent une développable de classe 33, le nombre de solutions est donc 396.

Les plans des coniques qui font partie des cubiques gauches dégénérées enveloppent une surface de classe 396.

6. Au moyen des calculs développés dans le dernier travail cité de M. Stuyvaert, on pourait établir les théorèmes suivants, que nous nous contenterons d'énoncer.

Le lieu des plans (u) auxquels correspondent des cubiques gauches tangentes à un plan donné, est une surface de classe six.

Le lieu des plans (u) auxquels correspondent des cubiques gauches osculant un plan fixe, est une développable de classe vingt-sept.

Digitized by Google

Eine Bemerkung über indefinite Variationsprobleme.

Von **Philipp Frank** in Wien.

Wir nennen das Variationsproblem, die Punkte A und B der Ebene durch eine Kurve

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

zu verbinden, die das Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y')\, dt$$

zu einem Minimum oder Maximum macht, in einem Gebiete der Ebene definit, wenn für jeden Punkt x, y des Gebietes und jedes Wertepaar x', y' (außer $x' = y' = 0$)

$$F(x, y, x', y') \neq 0$$

ist. Wir nennen das Problem in einem Gebiete indefinit, wenn zu jedem Punkt x, y des Gebietes mindestens ein Wertepaar x_0', y_0' gehört, so daß mindestens eines der beiden von Null verschieden und

$$F(x, y, x_0', y_0') = 0$$

ist. —

Die Theorie der definiten Probleme ist durch die Arbeit von Caratheodory[1]) zu einem gewissen Abschluß gelangt. Über indefinite Probleme hat er[2]) den wichtigen Satz bewiesen, daß bei einem solchen, wenn durch einen Punkt auch nur eine einzige starke Extremale geht, sich die Frage der Verteilung der starken und schwachen Extremalen in der Umgebung dieses Punktes auf die analoge Frage bei einem definiten Problem zurückführen läßt. Das Interesse konzentriert sich daher auf jene indefiniten Probleme, bei denen es gar keine starken Extremalen gibt, und auf die Merkmale solcher Probleme.

Während bei definiten Problemen durch jeden Punkt sicher starke Extremalen gehen, ist bei indefiniten schon lange ein Typus bekannt, wo das nicht der Fall ist, nämlich der Fall, wo

$$F(x, y, -x', -y') = -F(x, y, x', y'), \tag{1}$$

[1]) Math. Ann., Bd. 62.
[2]) l. c. § 1.

Digitized by Google

wo also, wie wir kurz sagen wollen, F eine ungerade Funktion ist. Der Zweck dieser Zeilen ist, diesem Typus von Problemen gewissermaßen ein Gegenstück gegenüberzustellen. Es können nämlich auch keine starken Extremalen existieren, wenn

$$F(x, y, -x', -y') = F(x, y, x', y'), \tag{2}$$

also F eine gerade Funktion ist. Der Fall (1) tritt nur bei indefiniten Problemen auf, während der Fall (2) auch bei definiten auftritt, wo gerade die am häufigsten behandelten geometrischen und mechanischen Probleme von dieser Art sind.

Jede beliebige positiv homogene Funktion $F(x, y, x', y')$ läßt sich additiv in einer und nur einer Weise aus einer Funktion vom Typus (1) und einer vom Typus (2) zusammensetzen.

Ich brauche bloß zu setzen:

$$U(x, y, x', y') = \frac{F(x, y, x', y') - F(x, y, -x', -y')}{2}$$

$$G(x, y, x', y') = \frac{F(x, y, x', y') + F(x, y, -x', -y')}{2},$$

so ist

$$F(x, y, x', y') = U(x, y, x', y') + G(x, y, x', y'). \tag{3}$$

U ist vom Typus (1) und G vom Typus (2) und beide positiv homogen. Falls $F(x, y, x', y')$ in einem Gebiete indefinit ist, existiert eine einparametrige Schar von Kurven, längs denen F verschwindet; diese wollen wir die Nullkurven[1]) des Problems nennen.

Der Satz, den wir beweisen wollen, ist folgender:

Wenn die Funktion $F(x, y, x', y')$ in einem Gebiete indefinit ist, so können dort starke Extremalen nur dann existieren, wenn der gerade Teil (G) und der ungerade Teil (U) wirklich beide vorhanden sind und voneinander verschiedene Nullkurven besitzen. Eine Ausnahme könnten nur die Nullkurven von F selbst bilden.

Diese Verhältnisse sind, wie man sieht, wesentlich von den bei definiten Problemen herrschenden verschieden, wo immer starke Extremalen existieren, unabhängig von der Zusammensetzung aus geradem und ungeradem Teil. Am einfachsten sieht man den Unterschied am Problem:

$$F(x, y, x', y') = +\sqrt{E x'^2 + 2 F x' y' + G y'^2},$$

wo E, F, G Funktionen von x und y sind. In einem Gebiete, wo

$$E G - F^2 > 0,$$

[1]) Nach G. Landsberg, Math. Ann., Bd. 65.

Digitized by Google

ist das Problem definit, wir haben das einfache Problem der geodätischen Linien vor uns.

In einem Gebiete, wo

$$EG - F^2 \leqq 0,$$

ist das Problem indefinit. Herr Landsberg[1]) hat den Gesamtverlauf der Extremalen untersucht. Nach unserem Satze sind auch, was die Minimaleigenschaften betrifft, diese Probleme von den geodätischen Linien sehr verschieden, keine Extremale kann ein starkes Minimum liefern, denn $F(x, y, x', y')$ ist eine gerade Funktion.

Der Beweis für unseren Satz ließe sich genau so führen, wie ich in einer früheren Arbeit[2]) die Nichtexistenz stetiger Lösungen bei gewissen Variationsproblemen gezeigt habe. Doch will ich an Stelle des dortigen mehr anschaulichen Beweises hier einen mehr analytischen führen, so daß die Bedingungen seiner Gültigkeit besser durchscheinen.

Es seien x, y, x', y' die Koordinaten des Linienelements einer Extremalen, wo x, y dem Gebiete angehören, in dem $F(x, y, x', y')$ indefinit ist. Dann gibt es sicher ein Wertepaar x'_0, y'_0, so daß

$$F(x, y, x'_0, y'_0) = 0.$$

Damit die Extremale ein starkes Minimum liefert, ist notwendig, daß

$$E(x, y, x', y'; \bar{x}', \bar{y}') \geqq 0$$

für alle Linienelemente der Extremale und alle Wertsysteme $\bar{x}', \bar{y}'$, die nicht der Bedingung $x'\bar{y}' - \bar{x}'y' = 0$ genügen. Nun ist:

$$E(x, y, x', y'; x'_0, y'_0) = F(x, y, x'_0, y'_0) - \\ - \left[x'_0 F_{x'}(x, y, x', y') + y'_0 F_{y'}(x, y, x', y')\right]$$

$$E(x, y, x', y'; -x'_0, -y'_0) = F(x, y, -x'_0, -y'_0) + \\ + \left[x'_0 F_{x'}(x', y') + y'_0 F_{y'}(x', y')\right].$$

Wir setzen nun voraus:

a) Das Extremalelement x', y' ist nicht Element einer Nullkurve,

b) das Nullkurvenelement x'_0, y'_0 liege nicht transversal zur Extremalen x', y'.

Dann ist

$$x'_0 F_{x'}(x', y') + y'_0 F_{y'}(x' y') = M \neq 0.$$

---

[1]) l. c.

[2]) Math. Ann., Bd. 64, p. 246 ff. Auch für die hier vorkommende Funktion φ muß die Voraussetzung $\varphi(x, y, -x', -y') = \varphi(x, y, x', y')$ gemacht werden.

Digitized by Google

Ferner laut Voraussetzung

$$F(x, y, x'_0, y'_0) = 0,$$

woraus, wenn $U(x, y, x', y') \equiv 0$ oder $G(x, y, x', y') \equiv 0$ ist, auch folgt:

$$F(x, y, -x'_0, -y'_0) = 0.$$

Daher

$$E(x, y, x', y'; \quad x'_0, \quad y'_0) = -M$$

$$E(x, y, x', y'; -x'_0, -y'_0) = +M.$$

Die E-Funktion ist also in jedem Extremalenelement verschiedener Vorzeichen fähig, ein starkes Minimum könnte also höchstens von einer Extremale geliefert werden, längs der die Voraussetzung *a*) oder *b*) nicht erfüllt ist.

Wenn eine Extremale aber zur Schar der Nullkurven transversal liegt, läßt sich immer, wie in meiner früheren Arbeit[1]) gezeigt ist, eine Kurve ziehen, die denselben Integralwert liefert wie die Extremale.

Ein starkes Minimum könnte also höchstens eine Nullkurve selbst liefern, der ganze Beweis läßt sich auch noch führen, wenn die Nullkurven des geraden und des ungeraden Teiles von F zusammenfallen. Denn dann folgt aus

$$G(x, y, x'_0, y'_0) = 0$$

und

$$U(x, y, x'_0, y'_0) = 0$$

sowohl

$$F(x, y, x'_0, y'_0) = 0 \quad \text{als auch}$$

$$F(x, y, -x'_0, -y'_0) = G(x, y, -x'_0, -y'_0) + U(x, y, -x'_0, -y'_0) =$$

$$= G(x, y, \quad x'_0, \quad y'_0) - U(x, y, \quad x'_0, \quad y'_0) = 0,$$

worauf wie oben geschlossen werden kann. Zu dieser Gattung von Problemen gehört z. B.

$$F(x, y, x', y') = x' - y' + \sqrt{x'^2 - y'^2}.$$

Schließlich sei noch erwähnt, daß Bolza[2]) in seinem Lehrbuche ein gerades indefinites $F(x, y, x', y')$ diskutiert, nämlich:

$$F(x, y, x', y') = +\sqrt{y}\sqrt{x'^2 - y'^2}.$$

[1]) l. c. p. 247.
[2]) Lehrbuch der Variationsrechnung, Kap. I, § 6, p. 34.

Digitized by Google

Aus unserem Satze folgt, daß die Extremalen des Problems (Parabeln) überhaupt keine starken Minima liefern können. Ein ganz ähnliches Beispiel habe ich in meiner oben zitierten Arbeit als Typus eines Problems mit einer Differentialungleichung behandelt.

Für solche indefinite Probleme, bei denen das Integral J nicht negativ werden kann, überzeugt man sich von der Richtigkeit des bewiesenen Satzes leicht und anschaulich durch Betrachtung der Caratheodoryschen Indikatrix.[1]) Dieselbe besitzt nämlich sicher zwei reelle Asymptotenrichtungen, die einen gestreckten Winkel miteinander einschließen, also auch zwei sich längs derselben ins Unendliche erstreckende Kurvenstücke. Jede in irgend einem Punkte der Indikatrix gezogene Tangente muß nun offenbar eines dieser Stücke schneiden. Eine Stütztangente kann nicht existieren, also auch keine starke Extremale.

Wenn auch die indefiniten geraden Variationsprobleme in der mathematischen Physik keine so wichtige Rolle spielen wie die definiten, gibt es doch auch für sie Beispiele. Wir betrachten die Bewegung eines materiellen Punktes längs einer Geraden, die wir zur y-Achse wählen. Die Zeit bezeichnen wir mit x. Dann läßt sich die ganze Bewegung durch Zeichnung einer Zeit-Wegkurve in der x, y Ebene darstellen. Wir führen nun mit Minkowski[2]) den Begriff der „Eigenzeit" ein. Seien

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

die Gleichungen der Zeit-Wegkurve in Parameterform. Zur Zeit x_1 befinde sich der bewegliche Punkt im Punkte y_1, zur Zeit x_2 in y_2 und es sei

$$x_1 = x(t_1) \qquad x_2 = x(t_2)$$
$$y_1 = y(t_1) \qquad y_2 = y(t_2).$$

Dann bezeichnen wir als die Eigenzeit der Bewegung des materiellen Punktes, die durch das Stück der gezeichneten Zeit-Wegkurve zwischen den Punkten t_1 und t_2 derselben dargestellt ist, das Integral

$$\tau_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 - y'^2}\, dt$$

längs der Zeit-Wegkurve genommen. Dabei muß die Längen- und Zeiteinheit so gewählt sein, daß der Lichtgeschwindigkeit der Wert 1 zukommt.

Es liege nun folgendes Problem vor: Wir wissen, daß sich ein materieller Punkt zur Zeit x_1 in y_1, zur Zeit x_2 in y_2 befindet; wie muß er sich in der Zwischenzeit bewegen, damit die Eigenzeit,

[1]) Caratheodory l. c. § 2.

[2]) Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. Göttinger Nachr. 1908, p. 100.

Digitized by Google

die er benötigt, ein Maximum wird? Die Extremalen des Integrals sind Gerade. Da nun unser Integral τ_{12} ein gerades indefinites Variationsproblem darstellt, liefern die Extremalen sicher nur schwache Maxima, d. h. die gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \alpha$ ist diejenige mit der längsten Eigenzeit unter allen, deren Geschwindigkeit genügend wenig von α abweicht. Doch kann man immer Zeit-Wegkurven angeben, die in der Umgebung der genannten Geraden verlaufen und denen ein größerer Wert der Eigenzeit entspricht; nur weicht die Geschwindigkeit solcher Bewegungen teilweise wesentlich von α ab.

Digitized by Google

Über Bolzas fünfte notwendige Bedingung in der Variationsrechnung.

Von **Hans Hahn** in Wien.

Die Theorie der für ein starkes Minimum hinreichenden Bedingungen beim einfachsten Problem der Variationsrechnung gestaltet sich verschieden, je nachdem es sich um das Problem in Parameterdarstellung handelt, oder eine der beiden Veränderlichen als „unabhängig" bevorzugt wird. Im ersten Falle, den Weierstraß in seinen Vorlesungen behandelte, ist ein Integral der Form:

$$\int F(x, y;\ x', y')\, dt \tag{1}$$

zum Minimum zu machen, wobei die Funktion $F(x, y; x', y')$ als positiv homogen[1]) von erster Ordnung in x', y' vorauszusetzen ist; hier bewies Weierstraß: Jeder Extremalenbogen, der kein singuläres Element der Lagrangeschen Gleichung und keine zwei zueinander konjugierten Punkte enthält, auf dem ferner die E-Funktion für alle Richtungen einerlei Zeichen hat und nur in ordentlicher Weise verschwindet,[2]) liefert ein starkes Minimum des Integrals (1). Im zweiten Falle, wo es sich um ein Integral der Form:

$$\int f(x, y; y')\, dx \tag{2}$$

handelt, verliert der angeführte Weierstraßsche Satz seine Gültigkeit, wie zuerst O. Bolza am Integral:

$$\int_0^1 (a y'^2 - 4 b y y'^3 + 2 b x y'^4)\, dx \qquad (a > 0,\ b > 0) \tag{3}$$

zeigte:[3]) Die Extremale $y = 0$ genügt allen Bedingungen des Weierstraßschen Satzes, ohne das Integral (3) zu einem Minimum zu machen. Es gelang Bolza weiterhin, eine neue (fünfte) für ein

[1]) Wegen der Bezeichnung „positiv homogen" siehe etwa O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung (1908), S. 194.

[2]) Wegen dieser von A. Kneser eingeführten Ausdrucksweise siehe Bolza l. c. S. 120.

[3]) Am. Bull. (2), Bd. 9 (1902), S. 9. Ein noch einfacheres Beispiel gab sodann C. Carathéodory in einer Besprechung von Bolzas Lectures on the calculus of variations. Arch. Math. Phys. (3), Bd. 10, S. 185.

Digitized by Google

Minimum des Integrals (2) notwendige Bedingung aufzustellen,[1]) die wir nun zunächst angeben wollen.

Es sei ein Bogen e_0 einer Extremale des Integrals (2) gegeben; (x_1, y_1) sei sein Anfangspunkt, (x_2, y_2) sein Endpunkt; mit (x_3, y_3) werde ein beliebiger Punkt des Bogens e_0 bezeichnet. Die durch den Punkt (x_1, y_1) hindurchgehenden, dem Bogen e_0 hinlänglich benachbarten Extremalen bilden ein (uneigentliches) Feld des Bogens e_0 und dasselbe gilt für die durch (x_2, y_2) hindurchgehenden Extremalen; seien:

$$y = y_1(x, a_1), \qquad y = y_2(x, a_2)$$

die Gleichungen der beiden diese Felder bildenden Extremalenscharen; seien weiter

$$a_1 = a_1(x, y), \qquad a_2 = a_2(x, y)$$

die Parameter der durch den Punkt (x, y) des Feldes gehenden Extremale der ersten, bezw. der zweiten Schar. Wir setzen:

$$p_1(x, y) = y_1'[x, a_1(x, y)], \qquad p_2(x, y) = y_2'[x, a_2(x, y)].$$

Ferner sei:

$$\varepsilon_1 = -1, \qquad \varepsilon_2 = +1$$

und

$$S_i(h, k, x_3) = \int_0^1 h f\left(x_3 + \varepsilon_i h t, y_3 + \varepsilon_i k t, \frac{k}{h}\right) dt \quad (i = 1, 2).$$

Die Bolzasche Bedingung lautet nun: Damit der Extremalenbogen e_0 ein Minimum des Integrals (2) liefere, ist notwendig, daß für jedes der Ungleichung $x_1 < x_3 < x_2$ genügende x_3 die Ungleichung:

$$(4) \quad \lim_{h=+0} S_i(h, k, x_3) - k\int_0^1 f_{y'}\left(x_3, y_3 + \varepsilon_i k t, p_i(x_3, y_3 + \varepsilon_i k t)\right) dt \geqq 0$$

bestehe für alle genügend kleinen Werte von $|k|$, und zwar für $i = 1$ und $i = 2$; daß weiter für $(x_3, y_3) = (x_1, y_1)$ diese Ungleichung bestehe für $i = 2$, im Falle $(x_3, y_3) = (x_2, y_2)$ aber für $i = 1$. Dabei bedeutet $\lim_{h=+0}$ die rechtsseitige untere Grenze für $h = 0$.

Hieran knüpft sich nun die Frage,[2]) ob die Bedingung (4), etwa nach Weglassung des Gleichheitszeichens, zusammen mit den übrigen notwendigen Bedingungen für ein Minimum des Integrals (2) hinreicht. Wir wollen zeigen, daß dies nicht der Fall ist, d. h. wir wollen beweisen:

---

[1]) Am. Trans. Bd. 7 (1906), S. 314.
[2]) Bolza, Vorl., S. 118.

Digitized by Google

Es kann vorkommen, daß ein Kurvenbogen $y = y(x)$

I. der Lagrangeschen Gleichung genügt:

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0;$$

II. daß für alle seine Elemente die Ungleichung besteht:

$$f_{y'y'}[x, y(x), y'(x)] > 0;$$

III. daß er den zu seinem Anfangspunkt konjugierten Punkt nicht enthält;

IV. daß in allen seinen Punkten für alle von $y'(x)$ verschiedenen Werte von $\bar{y}'$ die Ungleichung besteht:

$$E(x, y(x), y'(x), \bar{y}') = f(x, y(x), \bar{y}') -$$

$$- f(x, y(x), y'(x)) - (\bar{y}' - y'(x)) f_{y'}(x, y(x), y'(x)) > 0;$$

V. daß in allen seinen Punkten die Ungleichung (4) mit Hinweglassung des Gleichheitszeichens besteht;

und daß dieser Kurvenbogen trotzdem kein Minimum des Integrals (2) liefert.

Für den Integranden von (2) wählen wir die Funktion:

$$(5) \qquad f(x, y, y') = y'^2 + (y - ax)(y - bx) y'^4 \quad (a > b > 0).$$

Man erkennt sofort, daß die Geraden $y = \text{const.}$ die Lagrangesche Gleichung befriedigen. Für den Extremalenbogen e_0 wählen wir speziell das von 0 bis 1 reichende Stück der Geraden $y = 0$. Die Extremalen $y = \text{const.}$ bilden ein Feld des Bogens e_0, ein bekannter Satz der Variationsrechnung zeigt daher, daß dieser Bogen keine zwei zueinander konjugierten Punkte enthält, so daß Bedingung III erfüllt ist. Ferner haben wir auf unserem Bogen e_0:

$$f_{y'y'}(x, y, \bar{y}') = 2 + 12\, ab\, x^2 \bar{y}'^2.$$

Dieser Ausdruck ist > 0 für alle $\bar{y}'$, so daß nicht nur Bedingung II, sondern — wieder nach einem bekannten Satze — auch Bedingung IV erfüllt ist.

Wir gehen daran, nachzuweisen, daß auch Bedingung V erfüllt ist. Beachten wir, daß

$$(y - ax) \cdot (y - bx) > 0$$

ist für alle Punkte (x, y) von positiver Abszisse, deren Koordinaten nicht den Ungleichungen genügen:

$$(6) \qquad bx \leqq y \leqq ax;$$

Digitized by Google

für alle solchen Punkte ist daher:

$$f(x, y, y') > y'^2.$$

Sei nun zunächst $0 < x_3 \leqq 1$. Wir setzen:

$$k_0 = b.x_3$$

und erkennen, daß für $|k| < k_0$ und positive h die Ungleichung gilt:

$$S_i(h, k, x_3) \geqq \frac{k^2}{h}$$

und somit ist für alle $|k| < k_0$:

$$\lim_{h=+0} S_i(h, k, x_3) = +\infty. \tag{7}$$

Ist hingegen $x_3 = 0$ und k beliebig, so liegen, sobald $0 < h < a.|k|$ ist, gewiß sämtliche Punkte der Geraden:

$$x = ht,\ y = kt$$

außerhalb des durch die Ungleichungen (6) gegebenen Gebietes; für $h < a|k|$ ist daher wieder:

$$S_i(h, k, 0) \geqq \frac{k^2}{h},$$

so daß Gleichung (7) auch für $x_3 = 0$ (und alle k) gilt.

Ist nun weiter zunächst $0 < x_3 < 1$, so bleiben gewiß für alle hinreichend kleinen $|y|$ die Ausdrücke $p_1(x_3, y)$ und $p_2(x_3, y)$ zwischen endlichen Grenzen; für $x_3 = 0$ gilt dies von $p_2(0, y)$, für $x_3 = 1$ von $p_1(x, y)$. Wir schließen daraus, daß zu jedem gegebenen, der Ungleichung $0 < x_3 < 1$ genügenden Wert von x_3 sich eine Konstante k_1 so bestimmen läßt, daß das Integral:

$$\int_0^1 f_{y'}\left(x_3, \varepsilon_i k t, p_i(x_3, \varepsilon_i k t)\right) dt$$

zwischen endlichen Grenzen liegt für alle $|k| < k_1$ und für $i = 1$ und $i = 2$; ist $x_3 = 0$, so gilt dies für $i = 2$, ist $x_3 = 1$, so für $i = 1$.

Berücksichtigt man Gleichung (7), so folgt nun: Zu jedem gegebenen der Ungleichung $0 < x_3 < 1$ genügenden Wert von x_3 läßt sich eine Konstante K bestimmen, so daß für alle $|k| < K$:

$$\lim_{h=+0} S_i(h, k, x_3) - k \int_0^1 f_{y'}\left(x_3, \varepsilon_i k t, p_i(x, \varepsilon_i k t)\right) dt = +\infty \tag{8}$$

für $i = 1$ und $i = 2$; ist $x_3 = 0$, so gilt dies für $i = 2$, ist $x_3 = 1$, so für $i = 1$. Die Bedingung V ist also auf unserem Extremalenbogen e_0 auch bei Weglassung des Gleichheitszeichens erfüllt.

Digitized by Google

Wir gelangen zum Nachweise, daß unser Extremalenbogen e_0 kein Minimum des Integrals

$$(9) \qquad \int_0^1 [y'^2 + (y - ax)(y - bx)\, y'^4]\, dx$$

liefert. Wir wählen einen Punkt (x_0, y_0) von positiver Abszisse so, daß:

$$y_0 = \frac{a + 2b}{3} x_0,$$

legen durch ihn die Gerade

$$(10) \qquad y = y_0 + \frac{1}{x_0^2}(x - x_0)$$

und erstrecken unser Integral über diese Gerade von der Abszisse x_0 bis zur Abszisse $x_0 + \frac{a - b}{3} x_0^3$. Um dieses Integral abzuschätzen, bemerken wir, daß für alle Punkte (x, y) des zwischen den genannten Abszissen liegenden Stückes der Geraden (10) die Ungleichungen bestehen:

$$\frac{a + 2b}{3} x \leqq y \leqq \frac{2a + b}{3} x,$$

woraus man weiter für diese Punkte die Ungleichung herleitet:

$$(y - ax)(y - bx) < -\frac{(a - b)^2}{9} x_0^2.$$

Wir erhalten also für unser Integral:

$$\int_{x_0}^{x_0 + \frac{a-b}{3} x_0^3} f\left(x, y_0 + \frac{1}{x_0^2}(x - x_0), \frac{1}{x_0^2}\right) dx \leqq \frac{a - b}{3} \cdot \frac{1}{x_0} - \frac{(a - b)^3}{27} \frac{1}{x_0^3}.$$

Der Limes dieses Integrals für $x_0 = 0$ ist daher $-\infty$.

Wir wollen nun das Integral (9) erstrecken über folgende Vergleichskurve: Von $x = 0$ bis $x = x_0$ falle sie zusammen mit der Geraden:

$$(11) \qquad y = \frac{a + 2b}{3} x$$

von $x = x_0$ bis $x = x_0 + \frac{a - b}{3} x_0^3$ mit der Geraden (10), von $x = x_0 + \frac{a - b}{3} x_0^3$ bis $x = 1$ mit der Geraden:

$$(12) \qquad y = \frac{(2a + b)\, x_0}{(a - b)\, x_0^3 + 3x_0 - 3}(x - 1).$$

Digitized by Google

Wir zerlegen dementsprechend unser Integral in die drei Bestandteile:

$$\int_0^{x_0} + \int_{x_0}^{x_0+\frac{a-b}{3}x_0^3} + \int_{x_0+\frac{a-b}{3}x_0^3}^{1}. \tag{13}$$

Lassen wir nun x_0 gegen Null konvergieren, so nähert sich die Vergleichskurve unbegrenzt dem Extremalenbogen e_0. Dabei nähern sich in (13) das erste und das dritte Integral der Grenze Null. In der Tat konvergiert im ersten Integral das Integrationsintervall gegen Null; der Integrand hingegen bleibt zwischen endlichen Grenzen, da auf der Geraden (10) fortwährend $y' = \frac{a+2b}{3}$ ist. Im dritten Integral konvergiert der Integrand mit x_0 gleichmäßig im ganzen Integrationsintervall gegen Null, wie man aus (12) entnimmt. Da nun, wie oben gezeigt, das zweite Integral in (13) gegen $-\infty$ geht, wenn x_0 sich der Null nähert, so sehen wir: Während sich unsere Vergleichskurve unbegrenzt unserem Extremalenbogen $y = 0$ nähert, nähert sich das über die Vergleichskurve erstreckte Integral (9) der Grenze $-\infty$. Unser Extremalenbogen erteilt aber dem Integral (9) den Wert Null und liefert daher kein Minimum des Integrals (9). Unsere Behauptung ist somit bewiesen.

Digitized by Google

Notiz zur Approximation von Potenzreihen durch rationale Funktionen.

Von **Heinrich Tietze** in Wien.

In einem in dieser Zeitschrift erscheinenden Referate[1]) habe ich eine Bemerkung gemacht, deren Beweis den Rahmen des Referates überschritten hätte und hier mitgeteilt sei. Es handelt sich darum, zu einer gegebenen Potenzreihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

zwei Polynome $P(x)$, $Q(x)$ von vorgegebenen Gradzahlen[2]) m bezw. n derart zu bestimmen, daß die Reihenentwicklung von $f(x) - \frac{P(x)}{Q(x)}$ mit einer möglichst hohen Potenz beginnt, d. h. also derart, daß für keinen anderen Bruch $P_1(x) : Q_1(x)$ mit denselben Gradzahlen m, n von Zähler und Nenner die Entwicklung von $f(x) - \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ mit einer höheren Potenz beginnt.[3]) Man kann sich offenbar darauf beschränken, $Q(0) \neq 0$, etwa $= 1$ anzunehmen. Ein Bruch $P(x) : Q(x)$ der genannten Eigenschaft heiße ein Approximationsbruch von $f(x)$, und zwar ein zu den Gradzahlen m, n gehöriger Approximationsbruch.

Zur Ermittlung eines solchen macht man bekanntlich den Ansatz

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n} q_i x^i, \quad f(x)\,Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{i=0}^{n} a_{k-i}\, q_i,$$

und sucht nun $q_1, q_2, \ldots q_n$ so zu bestimmen, daß für $k = m+1, m+2, \ldots m+n$

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{n} a_{k-i}\, q_i = 0$$

---

[1]) R. Kischke, Inaug. Diss. Königsberg. Dieser Band, S. 41 der Literaturberichte.

[2]) Zu den Polynomen vom Grade μ sind diejenigen Polynome mitgerechnet, deren „genauer" Grad $< \mu$ ist.

[3]) Vgl. insbesondere die Behandlungen dieser Aufgabe bei Frobenius, Über Relationen zwischen den Näherungsbrüchen von Potenzreihen, Journ. für Math. 90; Padé, Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationelles; Mémoire sur les développements en fractions continues de la fonction exponentielle; Recherches nouvelles sur la distribution des fractions rationelles approchées d'une fonction. Ann. de l'Éc. norm. sup., 3. sér., t. 9, 16, 19.

Digitized by Google

wird.[1]) Setzt man dann

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} x^k \sum_{i=0}^{n} a_{k-i} q_i,$$

so hat die Reihenentwicklung von $f(x) - \frac{P(x)}{Q(x)}$ und natürlich ebenso diejenige von $Q(x) f(x) - P(x)$ die Gestalt $x^{m+n+1} \mathfrak{P}(x)$. Damit diese Bestimmung der q_i möglich sei, ist hinreichend, daß die Determinante

$$A_{m,n} = | a_{k-i} |_{i=1,2,\dots n}^{k=m+1, m+2, \dots m+n}$$

von Null verschieden ist. Sollen aber $P(x)$ und $Q(x)$ so bestimmbar sein, daß die Differenz

$$f(x)\, Q(x) - P(x) = x^{m+n+1+h} \mathfrak{P}(x)$$

wird, wo $h > 0$ ist, so müssen durch die wegen $q_0 = 1$ nicht sämtlich verschwindenden Zahlen $q_0, q_1, \dots q_n$ die Gleichungen (1) für $k = m+1,\ m+2, \dots m+n+h$ erfüllt sein. Hiezu ist notwendig, daß die h Determinanten $(t = 1, 2, \dots h)$

$$A_{m+t, n+1} = | a_{k-i} |_{i=0,1,\dots n}^{k=m+t, m+t+1, \dots m+t+n}$$

gleich Null sind.

Wenn also $f(x)$ so beschaffen ist, daß die Determinanten $A_{m,n}$ für alle möglichen Werte von m und n von Null verschieden sind, so gibt es zu allen Gradzahlen m, n einen zugehörigen (durch die Festsetzung $Q(0) = 1$ eindeutig bestimmten) Approximationsbruch $P(x) : Q(x)$, und zwar derart, daß die Entwicklung von $Q(x) f(x) - P(x)$ genau mit der Potenz x^{m+n+1} beginnt. Solche Funktionen mögen „durchaus normal approximierbar" genannt werden. Ist $P(x) : Q(x)$ der zu den Gradzahlen m, n gehörige Approximationsbruch einer durchaus normal approximierbaren Funktion, so sind $P(x)$, $Q(x)$ genau vom Grade m bezw. n. Denn wären μ, ν die genauen Gradzahlen von P und Q, $\mu \leqq m$, $\nu \leqq n$ und $\mu + \nu < m + n$, so müßte für den zu den Gradzahlen μ, ν gehörigen Approximationsbruch $p(x) : q(x)$ die Entwicklung von $q(x) f(x) - p(x)$ mindestens mit $x^{m+n+1} = x^{\mu+\nu+1+(m+n-\mu-\nu)}$ beginnen, da das gleiche schon für die Entwicklung von $Q(x) f(x) - P(x)$ gilt. Nach dem Vorstehenden beginnt aber die Entwicklung von $q(x) f(x) - p(x)$ genau mit $x^{\mu+\nu+1}$.[2])

Es gilt nun mindestens für alle durchaus normal approximierbaren Funktionen $f(x)$ die folgende Bemerkung: Bedeutet $P(x) : Q(x)$

[1]) Für $j < 0$ ist $a_j = 0$ zu setzen.

[2]) Bezüglich dieser Sätze vgl. Padé, l. c.; Padé sagt von den hier als durchaus normal approximierbar bezeichneten Funktionen: Le Tableau relatif à $f(x)$ est uniquement composé de fractions normales.

Digitized by Google

den zu den Gradzahlen m, n von Zähler und Nenner gehörigen Approximationsbruch von $f(x)$ und $g(x)$ ein Polynom vom Grade l, so ist der Bruch

$$\frac{P(x)+g(x)\,Q(x)}{Q(x)}=\frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

dann und nur dann ein Approximationsbruch von $\varphi(x)=f(x)+g(x)$, wenn $l+n\leqq m$ ist.

Denn nach der über $f(x)$ gemachten Voraussetzung ist

$$(2)\quad Q(x)f(x)-P(x)=Q(x)\,\varphi(x)-P_1(x)=c\,x^{m+n+1}+\cdots\quad(c\neq 0).$$

Es werde

$$\varphi(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\cdots$$

gesetzt, wobei

$$\alpha_k=a_k+g_k,\quad g_k=0\quad\text{für}\quad k>l.$$

Sei nun zunächst $l+n>m$. Dann ist

$$|\,\alpha_{k-i}\,|_{i=1,2,\ldots n}^{k=l+n+1,\,l+n+2,\ldots l+2n}\neq 0$$

eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines zu den Gradzahlen $l+n, n$ von Zähler und Nenner gehörenden Approximationsbruches $P^*(x):Q^*(x)$ von der Art, daß

$$(3)\qquad \varphi(x)\,Q^*(x)-P^*(x)=x^{l+2n+1}\,\mathfrak{P}(x)$$

wird, eine Bedingung, die offenbar erfüllt ist, da die fragliche Determinante (in allen Elementen) mit der von Null verschieden vorausgesetzten Determinante $A_{l+n,n}$ übereinstimmt. Der Vergleich von (2) und (3) zeigt, daß der Bruch $P_1(x):Q(x)$ eine schlechtere Annäherung an $f(x)$ liefert, als der mit ihm in den Gradzahlen $l+n, n$ von Zähler und Nenner übereinstimmende Bruch $P^*(x):Q^*(x)$.

Sei anderseits $l+n\leqq m$. Dann genügt der genaue Grad m_1 von $P_1(x)$ der Ungleichung $m_1\leqq m$, wobei das Ungleichheitszeichen nur im Falle $l+n=m$ eintreten kann. Gäbe es nun einen Bruch $P^*(x):Q^*(x)$ mit den Gradzahlen m_1, n von Zähler und Nenner, der eine bessere Annäherung an $\varphi(x)$ liefert als $P_1(x):Q(x)$, so müßte sein:

$$\varphi(x)\,Q^*(x)-P^*(x)=x^{m+n+2}\,\mathfrak{P}(x)=x^{m_1+n+1+(m-m_1+1)}\,\mathfrak{P}(x).$$

Hiezu müßten notwendig die $(m-m_1+1)$ Determinanten $(t=1,2,\ldots m-m_1+1)$

$$|\,\alpha_{k-i}\,|_{i=0,1,\ldots n}^{k=m_1+t,\,m_1+t+1,\ldots m_1+t+n}$$

Digitized by Google

verschwinden, also insbesondere

$$|\alpha_{k-i}|_{i=0,\ 1,\ \ldots n}^{k=m+1,\ m+2,\ \ldots m+n+1} = 0$$

sein. Da aber für jedes Element dieser Determinante $k-i>l$ ist, so ist jedes $\alpha_{k-i}=a_{k-i}$ und die Determinante $=A_{m+1,\,n+1}$, also nach Voraussetzung ungleich Null.

Der Beweis für die gemachte Bemerkung ist damit erbracht. Dieselbe ist auf $f(x)=e^x$ anwendbar, da e^x durchaus normal approximierbar ist.[1]) Beiläufig werde beigefügt, daß e^x-1 sowie $\frac{e^x-1}{x}$ nicht durchaus normal approximierbar sind.

[1]) Padé, l. c.

Digitized by Google

Über Kugelfunktionen, ihre binären Formen und Vielbeine.

Von Emil Waelsch in Brünn.

Einleitung.[1])

I. Eine Raumkugelfunktion oder kurz eine Kugelfunktion n^{ter} Ordnung $X^{(n)}$ ist bekanntlich ein Polynom n^{ter} Dimension in den Koordinaten x, y, z, welches eine harmonische, d. h. der Differentialgleichung:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0$$

genügende Funktion ist. Man kann zu der allgemeinen Kugelfunktion $X^{(n)}$ in folgender Weise gelangen.

Zunächst zeigt sich, daß jede Funktion des Polynoms $\mathfrak{x}$ zweiten Grades in ξ:

$$\mathfrak{x} = (x + iy)\,\xi^2 - 2iz\xi + (x - iy) \tag{1}$$

harmonisch ist.[2]) Daher ist die n^{te} Potenz $\mathfrak{x}^n$ nach obigem eine Kugelfunktion.

Ersetzt man in $\mathfrak{x}^n$, welches ein Polynom $2n^{ten}$ Grades in ξ ist, jedes ξ^r durch eine beliebige Konstante, so erhält man die allgemeine Kugelfunktion $X^{(n)}$ mit $2n+1$ Konstanten. Diese Kon-

---

[1]) Vgl. die vorläufige Mitteilung: „Sur les fonctions sphériques et leurs multipèdes". Comptes rendus, 28 janv. 1907.

[2]) Jacobi hat in einer Abhandlung: „Über eine partikuläre Lösung der partiellen Differentialgleichung: $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$", Crelles J., Bd. 36, p. 125 (1848), harmonische Funktionen σ von der Eigenschaft betrachtet, daß $f(\sigma)$ auch harmonisch ist, wo dann σ der Differentialgleichung $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = 0$ genügen muß. Vgl. auch Levi-Civita: „Tipi di potenziali che si possono far dipendere da due sole coordinate", Mem. di Torino, Ser. II., t. 49, p. 105 (1900). Die obige Funktion $\mathfrak{x}$ ist wohl die einfachste dieser Eigenschaft, die noch von einem Parameter, dem ξ, abhängt. Vgl. ferner Cayley: „Sur les fonctions de Laplace"; Liouv. Journ. (1), T. 13, p. 275 (1848), E. T. Whittaker: „On the general solution of Laplaces equation etc.", Monthly not. Royal Soc. Vol. XII, p. 617 (1902).

Digitized by Google

stanten können dann als Koeffizienten eines Polynoms $2n^{\text{ten}}$ Grades in ξ, das mit $\mathfrak{a}^{(n)}$ bezeichnet werden soll, angesehen werden, und die Funktion $X^{(n)}$ als eine gewisse bilineare Verbindung der Koeffizienten der Polynome $\mathfrak{a}^{(n)}$ und $\mathfrak{x}^n$ die „Bilineal der Polynome" genannt wird.[1]) Sie ist somit durch das Polynom $\mathfrak{a}^{(n)}$ bestimmt.

Leicht ergibt sich nunmehr die Entwicklung einer ganzen rationalen Funktion n^{ten} Grades in x, y, z nach Kugelfunktionen, indem die Polynome, zu welchen die letzteren gehören, der Reihe nach bestimmt werden.[2])

Die Funktion $X^{(n)}$ des Polynoms $\mathfrak{a}^{(n)}$ ist nur dann reell, wenn die Koeffizienten von $\mathfrak{a}^{(n)}$ gewissen sehr einfachen Relationen genügen; sind diese erfüllt, so heißt das Polynom: „realisierend".

II. Vermöge (1) ist dem Punkte $\mathfrak{x}$ mit den Koordinaten x, y, z das Polynom $\mathfrak{x}$ zugeordnet,[3]) daher einem Punkte der Einheitskugel mit dem Polarkoordinaten ϑ, φ das Polynom:

$$\mathfrak{e} = \sin\vartheta\, e^{i\varphi}\,\xi^2 - 2i\cos\vartheta\,\xi + \sin\vartheta\, e^{-i\varphi}.$$

Das Bilineal des Polynoms $\mathfrak{a}^{(n)}$ und der Potenz $\mathfrak{e}^n$ ist die allgemeine Kugelflächenfunktion, kurz: „Flächenfunktion" n^{ter} Ordnung $\Phi^{(n)}$. Als einfachste Flächenfunktionen ergeben sich die „monomischen", welche zu den Monomen $2n^{\text{ten}}$ Grades $\xi^{n\pm\sigma}$ gehören, und speziell das Legendresche Polynom als zu ξ^n gehörig.

Die Binome $\xi^{n+\sigma} \pm \xi^{n-\sigma}$ liefern die „binomischen" Flächenfunktionen, die bis auf einfache Zahlenfaktoren mit den Heineschen Funktionen:

$$C_\sigma^{(n)} = \cos\sigma\varphi\, P_\sigma^{(n)},\quad S_\sigma^{(n)} = \sin\sigma\varphi\, P_\sigma^{(n)}$$

identisch sind, wo die $P_\sigma^{(n)}$ die sogenannten „zugeordneten Funktionen" sind.

Ferner ergibt sich hier sofort das Jacobische Theorem über die Entwickelung des Ausdruckes

$$(\cos\vartheta + i\cos\varphi\sin\vartheta)^n$$

nach den zugeordneten $P_\sigma^{(n)}$ und auf Grund einer einfachen Trans-

---

[1]) Dieses Bilineal erweist sich später als identisch mit der vollen (d. i. der $2n^{\text{ten}}$) Überschiebung derjenigen binären Formen, welche durch Homogenmachen aus den Polynomen erhalten werden. Bez. der binären Invariantentheorie siehe Gordan, „Invarianten", II. Bd.

[2]) Vgl. Gauß' Werke, Bd. V, p. 630, Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, Bd. I, p. 324.

[3]) Die Verbindungen $x + iy$, $x - iy$ der Koordinaten des Punktes $\mathfrak{x}$ wurden schon von Thomson und Tait (Handbuch der theoretischen Physik, Bd. I, p. 163) in die Theorie der Kugelfunktionen eingeführt und von Maxwell (Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus, Bd. I, p. 220) als „imaginäre Koordinaten" bezeichnet.

Digitized by Google

formation die Darstellung der Funktionen $P_\sigma^{(n)}(\zeta)$ als Differentialquotienten von $(\zeta^2 - 1)^n$.

III. Statt der Polynome werden nun binäre Formen eingeführt; das Polynom $\mathfrak{x}$ übergeht in eine Quadrik (binäre quadratische Form) und das Polynom $\mathfrak{a}^{(n)}$ in eine Form $2n^{\text{ter}}$ Ordnung $\mathfrak{a}^{(n)}$; die Kugelfunktion $X^{(n)}$ wird zur vollen Überschiebung dieser Form $\mathfrak{a}^{(n)}$ und der n^{ten} Potenz der Quadrik $\mathfrak{x}$. Da eine lineare Transformation (mit der Determinante 1) der binären Veränderlichen eine Rotation des Raumes um den Anfangspunkt o bedeutet und die Überschiebung binärinvariant ist, ergibt sich unmittelbar eine rein algebraische Ableitung des Laplaceschen Additionstheorems[1]) der Funktion $P^{(n)}(\cos\psi)$, sowie die Laplacesche Darstellung der Funktion $\Phi^{(n)}$ durch $2n+1$ Funktionen $P^{(n)}(\cos\psi_r)$.

IV. Da der realisierenden Quadrik, welche von dem Polynom (1) herrührt, der reelle Vektor zugeordnet ist, der den Punkt o mit dem Punkte $\mathfrak{x}$ verbindet und sich zeigen läßt, daß jede realisierende Form $\mathfrak{a}^{(n)}$ (herrührend von einem realisierenden Polynom) in das Produkt von n realisierenden Quadriken zerlegt werden kann, so ergibt sich, daß jeder realisierenden Form $\mathfrak{a}^{(n)}$ ein „n-bein“ zugeordnet werden kann, das aus n gleich langen von o ausgehenden Vektoren besteht.

Man kann dann in Verallgemeinerung des skalaren und des vektorischen Produktes zweier Vektoren auch Produkte zweier Vielbeine definieren, und zwar das k^{te} Produkt des n-beins $\mathfrak{a}^{(n)}$ und des m-beins $\mathfrak{a}^{(m)}$ als dasjenige, welches zur gleichfalls realisierenden k^{ten} Überschiebung der Formen dieser Vielbeine gehört.[2]) Speziell gibt dann die volle Überschiebung der Formen zweier n-beine, das $2n^{\text{te}}$ oder skalare Produkt der n-beine und die obige Definition der allgemeinen Kugelfunktion läßt sich wie folgt aussprechen: „Das skalare Produkt des n-beins $\mathfrak{a}^{(n)}$ und des speziellen n-beins $\mathfrak{x}^{(n)}$, welches n-mal den Vektor $\mathfrak{x}$ enthält, ist eine Kugelfunktion“. Es möge hiezu folgendes bemerkt werden.

V. Maxwell hatte l. c. die Flächenfunktionen $\Phi^{(n)}$ in der folgenden Weise definiert:

$$\Phi^{(n)} = c\,(-1)^n \frac{r^{n+1}}{n!} \frac{\partial}{\partial h_1} \frac{\partial}{\partial h_2} \cdots \frac{\partial}{\partial h_n} \frac{1}{r},$$

wobei c eine Konstante ist und $h_\varkappa$ die Richtungen sind von o nach den „Polen“ der Funktion, die auf der Einheitskugel liegen, und wo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

[1]) Über die verschiedenen Methoden von Laplace, Jacobi, Heine, F. Neumann zur Herleitung dieses Theorems siehe das Referat von Herrn Wangerin in der Enzyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. II_1, p. 695, Art. 13.

[2]) Vgl. E Waelsch: „Über mehrfache Vektoren und ihre Produkte sowie deren Anwendung in der Elastizitätstheorie“, Wien. Monatsh. Jahrg. XVII, p. 241.

Digitized by Google

Sylvester bewies hierauf,[1]) daß, wenn die Funktion $\Phi^{(n)}$ gegeben ist, diese Darstellung eindeutig ist, und stellte die folgende Forderung: „To put the copingstone to Professor Clerk Maxwells method of poles, I think it would be desirable to find an intrinsic definition of spherical harmonics to correspond with their representation referred to intrinsic axes: I mean we ought to be able to dispense with the Laplacian operator altogether, and to define a Harmonic with sole reference to some algebraical or geometrical (but certainly not physical) condition which it satisfies in regard to its poles."

Die in Art. 4 gegebene Definition der Kugelfunktion kommt der Sylvesterschen Forderung vollständig nach, und sie vermeidet zudem den Durchgang durch die Irrationalität $\frac{1}{r}$ der Maxwellschen Definition.

Um die Identität der durch beide Definitionen gegebenen Funktionen nachzuweisen, wird in der vorliegenden Arbeit zunächst der Ausdruck der vollen Überschiebung des Produktes von n Quadriken über die n^{te} Potenz einer Quadrik, welche nach der gegebenen Definition eine Kugelfunktion ist, durch die Formen des Systems dieser $n+1$ Quadriken dargestellt. Er erweist sich identisch mit dem Ausdruck Maxwells, welcher die durch ihre Pole gegebene Flächenfunktion darstellt durch die Cosinus der Winkel der Richtungen $h_\varkappa$ und der Richtung h, die von o gegen den Punkt ξ geht, woraus die fragliche Identität folgt, und ferner die Identität der Richtungen $h_\varkappa$ mit denjenigen der Teilvektoren des n-beins der Kugelfunktion.

Durch die Zerlegung der Binome, zu welchen die Funktionen $C_\sigma^{(n)}$, $S_\sigma^{(n)}$ gehören, gelingt es auch in einfacher Weise, die Maxwellschen Polsysteme dieser Funktionen zu bestimmen.

VI. Auf Grund des Vorstehenden hofft der Verfasser den Beweis erbracht zu haben, daß es, um rein algebraische und einfache Ableitungen der fundamentalen Sätze der Theorie der Kugelfunktionen zu gewinnen, angezeigt erscheinen mag, die binäre Invariantentheorie heranzuziehen. Daß es aber auch unumgänglich notwendig ist, diese Einführung zu treffen, ergibt sich, wenn es sich darum handelt, gewisse Probleme der Theorie der Kugelfunktionen, wenn überhaupt, so auch in übersichtlicher Form zur Lösung zu bringen. Die Prozesse der Überschiebung und der Clebsch-Gordanschen Reihenentwicklung u. a., müßten für die Theorie der Kugelfunktionen, falls sie nicht schon vorhanden wären, erst aufgestellt werden, wie aus dem unmittelbar Folgenden hervorgehen dürfte.

So wird es wohl nicht möglich sein, den Gradienten einer Kugelfunktion geschlossener zu definieren, als wie (siehe Art. 27)

[1]) Siehe „Note on spherical Harmonics", Phil. mag. 5. ser., vol. 2, p. 291 (1876).

Digitized by Google

durch die $(2n-2)^{te}$ Überschiebung der Form $\mathfrak{a}^{(n)}$ dieser Funktionen und der $(n-1)^{ten}$ Potenz der Quadrik $\mathfrak{x}$.

Ferner ist eine zweiseitige Kugelfunktion, das ist ein Polynom $F(x, y, z; x, y, z)$, welches nach jeder der Koordinatenreihen harmonisch ist, unmittelbar durch eine doppeltbinäre Form $r_\xi^{2n} s_\xi^{2m}$ gegeben, und sie wird gefunden, indem diese Form nach ξ voll über $\mathfrak{x}^n$ und nach ξ' voll über $\mathfrak{x}^m$ geschoben wird. Hierauf gibt die Clebsch-Gordansche Reihenentwicklung doppeltbinärer Formen und eine Formel[1]) der Herren Gordan und Berzolari, welche die Überschiebungen von Potenzen derselben Quadrik durch diese Quadrik ausdrückt, die Entwicklung dieser zweiseitigen Kugelfunktion nach Kugelfunktionen. Hieraus folgt dann, wenn die Formen r_ξ^{2n}, s_ξ^{2m} unsymbolisch werden, sofort die Entwicklung des Produktes zweier Kugelfunktionen nach Kugelfunktionen:[2])

$$X^{(n)} X^{(m)} = \mathfrak{a}^{(n)} . \mathfrak{x}^n \mathfrak{b}^{(m)} . \mathfrak{x}^m = \Sigma c_p X^{(p)}.$$

Hierin sind die Formen der Entwicklungsfunktionen $X^{(p)}$ Überschiebungen der Formen $\mathfrak{a}^{(n)}, \mathfrak{b}^{(m)}$ und die Koeffizienten c_p sind Produkte der Koeffizienten der Clebsch-Gordanschen Reihenentwicklung und der Koeffizienten, welche in der Formel von Gordan und Berzolari auftreten.

Als spezielle Fälle ergeben sich hier die Entwickelung des Produktes zweier Legendreschen Polynome nach solchen[3]) und ferner einige bekannte und neue Rekursionsformeln.[4])

Schließlich wird das Integral des Produktes zweier resp. dreier[5]) Kugelfunktionen durch die bilineare Invariante (volle Überschiebung) resp. trilineare Invariante der Formen dreier Funktionen dargestellt.

---

[1]) Diese Formel wurde zuerst für die zweite Überschiebung bewiesen von Herrn Gordan (siehe „Die Diskriminante der Form 7. Grades". Math. Ann., Bd. 31, p. 568) und hierauf allgemein von Herrn Berzolari (siehe „Sulle spinte formate con potenze di una forma quadratica", Palermo rend., t. XII, p. 258), worauf Herr Gordan (siehe „Auszug aus einem Schreiben an H. Berzolari", ib. p. 326) einen anderen Beweis der nötigen Beziehung zwischen Binomialkoeffizienten gegeben hat.

[2]) Vgl. E. Waelsch: „Über die Entwicklung des Produktes zweier Kugelfunktionen nach Kugelfunktionen", Wien. Ber., Bd. 118, Abt. IIa, p. 85 (1909).

[3]) Diese Entwicklung wurde zuerst von N. M. Ferrers (1874) und dann von J. C. Adams: „On the expression of the product of any two Legendres coefficients by means of a series of Legendres coefficients", Proc. of the royal soc. Lond. vol. 27, p. 63 (1878), durch Induktion aufgestellt, im selben Jahre auch von F. Neumann: „Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen", Leipzig, p. 88, mit Hilfe der Differentialgleichung, welcher das Produkt zweier Kugelfunktionen genügt, jedoch mit Koeffizienten in nicht so übersichtlicher Form.

[4]) Vgl. F. Neumann, l. c., und den Bericht von Wangerin, l. c.

[5]) Für den speziellen Fall des Integrals des Produktes dreier Legendrescher Polynome siehe die oben angeführten Arbeiten von Ferrers, Adams und J. Todhunter, „Note on Legendres Coefficients" im selben Bde. d. Proc p. 381.

Digitized by Google

Bezeichnungen.

Der Kürze wegen soll gesetzt werden:

(*a*): $$\frac{1}{x} = \bar{x},$$

daher:

$$\frac{y}{x} = y\bar{x}, \quad \frac{yz}{xu} = yz\,\overline{xu}, \quad \frac{1}{2} = \bar{2}, \quad -i = \bar{i},$$

$$(-1)^n = \overline{-1}^n, \quad \sqrt{x} = x^{\bar{2}}, \quad a^{-n} = \bar{a}^n, \quad e^{-i\varphi} = \bar{e}^{i\varphi}.$$

(*b*): konj. $z =$ der konjugierten der komplexen Zahl z.

(*c*): Es soll gesetzt werden:

$$n! = \underline{n},$$

also: $(n-a)! = \underline{n-a}$, und nach (*a*):

$$\frac{1}{n!} = \bar{\underline{n}}, \quad \frac{n!}{a!\,b!\,c!} = \underline{n}\,\overline{\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}}.$$

(*d*): Ferner soll gesetzt werden:

$$\binom{n}{x} = \underline{n}_x,$$

daher nach (*a*):

$$\frac{1}{\binom{n}{x}} = \bar{\underline{n}}_x, \quad \frac{\binom{p}{r}\binom{q}{s}}{\binom{n}{k}\binom{m}{h}} = \underline{p}_r\,\underline{q}_s\,\overline{\underline{n}_k\,\underline{m}_h}$$

(*e*): $$\frac{\partial}{\partial x} = D_x, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = D_x^2, \quad \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} = D_{xy}^2.$$

(*f*): τ bedeute einen ganzzahligen Index mit $-n \leqq \tau \leqq n$, wobei n eine positive ganze Zahl ist; σ bedeute einen ganzzahligen Index mit $0 \leqq \sigma \leqq n$.

(*g*): Es sei mit Heine gesetzt:

$$\Sigma' a_\sigma = {}^1/_2\, a_0 + a_1 + a_2 + \cdots a_n.$$

Digitized by Google

§ 1. Über eine Klasse harmonischer Funktionen.

1. Es werde dem reellen Punkte $\mathfrak{x}$ mit den Cartesischen Koordinaten x, y, z das Polynom zweiten Grades in ξ:

$$\mathfrak{x} = (x + iy)\,\xi^2 - 2iz\xi + (x - iy) \tag{1}$$

zugeordnet. Umgekehrt soll dem Polynom zweiten Grades in ξ:

$$A\xi^2 + B\xi + C$$

mit derselben Eigenschaft: $C = \text{konj. } A$, $B = -\text{konj. } B$ der reelle Punkt mit den Koordinaten:

$$x = \overline{2}\,(A + C),\quad y = \overline{2}\,i\,(C - A),\quad z = \overline{2}\,iC \tag{2}$$

zugewiesen werden. Ein solches Polynom soll „realisierend" heißen, weil es eben einen reellen Punkt bestimmt.

Die Einheitspunkte i, j, $\mathfrak{k}$ der Koordinatenachsen haben resp. die Polynome:

$$\mathfrak{i} = \xi^2 + 1,\quad \mathfrak{j} = i\,(\xi^2 - 1),\quad \mathfrak{k} = 2\overline{i}\,\xi. \tag{3}$$

Es besteht daher die Identität:

$$\mathfrak{i}^2 + \mathfrak{j}^2 + \mathfrak{k}^2 = 0 \tag{I}$$

und es kann gesetzt werden:

$$\mathfrak{x} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}. \tag{4}$$

2. „Jede Funktion $f(\mathfrak{x})$ ist harmonisch"; denn man erhält nach (4):

$$D_x f(\mathfrak{x}) = f'(\mathfrak{x})\,D_x\,\mathfrak{x} = f'(\mathfrak{x})\,\mathfrak{i},\quad D_x^2 f(\mathfrak{x}) = f''(\mathfrak{x})\,\mathfrak{i}^2$$

und die analogen Differentialquotienten nach y, z. Daher:

$$\Delta f(\mathfrak{x}) = f''(\mathfrak{x})\,(\mathfrak{i}^2 + \mathfrak{j}^2 + \mathfrak{k}^2) = \text{nach (I)} = 0.$$

Speziell gilt: „Die Potenz $\mathfrak{x}^n$ ist eine Kugelfunktion"; denn $\mathfrak{x}^n$ ist n^{ter} Dimension in x, y, z und nach obigem harmonisch. Es gilt aber auch: „Ist

$$\mathfrak{x}^n = \Sigma\, X_\tau^{(n)}\,\xi^{n-\tau}, \tag{5}$$

so sind die Koeffizienten $X_\tau^{(n)}$ Kugelfunktionen; denn $\mathfrak{x}^n$ ist eine Kugelfunktion für jedes ξ, daher auch für $\xi = 0$; deshalb ist $X_n^{(n)}$ eine Kugelfunktion. Subtrahiert man nun $X_n^{(n)}$ von $\mathfrak{x}^n$, so ergibt sich wieder eine Kugelfunktion für beliebiges ξ, folglich auch, wenn man durch ξ dividiert und dann $\xi = 0$ setzt, woraus folgt, daß $X_{n-1}^{(n)}$ eine Kugelfunktion ist u. s. w. Daher gilt auch: „Die mit Hilfe der Zahlen α_τ aus den Funktionen $X_\tau^{(n)}$ linear abgeleitete Funktion:

$$X^{(n)} = \Sigma\,\alpha_\tau\,X_\tau^{(n)} \tag{6}$$

ist eine Kugelfunktion." [1])

[1]) Allgemein gilt für die harmonische Funktion $f(\mathfrak{x})$, daß auch $\left[D_\xi^k f(\mathfrak{x})\right]_{\xi=0}$ harmonische Funktionen sind.

Digitized by Google

§ 2. Kugelfunktionen und Polynome.

3. Ist ein Polynom $2n^{\text{ten}}$ Grades $\mathfrak{a}^{(n)}$ mit irgend welchen reellen oder komplexen Koeffizienten A_τ gegeben durch:

$$\mathfrak{a}^{(n)} = \Sigma A_\tau \xi^{n-\tau}$$

und ist $\mathfrak{b}^{(n)}$ ein anderes Polynom $2n^{\text{ten}}$ Grades mit den Koeffizienten B_τ, so soll der Ausdruck:

$$\text{(II)} \qquad \Sigma \overline{-1}^{n-\tau} \overline{\underline{2n}}_{n-\tau} A_\tau B_{-\tau}$$

„Bilineal der Polynome $\mathfrak{a}^{(n)}$, $\mathfrak{b}^{(n)}$“ genannt und mit $\mathfrak{a}^{(n)} . \mathfrak{b}^{(n)}$ bezeichnet werden. Es gelten die Regeln:

$$\text{(8)} \qquad (\mathfrak{a}^{(n)} + \mathfrak{b}^{(n)}) \cdot \mathfrak{c}^{(n)} = \mathfrak{a}^{(n)} \cdot \mathfrak{c}^{(n)} + \mathfrak{b}^{(n)} \cdot \mathfrak{c}^{(n)}$$

$$\text{(9)} \qquad (c\,\mathfrak{a}^{(n)}) \cdot \mathfrak{b}^{(n)} = c\,(\mathfrak{a}^{(n)} \cdot \mathfrak{b}^{(n)}).$$

Speziell hat man als Bilineal der realisierenden Polynome des Punktes $\mathfrak{x}$ und des Punktes $\mathfrak{y}$ mit den Koordinaten x', y', z':

$$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = (x+iy)(x'-iy') - \overline{2}(-2iz)(-2iz') + (x-iy)(x'+iy') =$$

$$\text{(10)} \qquad = 2(xx' + yy' + zz')$$

und daher

$$\text{(11)} \qquad \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x} = 2(x^2 + y^2 + z^2) \doteq 2r^2.$$

4. Das Bilineal der Polynome $\mathfrak{a}^{(n)}$ und $\mathfrak{x}^{(n)}$, also der Ausdruck:

$$X^{(n)} = \mathfrak{a}^{(n)} \cdot \mathfrak{x}^n = \Sigma \overline{\underline{2n}}_{n-\tau} A_\tau X^{(n)}_{-\tau}$$

ist nach Art. 3 eine Kugelfunktion, die als zu dem Polynome $\mathfrak{a}^{(n)}$ „gehörig“ bezeichnet werden soll.

„Bei allgemeinem Polynome $\mathfrak{a}^{(n)}$ ist auch dessen Kugelfunktion $X^{(n)} = \mathfrak{a}^{(n)} \cdot \mathfrak{x}^n$ allgemein.“ Um dies zu zeigen, wird zunächst bewiesen, daß die $2n+1$ Koeffizienten A_τ des Polynoms $\mathfrak{a}^{(n)}$ wesentliche Konstante für die Funktion $X^{(n)}$ sind. Denn, gäbe es ein Polynom $\mathfrak{a}^{(n)}$, für welches gilt: $\mathfrak{a}^{(n)} \cdot \mathfrak{x}^n = 0$ für alle reellen Zahlen x, y, z, die vermöge (1) in $\mathfrak{x}$ eintreten, so müßte diese Gleichung auch gelten für alle komplexen Zahlen x, y, z, also auch für:

$$\text{(12)} \qquad x = \overline{2}(1 + i\alpha^2),\ y = \overline{2}(1 - i\alpha^2),\ z = -i\alpha,$$

wo α reell ist. Dann würde sein:

$$\text{(13)} \qquad \mathfrak{x} = (\xi - \alpha)^2,$$

$$\mathfrak{x}^n = (\xi - \alpha)^{2n} = \Sigma \overline{-1}^{\tau} \overline{\underline{2n}}_{n-\tau} \alpha^{n+\tau} \xi^{n-\tau}.$$

Digitized by Google

Daher wäre für alle Werte α:

$$\mathfrak{a}^{(n)} \cdot \xi^n = \mathfrak{a}^{(n)} \cdot (\xi - \alpha)^{2n} = \Sigma A_\tau \alpha^{n-\tau} = 0 \tag{14}$$

oder die A_τ müßten verschwinden.

Weiters kann nun die Entwicklung des Polynoms n^{ten} Grades $G^{(n)}$ nach Kugelfunktionen vorgenommen werden:

$$G^{(n)} = X^{(n)} + r^2 X^{(n-1)} + r^4 X^{(n-2)} + \cdots, \tag{15}$$

wobei die Kugelfunktionen $X^{(n-\sigma)}$ zu den allgemeinen Polynomen $\mathfrak{a}^{(n-\sigma)}$ gehören. Denn die Funktionen $r^{2\sigma} X^{(n-\sigma)}$ bilden für die $G^{(n)}$ ein Fundamentalsystem; sie enthalten nämlich nach Art. 4 im ganzen:

$$2n + (2n-2) + (2n-4) + \cdots = \overline{2}\,(n+1)(n+2)$$

Konstante, also ebenso viele als $G^{(n)}$ besitzt. Es kann ferner zwischen ihnen keine lineare Identität bestehen, denn wäre dies der Fall, so führe man die Substitution (12) aus, durch welche $r^2 = 0$ wird, und $X^{(n)} = \Sigma A_\tau \alpha^{n-\tau}$. Infolge der vorausgesetzten Identität müßten demnach die A_τ verschwinden, es müßte also $X^{(n)} \equiv 0$ sein. Diese Identität müßte daher zwischen $r^2 X^{(n-1)}$, $r^4 X^{(n-2)}$, ... bestehen, also auch zwischen $X^{(n-1)}$, $r^2 X^{(n-2)}$, ... Dann führe man wieder die Substitution (12) aus, so würde sich $X^{(n-1)} \equiv 0$ ergeben u. s. w.

Es kann demnach nicht zwei Entwicklungen der Gestalt (15) für $G^{(n)}$ geben und, wenn $G^{(n)}$ identisch ist mit $X^{(n)}$, so ist $X^{(n)}$, wenn es die $2n+1$ angegebenen Konstanten enthält, auch allgemein.

Man findet demnach die Polynome der Funktionen $X^{(n)}$, $X^{(n-1)}$, ... in (15) hintereinander durch abwechselnde Anwendung der Substitution (12) und der Division durch r^2.

5. Es werde noch

$$\Delta\,(r^\lambda X^{(\varkappa)})$$

berechnet. Es ist:

$$r^\lambda X^{(\varkappa)} = (x^2 + y^2 + z^2)^{\overline{2}\lambda}\, \mathfrak{a}^{(n)} \cdot (x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k})^n$$

$$D_x r^\lambda X^{(\varkappa)} = \lambda r^{\lambda-2} x X^{(\varkappa)} + r^\lambda D_x X^{(\varkappa)} \tag{16}$$

$$D_{x^2} r^\lambda X^{(\varkappa)} = \lambda(\lambda-2) r^{\lambda-4} x^2 X^{(\varkappa)} + \lambda r^{(\lambda-2)} X^{(\varkappa)} + 2\lambda r^{\lambda-2} x D_x X^{(\varkappa)} + r^\lambda D_x^2 X^{(\varkappa)}$$

und analog für D_y^2, D_z^2 von $r^\lambda X^{(\varkappa)}$. Daher ist:

$$\Delta\,(r^\lambda X^{(\varkappa)}) = \lambda(\lambda+1) r^{\lambda-2} X^{(\varkappa)} + 2\lambda r^{\lambda-2} \Sigma x D_x X^{(\varkappa)} + r^\lambda \Delta X^{(\varkappa)}.$$

Digitized by Google

Da aber $\Delta X^{(\varkappa)} = 0$ ist und ferner $X^{(\varkappa)}$ eine homogene Funktion $\varkappa^{\text{ter}}$ Dimension in x, y, z, so folgt:

$$\Delta (r^{\lambda} X^{(\varkappa)}) = \lambda (\lambda + 2\varkappa + 1) r^{\lambda-2} X^{(\varkappa)}. \tag{17}$$

Der rechtsstehende Koeffizient ist Null, wenn $\lambda = 0$ und $\lambda + 2\varkappa + 1 = 0$ ist. Es ist demnach nicht nur $X^{(n)}$ eine Kugelfunktion, sondern auch die Funktion:

$$V_n = \frac{1}{r^{2n+1}} X^{(n)}.$$

6. Doppel- und mehrfache Kugelfunktionen. Nach (15) ist vermöge (17):

$$\Delta G^{(n)} = 2(2n-1) X^{(n-2)} + 4(2n-3) r^2 X^{(n-4)} + \cdots$$

$$\Delta\Delta G^{(n)} = 4(2n-3) 2(2n-5) X^{(n-4)} + \cdots;$$

daher: „Die allgemeine Doppelkugelraumfunktion n^{ter} Ordnung, das ist ein Polynom n^{ter} Dimension in x, y, z, welches der Gleichung $\Delta\Delta = 0$ genügt, ist das Polynom $X^{(n)} + r^2 X^{(n-1)}$"; sie ist demnach bestimmt durch das Polynom $2n^{\text{ten}}$ Grades $\mathfrak{a}^{(n)}$ und das Polynom $(2n-2)^{\text{ten}}$ Grades $\mathfrak{a}^{(n-1)}$ der Kugelfunktionen $X^{(n)}$ und $X^{(n-1)}$.

Die allgemeine dreifache Kugelraumfunktion, welche der Gleichung $\Delta\Delta\Delta = 0$ genügt, ist:

$$X^{(n)} + r^2 X^{(n-1)} + r^4 X^{(n-2)}$$

u. s. w.

§ 3. Allgemeine und monomische Flächenfunktionen.

7. Führt man Polarkoordinaten ein vermöge:

$$x = r\nu\cos\varphi,\ y = r\nu\sin\varphi,\ z = r\mu, \tag{18}$$

wobei

$$\mu = \cos\vartheta,\ \nu = \sin\vartheta,$$

so ist nach (1) das Polynom eines Punktes $\mathfrak{e}$ der Einheitskugel:

$$\mathfrak{e} = \nu e^{i\varphi}\xi^2 - 2i\mu\xi + \nu e^{-i\varphi} \tag{19}$$

und folglich $\mathfrak{x} = r\mathfrak{e}$. Ferner gilt für die Kugelfunktion $X^{(n)}$:

$$X^{(n)} = \mathfrak{a}^{(n)} \cdot \mathfrak{x}^n = \mathfrak{a}^{(n)} \cdot (r^n \mathfrak{e}^n) = \text{nach (9)} = r^n \Phi^{(n)},$$

wobei $\Phi^{(n)}$ eine Flächenfunktion ist, die nach Art. 4 mit dem Polynom $\mathfrak{a}^{(n)}$ allgemein ist:

$$\text{(III)}\quad \Phi^{(n)} = \frac{1}{r^n} X^{(n)} = \mathfrak{a}^{(n)} \cdot \mathfrak{e}^n = \mathfrak{a}^{(n)} \cdot [\nu e^{i\varphi}\xi^2 - 2i\mu\xi + \nu e^{-i\varphi}]^n.$$

Digitized by Google

8. Die $2n+1$ Monome $\xi^{n-\tau}$ bestimmen die „monomischen" Flächenfunktionen:

$$M_\tau^{(n)} = \xi^{n-\tau} \cdot \mathfrak{e}^n. \tag{20}$$

Wird nun gesetzt:

$$\mathfrak{e}^n = (\nu e^{i\varphi} \xi^2 - 2i\mu\xi + \nu e^{-i\varphi})^n = \Sigma E_\tau \xi^{n-\tau}, \tag{21}$$

so ergibt sich nach (II):

$$M_\tau^{(n)} = \overline{-1}^{n-\tau} \underline{\overline{2n}}_{n-\tau} E_{-\tau}, \tag{22}$$

daher: „Der Koeffizient $E_{-\tau}$ von $\xi^{n+\tau}$ des Polynoms (21) ist eine Flächenfunktion, und zwar bis auf einen einfachen Faktor identisch mit der monomischen Funktion $M_\tau^{(n)}$". Daher ist auch nach (21):

$$\mathfrak{e}^n = \Sigma \overline{-1}^{n+\tau} \underline{2n}_{n+\tau} M_\tau^{(n)} \xi^{n+\tau}. \tag{23}$$

9. Nach dem polynomischen Lehrsatze ist vermöge (21):

$$\mathfrak{e}^n = \Sigma 2^r \overline{i}^r \underline{n} \underline{\overline{q\,r\,s}} e^{i(q-r)\varphi} \nu^{q+s} \mu^r \xi^{2q+r}$$

mit $q+r+s=n$, und es ergibt sich, wenn gesetzt wird:

$$2q+r = n+\tau,\ r+2s = n-\tau:$$

$$E_{-\tau} = \overline{i}^n \underline{2n}_{n-\tau} e^{i\tau\varphi} P_\tau^{(n)} \tag{24}$$

$$P_\tau^{(n)} = i^\tau 2^{n-\tau} \underline{n} \underline{\overline{2n}}_{n-\tau} \nu^\tau \Sigma \overline{-4}^s \underline{\overline{s}} \underline{\overline{s+\tau\, n-\tau-2s}} \mu^{n-\tau-2s} \nu^{2s}.$$

Hiebei ist $P_\tau^{(n)}$ die von Heine ebenso bezeichnete und „zugeordnete Funktion erster Art" genannte Funktion, wie aus der von Maxwell (l. c. p. 212 ff.) angegebenen Entwicklung dieser Funktion nach μ und ν folgt.

Nach (22), (24) ist demnach:

$$M_\tau^{(n)} = \overline{-1}^\tau i^n e^{i\tau\varphi} P_\tau^{(n)}. \tag{25}$$

Folglich ist nach (23):

$$\mathfrak{e}^n = \overline{i}^n \Sigma \underline{2n}_{n+\tau} P_\tau^{(n)} e^{i\tau\varphi} \xi^{n+\tau}. \tag{23'}$$

Ferner ist, wenn ein positives τ mit σ bezeichnet wird:

$$M_{\pm\sigma}^{(n)} = \xi^{n\mp\sigma} \cdot \mathfrak{e}^n = \overline{-1}^\sigma i^n e^{\pm i\sigma\varphi} P_\sigma^{(n)},\ (\sigma = 0, 1, \ldots n). \tag{26}$$

Es läßt sich aber zeigen, daß:

$$P_{-\sigma}^{(n)} = P_\sigma^{(n)} \tag{27}$$

ist (Satz von Jacobi). Denn sind $C_{\pm\sigma}$ die Koeffizienten der n^{ten} Potenz eines realisierenden Polynoms zweiten Grades, so folgt leicht

Digitized by Google

durch den Schluß von n auf $n+1$, daß die Relationen gelten: $C_{-\sigma} = \overline{-1}^{n-\sigma}$ konj. C_σ. Da nun aber das Polynom $\mathfrak{e}$ realisiert, so ist $E_{-\sigma} = \overline{-1}^{n-\sigma}$ konj. E_σ, weshalb sich aus den Gleichungen (24), da $\overline{i}^{\tau} P_\tau^{(n)}$ reell ist, die Gleichungen (27) ergeben.

Nach (24), (26) ist demnach auch:

$$(28) \qquad M_{\pm\sigma}^{(n)} = \xi^{n\mp\sigma} \cdot \mathfrak{e}^n = \overline{-1}^{\sigma} i^n (\cos\sigma\varphi \pm i \sin\sigma\varphi) P_\sigma^{(n)}.$$

10. Vermöge $\mathfrak{a}^{(n)} = \Sigma A_\tau \xi^{n-\tau}$ und der Regeln (8), (9) gilt für die allgemeine Flächenfunktion nach (III):

$$(IV) \qquad \Phi^{(n)} = \mathfrak{a}^{(n)} \cdot \mathfrak{e}^n = \Sigma A_\tau \xi^{n-\tau} \cdot \mathfrak{e}^n = \Sigma A_\tau M_{-\tau}^{(n)},$$

daher: „Die allgemeine Flächenfunktion $\Phi^{(n)}$ läßt sich aus den monomischen linear ableiten mit Hilfe von Zahlen, die identisch sind mit den Koeffizienten des Polynoms $2n^{ter}$ Ordnung, zu dem $\Phi^{(n)}$ gehört".

Da $\Phi^{(n)}$ bei unabhängigem A_τ allgemein ist, so bilden die $2n+1$ monomischen Funktionen $M_\tau^{(n)}$ ein Fundamentalsystem der Flächenfunktionen $\Phi^{(n)}$, aus ihnen lassen sich alle $\Phi^{(n)}$ linear ableiten.

11. Unter den Funktionen $M_\sigma^{(n)}$ tritt für $\sigma = 0$ die Funktion hervor [siehe (26), (24)]:

$$(29) \qquad \begin{cases} M_0^{(n)} = \xi^n \cdot \mathfrak{e}^n = i^n P_0^{(n)} = i^n 2^n \underline{\overline{2n}}_n P^{(n)} \\ P^{(n)} = \Sigma \overline{-4}^s \underline{n}_{-2s} \underline{2s}_s \mu^{n-2s} \nu^{2s} \end{cases}$$

Hiebei ist $P^{(n)}$ die einfache Flächenfunktion oder das Legendresche Polynom n^{ten} Grades in der von Maxwell (l. c. p. 201) angegebenen Darstellung durch μ und ν. Es ist also:

$$(V) \qquad P^{(n)} = P^{(n)}(\cos\vartheta) = \underline{2n}\,\overline{2i}^n \xi^n \cdot \mathfrak{e}^n = \overline{2}^{2n} \underline{2n}_n \mathfrak{k}^n \cdot \mathfrak{e}^n.$$

§ 4. Binomische Flächenfunktionen und die Entwicklung der Flächenfunktionen nach zugeordneten erster Art.

12. Aus den monomischen Flächenfunktionen $M_{\pm\sigma}^{(n)}$, die zu den Monomen $\xi^{n\mp\sigma}$ gehören, kann man die Funktionen bilden:

$$(30) \qquad \begin{cases} C_\sigma^{(n)} = \overline{-1}^{n-\sigma} i^n \quad \overline{2}\,(M_\sigma^{(n)} + M_{-\sigma}^{(n)}) = \cos\sigma\varphi\, P_\sigma^{(n)} \\ S_\sigma^{(n)} = \overline{-1}^{n-\sigma} i^{n+1}\,\overline{2}\,(M_\sigma^{(n)} + M_{-\sigma}^{(n)}) = \sin\sigma\varphi\, P_\sigma^{(n)} \end{cases}$$

Digitized by Google

nach (28). Diese Funktionen gehören nach den Regeln (8) und (9) zu den Binomen:

$$(31)\quad \overline{-1}^{n-\sigma} i^n \overline{2}\,(\xi^{n-\sigma} + \xi^{n+\sigma}),\ \overline{-1}^{n-\sigma} i^{n+1} \overline{2}\,(\xi^{n-\sigma} - \xi^{n+\sigma})$$

und sollen daher als „binomische Flächenfunktionen" bezeichnet werden. Sie bilden wie die monomischen ein Fundamentalsystem der Flächenfunktionen $\Phi^{(n)}$.

Nach (28) ist auch:

$$(28')\qquad M^{(n)}_{\pm\sigma} = \overline{-1}^{\sigma} i^n (C^{(n)}_\sigma \pm i S^{(n)}_\sigma).$$

13. Nach (IV) ist die allgemeine Flächenfunktion:

$$(32)\quad \Phi^{(n)} = \Sigma' (A_{-\sigma} M^{(n)}_{-\sigma} + A_\sigma M^{(n)}_\sigma) = \text{nach (28)}$$

$$= \Sigma' i^{n+\sigma} [(A_{-\sigma} + A_\sigma)\cos\sigma\varphi + i(A_{-\sigma} - A_\sigma)\sin\sigma\varphi]\, i^\sigma P^{(n)}_\sigma.$$

Soll demnach die Funktion $\Phi^{(n)}$ reell sein, so müssen, da die $i^\sigma P^{(n)}_\sigma$ reell sind, die Zahlen:

$$i^{n+\sigma}(A_{-\sigma} + A_\sigma),\ i^{n+\sigma+1}(A_{-\sigma} - A_\sigma),$$

mit welchen sie aus den Funktionen $\cos\sigma\varphi\, P^{(n)}_0$, $\sin\sigma\varphi\, P^{(n)}_\sigma$ abgeleitet wird, reell sein. Hieraus folgt, daß $A_{-\sigma} = \overline{-1}^{n-\sigma}$ konj. A_σ sein muß, oder: „Die zu dem Polynome $\mathfrak{a}^{(n)} = \Sigma A_\tau \xi^{n-\tau}$ gehörige Kugelfunktion ist dann und nur dann reell, wenn die Koeffizienten A_τ den Relationen:

$$(VI)\qquad A_{-\tau} = \overline{-1}^{n-\tau} \text{ konj. } A_\tau$$

genügen". Ein Polynom mit dieser Eigenschaft soll daher „realisierend" heißen.

Solche Polynome sind z. B. $\mathfrak{e}^n$ und (1).

14. Sind $i^\sigma U_\sigma$, $i^\sigma V_\sigma$ reelle Zahlen und werden die Koeffizienten von $\mathfrak{a}^{(n)}$ gesetzt:

$$(33)\qquad A_{\pm\sigma} = \overline{2\, i^{n-2\sigma}}\,(U_\sigma \pm i V_\sigma),$$

so ist (VI) erfüllt. Dann ist:

$$A_{-\sigma} + A_\sigma = \overline{i}^{n-2\sigma} U_\sigma,\ A_{-\sigma} - A_\sigma = \overline{i}^{n-2\sigma+1} V_\sigma$$

und folglich nach (32) und (30):

$$(VII)\quad \Phi^{(n)} = \Sigma' [U\ C^{(n)} + V_\sigma S^{(n)}] = \Sigma [U_\sigma \cos\sigma\varphi + V_\sigma \sin\sigma\varphi] P^{(n)}_\sigma,$$

Digitized by Google

und dies ist die Darstellung der allgemeinen Flächenfunktion $\Phi^{(n)}$ durch die Funktionen $C_\sigma^{(n)}$, $S_\sigma^{(n)}$ resp. durch die zugeordneten $P_\sigma^{(n)}$.

Die Formeln (33) geben auch ein einfaches Mittel, um, falls die Funktion $\Phi^{(n)}$ vermöge (VII) durch zugeordnete dargestellt ist, die Koeffizienten A_τ des Polynoms $\mathfrak{a}^{(n)}$, zu welchem $\Phi^{(n)}$ gehört, zu finden.

Ist $\Phi'^{(n)}$ eine zweite Flächenfunktion, die zu dem Polynom $\mathfrak{b}^{(n)}$ gehört, und ist ihre Darstellung nach (VII):

$$\Phi'^{(n)} = \Sigma' [U'_\sigma C_\sigma^{(n)} + V'_\sigma S_\sigma^{(n)}],$$

so ergeben sich die Koeffizienten B_τ von $\mathfrak{b}^{(n)}$ nach (33) aus den U'_σ, V'_σ und es folgt für das Bilineal der Polynome $\mathfrak{a}^{(n)}$ und $\mathfrak{b}^{(n)}$ nach (II):

$$\mathfrak{a}^{(n)} \cdot \mathfrak{b}^{(n)} = \overline{2}\, \Sigma' \underline{\overline{2n}}_{n-\sigma} [U_\sigma U'_\sigma + V_\sigma V'_\sigma].$$

15. Setzt man $\xi = 1$ in (21), (23), so folgt nach Division mit $\overline{-1}^n$:

$$2^n i^n (\nu + i\mu\cos\varphi)^n = \Sigma' \overline{-1}^\sigma \underline{2n}_{n-\sigma} (M_{-\sigma}^{(n)} + M_\sigma^{(n)}),$$

daher ergibt sich nach (30) die Jacobische Gleichung:

$$(\cos\vartheta + i\cos\varphi\sin\vartheta)^n = \overline{2}^{n-1} \Sigma' \underline{2n}_{n-\sigma} \cos\sigma\varphi\, P_\sigma^{(n)}.$$

16. Setzt man $\varphi = 0$ in (21), (23), so folgt nach (25):

$$(\mu\xi^2 - 2i\nu\xi + \mu)^n = \Sigma \overline{i}^n \underline{2n}_{n-\tau} P_\tau^{(n)} \xi^{n+\tau};$$

daher ist:

$$\overline{i}\, \underline{2n}_{n-\tau} P_\tau^{(n)} = \overline{\underline{n+\tau}} [D_\xi^{n+\tau} (\mu\xi^2 - 2i\nu\xi + \mu^2)^n]_{\xi=0}.$$

Führt man die neue Veränderliche ζ ein vermöge:

$$\zeta = i\mu\xi + \nu,$$

so folgt:

$$P_\tau^{(n)} = \underline{n-\tau}\, \overline{\underline{2n}}\, i^\tau \lambda^\tau [D_\zeta^{n+\tau} (\zeta^2 - 1)^n]_{\zeta=\mu}.$$

Da $P_\tau^{(n)}$ als Funktion von μ gleich $P_\tau^{(n)}(\mu)$ gesetzt werden kann, ergeben sich die Jacobischen Gleichungen:

$$P_\tau^{(n)}(\zeta) = \underline{n-\tau}\, \overline{\underline{2n}}\, (\zeta^2 - 1)^{\overline{2}\tau} D_\zeta^{n+\tau} (\zeta^2 - 1)^n.$$

Digitized by Google

Speziell ist nach Art. 11:

$$P^{(n)}(\zeta) = \overline{2}^n \underline{2n}_n P_0^{(n)}(\zeta) = \overline{2}^n \underline{n} D_\zeta^n (\zeta^2 - 1)^n$$

$$= \overline{2}^n \Sigma \overline{-1}^\varkappa \underline{n}_\varkappa \underline{2n-2\varkappa}_n \zeta^{n-2\varkappa}. \tag{34}$$

§ 5. Einführung binärer Formen.

17. Nunmehr werde statt des Polynoms zweiten Grades $\mathfrak{x}$, welches den Punkt $\mathfrak{x}$ bestimmt (Art. 1), die Quadrik

$$\mathfrak{x} = (x + iy)\xi^2 - 2iz\xi\eta + (x - iy)\eta^2$$

zu Grunde gelegt, die sonach auch den Vektor $\mathfrak{x}$ bestimmt, der den Anfangspunkt o und den Endpunkt $\mathfrak{x}$ besitzt.

An Stelle des Polynoms $\mathfrak{a}^{(n)}$ tritt die binäre Form $2n^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\mathfrak{a}^{(n)} = \Sigma A_\tau \xi^{n-\tau}\eta^{n+\tau} = \Sigma \underline{2n}_{n-\tau} a_\tau \xi^{n-\tau}\eta^{n+\tau}.$$

Das Bilineal der beiden Polynome $\mathfrak{a}^{(n)}, \mathfrak{b}^{(n)}$ wird zur $2n^{\text{ten}}$ Überschiebung der Formen $\mathfrak{a}^{(n)}, \mathfrak{b}^{(n)}$:

$$\mathfrak{a}^{(n)} \cdot \mathfrak{b}^{(n)} = \Sigma \overline{-1}^{n-\tau} \underline{2n}_{n-\tau} a_\tau b_{-\tau}.$$

Die $2n^{\text{te}}$ Überschiebung der Form $\mathfrak{a}^{(n)}$ und der n^{ten} Potenz der Quadrik $\mathfrak{x}$ ist eine Kugelfunktion (Art. 4) und diese ist reell, wenn die Form $\mathfrak{a}^{(n)}$ realisiert, d. h. wenn die Gleichungen (VI) bestehen.

18. Bekanntlich entspricht einer linearen Transformation L, welche die binären Veränderlichen ξ, η ersetzt durch $\alpha\xi + \beta\eta$, $\gamma\xi + \delta\eta$ und deren Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ist, eine Rotation R der Punkte $\mathfrak{x}$ um o. Übergeht bei L die Quadrik $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{x}'$, so übergeht bei R der Punkt $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{x}'$, und übergeht bei L die Form $\mathfrak{a}^{(n)}$ in $\mathfrak{a}'^{(n)}$, so ist, weil bei L die $2n^{\text{te}}$ Überschiebung zweier Formen invariant ist:

$$\mathfrak{a}^{(n)} \cdot \mathfrak{x}^n = \mathfrak{a}'^{(n)} \cdot \mathfrak{x}'^n.$$

Man hat daher für die Flächenfunktion:

$$\mathfrak{a}^{(n)} \cdot \mathfrak{e}^n = \mathfrak{a}'^{(n)} \cdot \mathfrak{e}'^n.$$

§ 6. Das Additionstheorem der Funktion $P^{(n)}(\cos\gamma)$ und der Satz von Laplace.

19. Nach (V) folgt, wenn ψ der Winkel der Vektoren $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{e}$ ist:

$$P^{(n)}(\cos\psi) = \overline{2}^{2n} \underline{2n}_n \mathfrak{k}^n \cdot \mathfrak{e}^n. \tag{35}$$

Digitized by Google

Übergeht nun bei der Rotation R der Vektor $\mathfrak{k}$ in den Einheitsvektor $\mathfrak{E}$, so übergeht $\mathfrak{k}^n \cdot \mathfrak{e}^n$ in $\mathfrak{E}^n \cdot \mathfrak{e}^n$, während $P^n(\cos\psi)$ ungeändert bleibt. Demnach ist, wenn noch $\mathfrak{e}$ statt $\mathfrak{e}'$ geschrieben wird:

$$P^{(n)}(\cos\psi) = \overline{2}^{2n} \underline{2n}_n \, \mathfrak{E}^n \cdot \mathfrak{e}^n, \tag{36}$$

wobei, wenn Θ, Φ die Polarkoordinaten des Punktes $\mathfrak{E}$ sind:

$$\cos\psi = {}^1/_2 \, \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{e} = \cos\vartheta\cos\Theta + \sin\vartheta\sin\Theta\cos(\varphi - \Phi).$$

Nach (23′) ist dann:

$$\mathfrak{E}^n = \overline{i}^n \, \Sigma \, \underline{2n}_{n+\tau} \, P_\tau^{(n)}(\cos\Theta) \, e^{i\tau} \, \xi^{n+\tau},$$

folglich ist nach (8), (9) und (20), (25):

$$\mathfrak{E}^n \cdot \mathfrak{e}^n = \Sigma \, \overline{-1}^\tau \, \underline{2n}_{n+\tau} \, e^{i\tau(\Phi-\varphi)} \, P^{(n)}(\cos\Theta) \, P^{(n)}(\cos\vartheta),$$

weshalb nach (36) das Additionstheorem folgt:

$$P^{(n)}(\cos\psi) = 2\overline{4}^n \, \underline{2n}_n \, \Sigma' \, \overline{-1}^\sigma \, \underline{2n}_{n-\sigma} \cos(\varphi - \Phi) \, P^{(n)}(\cos\vartheta) \, P^{(n)}(\cos\Theta).$$

20. Setzt man

$$\varphi = \varphi_\varkappa = \varkappa\pi\overline{n+1}, \quad [\varkappa = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm(n+1)],$$

so sind die $2n+1$ Punkte $\mathfrak{E}_\varkappa$ mit den Polarkoordinaten ϑ, $\varphi_\varkappa$ auf einem Parallelkreise der Einheitskugel gelegen, dessen Poldistanz ϑ ist ($\vartheta \neq \overline{2}\pi$), und zwar sind sie die Ecken des regulären $(2n+2)$-Eckes, das den Punkt mit den Polarkoordinaten ϑ, 0 zum Eckpunkt hat, dieser Punkt aber nicht mitgenommen.

Es ist nun nach (25):

$$M^{(n)}(\vartheta, \varphi_\varkappa) = \overline{-1}^\tau \, i^n \, \varepsilon^{\varkappa\tau} \, P_\tau^{(n)},$$

wo $\varepsilon = e^{\pi i \overline{n+1}}$ die $(2n+2)^{\text{te}}$ Wurzel aus $+1$ ist, so daß die Zahlen $\varepsilon^\varkappa$ die Wurzeln der Gleichung

$$x^{2n+1} + x^{2n} + \cdots + x + 1 = 0$$

sind. Nach (23′) ist dann:

$$\mathfrak{E}_\varkappa^n = \overline{i}^n \, \Sigma \, \underline{2n}_{n+\tau} \, \varepsilon^{\varkappa\tau} \, P_\tau^{(n)} \, \xi^{n+\tau}.$$

Würde nun zwischen diesen $2n+1$ Polynomen eine lineare Relation bestehen, so müßte:

$$\Sigma \, a_\varkappa \, \Sigma \, \underline{2n}_{n-\tau} \, \varepsilon^{\varkappa\tau} \, P_\tau^{(n)} \, \xi^{n+\tau} \equiv \Sigma \, \underline{2n}_{n-\tau} \, P_\tau^{(n)} \, \xi^{n+\tau} \, (\Sigma \, a_\varkappa \, \varepsilon^{\varkappa\tau}) \equiv 0$$

Digitized by Google

sein, es müßten also zwischen den $2n+1$ Einheitswurzeln die linearen Relationen $\Sigma a_\varkappa \varepsilon^{\varkappa\tau} = 0$ bestehen. Da dies nicht der Fall sein kann, sind die Polynome $\mathfrak{E}_\varkappa^n$ linear unabhängig.

Es bilden demnach die Flächenfunktionen

$$\mathfrak{E}_\varkappa^n \cdot \mathfrak{e}^n = \text{nach (36)} = 2^{2n} \overline{2n}_n P^{(n)}(\cos \gamma_\varkappa),$$

wo $\gamma_\varkappa$ der Winkel der Vektoren $\mathfrak{E}_\varkappa \mathfrak{e}$ ist, ein Fundamentalsystem der Flächenfunktionen $\Phi^{(n)}$ und es ergibt sich der Satz von Laplace:[1])

$$\Phi^{(n)} = \Sigma a_\varkappa P^{(n)}(\cos \gamma_\varkappa).$$

§ 7. Realisierende Formen und Vielbeine.

21. Das Produkt von n realisierenden Quadriken ist eine binäre Form $2n^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\mathfrak{a}^{(n)} = \Sigma A_\tau \xi^{n-\tau} \eta^{n+\tau},$$

deren Koeffizienten, wie man leicht durch den Schluß von n auf $n+1$ zeigt, in der Beziehung

$$\text{(VI)} \qquad A_{-\tau} = \overline{-1}^{n-\tau} \text{ konj. } A_\tau$$

stehen (vgl. Art. 13). Umgekehrt gilt: „Eine Form $2n^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die Eigenschaft (VI) besitzt und die (vgl. Art. 13) „realisierend" genannt werden soll, läßt sich in das Produkt von n realisierenden Quadriken zerlegen."

Denn es gilt zunächst:

a) Sind α, α' die beiden Linearformen:

$$\text{(37)} \qquad \alpha = \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta, \quad \alpha' = \alpha_1' \xi + \alpha_2' = \xi \text{ konj. } \alpha_1 - \eta \text{ konj. } \alpha_2,$$

so ist $i\alpha\alpha'$ eine realisierende Quadrik.

b) Ist $\mathfrak{a}^{(n)}$ eine realisierende Form $2n^{\text{ter}}$ Ordnung und die Linearform α ein Faktor derselben, so ist es auch α'. Denn, ist α Faktor von $\mathfrak{a}^{(n)}$, so muß

$$\Sigma \overline{-1}^{n+\tau} A_\tau \alpha_2^{n+\tau} \alpha_1^{n+\tau} = 0$$

sein. Daher ist auch

$$\Sigma \overline{-1}^{n+\tau} \text{ konj. } A_\tau \alpha_2^{n-\tau} \text{ konj. } \alpha_1^{n-\tau} = 0,$$

[1]) Für die Theorie der binären Formen folgt aus diesem Satze nach dem Obigen: Ist L eine binäre lineare Transformation, deren Potenz L^{2n+2} zur Identität führt, so läßt sich jede Form $2n^{\text{ter}}$ Ordnung linear ableiten aus den n^{ten} Potenzen der Quadriken, die aus einer gegebenen Quadrik $\mathfrak{a}$ durch die Transformationen $L^0, L^1, \ldots L^{2n+1}$ hervorgehen. Nur darf die zweite Überschiebung der Formen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ nicht verschwinden, wo $\mathfrak{b}$ die Quadrik der Deckpunkte von L ist.

Digitized by Google

d. i. aber nach (VI) und (37):

$$\Sigma \overline{-1}^{n+\tau} A_{-\tau} \alpha_1'^{n+\tau} \alpha_2'^{n-\tau} = 0.$$

Vermöge dieses Satzes (*b*) läßt sich nun die Form $\mathfrak{a}^{(n)}$ wie folgt zerlegen:

$$\mathfrak{a}^{(n)} = i\alpha\alpha' i\beta\beta' \ldots = k\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}\ldots,$$

wo nach (*a*) die Quadriken $\mathfrak{a} = i\alpha\alpha'$, $\mathfrak{b} = i\beta\beta', \ldots$ realisieren. Das Produkt $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\ldots$ dieser Quadriken ist nach obigem eine realisierende Form und bei dieser sind der erste und letzte Koeffizient konjugierte Zahlen; damit nun auch die Koeffizienten A_{-n} und A_n von $\mathfrak{a}^{(n)}$ konjugiert sind, muß k Null sein. Man kann also für die realisierende Form $\mathfrak{a}^{(n)}$ setzen:

$$\mathfrak{a}^{(n)} = \mathfrak{a}_{(1)}\,\mathfrak{a}_{(2)} \ldots \mathfrak{a}_{(n)},$$

wo die Quadriken $\mathfrak{a}_{(\mu)}$ realisieren.

22. Da jeder dieser realisierenden Quadriken $\mathfrak{a}_{(\mu)}$ ein reeller Vektor $\mathfrak{a}_{(\mu)}$ zugeordnet ist, so entspricht der Form $\mathfrak{a}^{(n)}$ das Gebilde, das aus diesen n reellen Vektoren besteht.

Es ist aber auch:

$$\mathfrak{a}^{(n)} = k_1\,\mathfrak{a}_{(1)}\,k_2\,\mathfrak{a}_{(2)} \ldots k_n\,\mathfrak{a}_{(n)},$$

wobei $k_1 k_2 \ldots k_n = 1$ ist. Man kann daher der Form $\mathfrak{a}^{(n)}$ auch die n Vektoren $k_\mu\,\mathfrak{a}_{(\mu)}$ zuordnen. Speziell kann man dann die Konstanten k_μ so wählen, daß diese Vektoren $k_\mu\,\mathfrak{a}_{(\mu)}$ alle gleich lang werden. Aber auch diese Zuordnung des Systems dieser n Vektoren zu der Form $\mathfrak{a}^{(n)}$ ist noch nicht eindeutig; denn statt einer geraden Zahl derselben können noch die zu ihnen entgegengesetzt gerichteten genommen werden. „Es soll das Gebilde, das aus n gleichlangen Vektoren besteht, die von einem Punkte ausgehen, als ein n-bein bezeichnet werden; ersetzt man eine gerade Anzahl dieser Vektoren durch ihre entgegengesetzten, so erhält man weitere n-beine, die als dem ersten ‚gleich' angesehen werden sollen." Dann kann gesagt werden: „Jeder realisierenden Form $\mathfrak{a}^{(n)}$ ist ein reelles n-bein zugeordnet." Es soll auch mit $\mathfrak{a}^{(n)}$ bezeichnet werden.

Dieses reelle n-bein $\mathfrak{a}^{(n)}$ hängt von $2n+1$ reellen Konstanten ab; denn die Einheitsvektoren $e_{(\mu)}$, welche die Richtungen der Teilvektoren von $\mathfrak{a}^{(n)}$ haben, geben zusammen $2n$ Konstante und das Produkt der Längen dieser Teilvektoren, das als absoluter Wert des n-beins oder als Größe desselben bezeichnet werden kann, gibt

Digitized by Google

eine weitere Konstante. Die Form $\mathfrak{a}^{(n)}$ des n-beins hat entsprechend $2n+1$ Koeffizienten, die den Relationen (VI) gemäß im ganzen ebenso viele reelle Konstanten enthalten.

Ist $\mathfrak{x}$ ein Vektor mit der Quadrik $\mathfrak{x}$, so bestimmt die Form $\mathfrak{x}^{(n)}$ das „spezielle" n-bein $\mathfrak{x}^n$, das aus dem n-mal gezählten Vektor $\mathfrak{x}$ besteht.

23. Als Beispiel sollen die Vielbeine der reellen binomischen Flächenfunktionen bestimmt werden.

Die Funktion $S_\sigma^{(n)}$, $C_\sigma^{(n)}$ gehören nach (31) zu den Binomen:

$$\overline{-1}^{n-\sigma}\overline{2}\,i^n(\xi^{n-\sigma}+\xi^{n+\sigma}),\quad \overline{-1}^{n-\sigma}\overline{2}\,i^{n+1}(\xi^{n-\sigma}-\xi^{n+\sigma}),$$

die nicht realisieren, weshalb auch diese Funktionen nicht reell sind. Multipliziert man aber die letzten Binome mit $-2^{n-\sigma+1}\overline{i}^\sigma$ resp. $2^{n-\sigma+1}\overline{i}^\sigma$ so erhält man die realisierenden Binome:

$$(-2i)^{n-\sigma}i(\xi^{n+\sigma}-\xi^{n-\sigma}),\quad (-2i)^{n-\sigma}(\xi^{n+\sigma}+\xi^{n-\sigma}),$$

welche dann den reellen Flächenfunktionen

$$\Sigma_\sigma^{(n)}=-2^{n-\sigma+1}\overline{i}^\sigma S_\sigma^{(n)},\quad K_\sigma^{(n)}=2^{n-\sigma+1}\overline{i}^{n-\sigma}C_\sigma^{(n)}, \tag{38}$$

entsprechen, deren n-beine nunmehr bestimmt werden sollen.

Die letzten Polynome sind auch resp. gleich:

$$(-2i\xi)^{n-\sigma}i(\xi^{2\sigma}-1)=\mathfrak{k}^{n-\sigma}\mathfrak{a}^{(\sigma)},\quad (-2i\xi)^{n-\sigma}(\xi^{2\sigma}+1)=\mathfrak{k}^{n-\sigma}\mathfrak{b}^{(\sigma)},$$

wobei die Binome

$$\mathfrak{a}^{(\sigma)}=i(\xi^{2\sigma}-1),\quad \mathfrak{b}^{(\sigma)}=\xi^{2\sigma}+1$$

ebenfalls realisieren. Es ist nun, wenn $\varepsilon=e^{\pi i\overline{\sigma}}$ gesetzt wird:

$$\mathfrak{a}^{(\sigma)}=i(\xi^2-1)\,i(\overline{\varepsilon}\,\xi^2-\varepsilon)(\overline{\varepsilon}^2\,\xi^2-\varepsilon^2)\ldots i(\overline{\varepsilon}^{(\sigma-1)}\xi^2-\varepsilon^{\sigma-1}),$$

worin das Polynom zweiten Grades:

$$i(\overline{\varepsilon}^\mu\,\xi^2-\varepsilon^\mu)=e^{(-\mu\overline{\sigma}+\overline{2})\pi i}\,\xi^2+e^{(\mu\overline{\sigma}-\overline{2})\pi i}$$

realisiert und den Einheitsvektor der ij-Ebene bestimmt, welcher den Winkel $\mu\pi\overline{\sigma}$ mit dem Vektor j einschließt, dieser Winkel gemessen im negativen Drehsinne, d. h. entgegen der Drehung von i nach j.

Weiters ist durch die lineare Transformation (der Determinante 1):

$$\xi=e^{\overline{2}i\psi}\,\xi',\quad \eta=e^{\overline{2}i\psi}\,\eta'$$

Digitized by Google

eine Rotation gegeben (siehe Art. 18), welche die Vektoren mit den Polynomen:

$$\nu e^{i\varphi}\xi^2 - 2i\mu\xi + \nu e^{-i\varphi},\ \nu e^{i(\varphi+\psi)}\xi^2 - 2i\mu\xi + e^{-i(\varphi+\psi)}$$

den ersten in den zweiten überführt; diese Rotation erfolgt um die $\mathfrak{k}$-achse im positiven Drehsinne um den Winkel ψ.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich demnach: „Die n-beine der reellen Flächenfunktionen $\Sigma_\sigma^{(n)}$, $K_\sigma^{(n)}$ bestehen aus dem $(n-\sigma)$-mal zu zählenden Vektor $\mathfrak{k}$ und aus dem σ-bein $\mathfrak{a}^{(\sigma)}$ resp. $\mathfrak{b}^{(\sigma)}$. Die σ Vektoren von $\mathfrak{a}^{(\sigma)}$ entstehen aus $\mathfrak{j}$ durch Drehungen um $\mathfrak{k}$ im Drehsinne von $\mathfrak{j}$ nach $\mathfrak{i}$ und um die Winkel $0, \overline{\sigma}\pi, 2\overline{\sigma}\pi, \ldots (\sigma-1)\overline{\sigma}\pi$.. Das σ-bein $\mathfrak{b}^{(\sigma)}$ entsteht aus $\mathfrak{a}^{(\sigma)}$ durch Drehung im entgegengesetzten Sinne um den Winkel $\overline{2\sigma}\pi$."

Ist $\sigma \equiv \pm 1 \bmod 4$, so kann man auch, ohne das σ-bein $\mathfrak{a}^{(\sigma)}$ zu ändern (siehe Art. 22), die Vektoren desselben, die mit $\mathfrak{j}$ die Winkel $\overline{\sigma}\pi, 3\overline{\sigma}\pi, \ldots (\sigma-2)\overline{\sigma}\pi$ resp. $0, 2\overline{\sigma}\pi, \ldots (\sigma-1)\overline{\sigma}\pi$ einschließen, durch die zu ihnen entgegengesetzten ersetzen. $\mathfrak{a}^{(\sigma)}$ besteht dann aus den Radien des regulären σ-ecks, welches dem Einheitskreise der $\mathfrak{i}\mathfrak{j}$-ebene eingeschrieben ist, und das den Endpunkt des Vektors $\pm\mathfrak{j}$ zur Ecke hat; $\mathfrak{b}^{(\sigma)}$ besteht aus den Radien, die auf den Seiten dieses Polygons senkrecht stehen.

§ 8. Produkte von Vielbeinen.

24. „Wenn die Formen $\mathfrak{a}^{(n)}$, $\mathfrak{b}^{(m)}$ realisieren, so realisiert auch ihre k^{te} Überschiebung, d. i. die Form $2(n+m-k)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\underline{2n-k}\,\underline{2m-k}\,\overline{\underline{2n}\,\underline{2m}}\,\Sigma\,\overline{-1}^{\lambda}\,\underline{k}_{\lambda}\,D_{\xi}^{k}{}^{k-\lambda}{}_{\eta}{}^{\lambda}\,\mathfrak{a}^{(n)}\,D_{\xi}^{k}{}^{\lambda}{}_{\eta}{}^{k-1}\,\mathfrak{b}^{(m)}\ "$$

Denn stellt man (nach Art. 21) $\mathfrak{a}^{(n)}$, $\mathfrak{b}^{(m)}$ als Produkte realisierender Quadriken dar, so ist die k^{te} Überschiebung von $\mathfrak{a}^{(n)}$ und $\mathfrak{b}^{(m)}$ (nach dem Satze über die Endlichkeit des Systems einer Anzahl von Quadriken) darstellbar als ganze rationale Funktion der Formen des Systems dieser Quadriken, wobei die Koeffizienten dieser Funktionen reelle Zahlen sind. Die Formen des Systems sind nun bekanntlich die folgenden:

a) Die Quadriken selbst, welche realisieren.

b) Die zweiten Überschiebungen der Quadriken, das sind aber die Bilineale der Polynome zweiten Grades dieser Quadriken (Art. 3), also reelle Zahlen.

Digitized by Google

c) Die ersten Überschiebungen der Quadriken, das sind Quadriken, welche realisieren; denn sind

$$\mathfrak{x} = (x + iy)\,\xi^2 - 2iz\,\xi\eta + (x - iy)\,\eta^2,$$
$$\mathfrak{y} = (x' + iy')\,\xi^2 - 2iz'\,\xi\eta + (x' - iy')\,\eta^2$$

zwei realisierende Quadriken, so ist ihre erste Überschiebung:

$$(39) \qquad (x'' + iy'')\,\xi^2 - 2iz''\,\xi\eta + (x'' - iy'')\,\eta^2,$$
$$x'' = y'z'' - z'y'', \quad y'' = z'x'' - x'z'', \quad z'' = x'y'' - y'x''.$$

d) Die zweiten Überschiebungen der Quadriken *a*) und *c*), die nach *b*) reelle Zahlen sind.

Da nun eine ganze rationale Funktion (mit reellen Koeffizienten) dieser Formen eine Summe von Produkten reeller Zahlen mit realisierenden Quadriken ist und diese Produkte (nach Art. 21) realisieren, so realisiert auch die k^{te} Überschiebung der Formen $\mathfrak{a}^{(n)}$, $\mathfrak{b}^{(m)}$.

25. Diese Überschiebung, die also eine realisierende Form $2(n + m - k)^{ter}$ Ordnung ist, bestimmt ein $(n + m - k)$-bein, das „k^{tes} Produkt der Vielbeine $\mathfrak{a}^{(n)}$, $\mathfrak{b}^{(m)}$“ genannt und mit $\mathfrak{a}^{(n)}_{\,k}\,\mathfrak{b}^{(m)}$ bezeichnet werden soll.

Speziell ist das $2n^{te}$ Produkt $\mathfrak{a}^{(n)}_{\,2n}\mathfrak{b}^{(n)}$ zweier n-beine identisch mit dem im Art. 3 definierten Bilineal der Polynome der Formen $\mathfrak{a}^{(n)}$, $\mathfrak{b}^{(n)}$; es soll, da es skalar ist, „skalares Produkt der n-beine $\mathfrak{a}^{(n)}$, $\mathfrak{b}^{(n)}$“ genannt und kürzer mit $\mathfrak{a}^{(n)} \cdot \mathfrak{b}^{(n)}$ bezeichnet werden.

Es ist z. B. das skalare Produkt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ der beiden Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ (Einbeine) identisch mit dem doppelten, gewöhnlich als „skalar“ bezeichneten Produkte [siehe Art. 24 *b*)]. Das erste Produkt $\mathfrak{a}\,;\,\mathfrak{b}$ der Vektoren ist nach Art. 24 *c*) identisch mit deren vektorischem Produkte.[1])

---

[1]) Ersetzt man die Form $\mathfrak{a}^{(n)}$ durch das Polynom $p_0 = \Sigma \underline{2n}_{\tau}\, a_\tau \xi^{2n-\tau}$ und setzt:

$$p_1 = \overline{2n}\, D_\xi p_0,\ p_2 = \overline{2n-1}\, D_\xi p_1,\ p_3 = \overline{2n-2}\, D_\xi p_2, \ldots,$$

so ist bekanntlich das Polynom der k^{ten} Überschiebung der zu den Polynomen p_0, q_0 gehörigen Formen $\mathfrak{a}^{(n)}$, $\mathfrak{b}^{(m)}$:

$$\Sigma\, \overline{-1}^{\lambda}\, \underline{k}_{\lambda}\, p_\lambda\, q_{k-\lambda}.$$

Man hat daher z. B. für die Vektoren mit den Polynomen $p_0 = \mathfrak{x}$, $q_0 = \mathfrak{y}$ (Art. 39) das Polynom des Produktes $\mathfrak{x}\,;\,\mathfrak{y}$ gleich $p_0 q_1 - p_1 q_0$, identisch mit (10), u. das Produkt $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = p_0 q_2 - 2p_1 q_1 + p_2 q_0 = 2(xx' + yy' + zz')$ wie im Art. 3.

Digitized by Google

26. Nach Art 17 und 18 gilt: „Das skalare Produkt $\mathfrak{a}^{(n)} \cdot \mathfrak{x}^n$ des n-beins $\mathfrak{a}^{(n)}$ und des speziellen n-beins $\mathfrak{x}^n$ ist eine Kugelfunktion und das skalare Produkt $\mathfrak{a}^{(n)} \cdot \mathfrak{e}^n$, wo $\mathfrak{e}$ der Einheitsvektor mit den Polarkoordinaten ϑ, φ ist, ist eine Flächenfunktion $\Phi^{(n)}$.“

Zerfällt das n-bein in die n Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_{(1)}, \ldots \mathfrak{e}_{(n)}$, ist es ein „Einheits-$n$-bein“ von der Größe 1 (siehe Art. 22), so soll seine Flächenfunktion mit

$$E^{(n)} = (\mathfrak{e}_{(1)}, \ldots \mathfrak{e}_{(n)}) \cdot \mathfrak{e}^n$$

bezeichnet werden. Die allgemeine Flächenfunktion $\Phi^{(n)}$ unterscheidet sich, bei beliebigen $\mathfrak{e}_{(\mu)}$, von dieser nur um einen konstanten Faktor:

$$\Phi^{(n)} = k\, E^{(n)}; \tag{40}$$

hiebei ist der absolute Wert von k identisch mit der Größe des n-beins $\mathfrak{a}^{(n)}$.

Die einfache Flächenfunktion $P^{(n)}$ gehört, weil nach (V):

$$P^{(n)} = \overline{2}^{2n}\, \underline{2n}\, \mathfrak{k}^n \cdot \mathfrak{e}^n$$

ist, zu einem speziellen n-bein, das n-mal den Vektor $\overline{4}\, \underline{2n}\, \mathfrak{k}$ enthält.

Eine Doppelkugelfunktion (Art. 6) ist bestimmt durch ein n-bein und ein $(n-1)$-bein, eine dreifache Kugelfunktion durch ein weiteres $(n-2)$-bein u. s. w.

27. Um schon hier eine Anwendung der nichtskalaren Produkte zweier Vielbeine zu geben, werde der Vektor: Grad $X^{(n)}$ bestimmt. Nach (4) ist

$$D_x X^{(n)} = D_x \mathfrak{a}^{(n)} \cdot \mathfrak{x}^n = n\, \mathfrak{a}^{(n)} \cdot (\mathfrak{x}^{n-1}\, \mathfrak{i}).$$

Nun ist, wie aus einem einfachen Satze über Überschiebungen folgt:

$$\mathfrak{a}^{(n)} \cdot (\mathfrak{x}^{n-1}\, \mathfrak{i}) = (\mathfrak{a}^{(n)}_{2n \dot{-}_2} (\mathfrak{x}^{n-1}) \cdot \mathfrak{i},$$

also ist:

$$D_x\, \overline{2n}\, X^{(n)} = \overline{2}\, (\mathfrak{a}^{(n)}_{2n \dot{-}_2} \mathfrak{x}^{n-1}) \cdot \mathfrak{i} = \overline{2}\, \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{i} = v_x,$$

wo v_x die erste Koordinate des Vektors $\mathfrak{v} = \mathfrak{a}^{(n)}_{2n \dot{-}_2} \mathfrak{x}^{n-1}$ ist; daher: „Das Produkt $2n\, \mathfrak{a}^{(n)}_{2n-2} \mathfrak{x}^{n-1}$ ist ein Vektor, der gleich ist dem Gradienten der Kugelfunktion $X^{(n)}$, die zum n-bein $\mathfrak{a}^{(n)}$ gehört.“

Allgemeiner folgt aus (16):

$$\text{Grad}\, r^\sigma X^{(n)} = 2n r^\sigma \mathfrak{a}^{(n)}_{2n \dot{-}_2} \mathfrak{x}^{n-1} + \sigma r^{\sigma-2} X^{(n)} \mathfrak{x}.$$

Digitized by Google

§ 9. Überschiebungen von Produkten von Quadriken und Maxwells Cosinusformel.

28. Gesucht wird der Ausdruck der $2n^{\text{ten}}$ Überschiebung $\mathfrak{a}^n \cdot \mathfrak{b}^n$ der n^{ten} Potenzen der Quadriken $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ durch die Invarianten $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ des Systems dieser Quadriken.

Hiezu werde $\mathfrak{a}\,\overline{\alpha} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{b}\,\overline{\beta} = \mathfrak{e}$ gesetzt, wobei $2\alpha^2 = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}$, $2\beta^2 = \mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b}$ ist und $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{e}$ Einheitsvektoren sind.

Ist dann ψ der Winkel dieser Vektoren, so ist:

$$2\cos\psi = \mathfrak{E}\cdot\mathfrak{e} = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}\,\overline{\alpha\beta}. \tag{41}$$

Aus (36), (34) ergibt sich nun:

$$\mathfrak{a}^n\cdot\mathfrak{b}^n\overline{\alpha\beta}^n = \mathfrak{E}^n\cdot\mathfrak{e}^n = 2^n\,\underline{\underline{2n}}_n\,P^{(n)}(\cos\psi)$$

$$= 2^n\,\Sigma\,\overline{-1}^s\,\underline{\underline{n}}_s\,\underline{\underline{n}}_{-2s}\,\underline{\underline{2n}}_{-2s}\,(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}\,\overline{\alpha\beta}^{n-2s}).$$

Daher ist die gesuchte Formel:

$$\mathfrak{a}^n\cdot\mathfrak{b}^n = \Sigma\,\overline{-1}^s\,\underline{\underline{n}}_s\,\underline{\underline{n}}_{-2s}\,\underline{\underline{2n}}_{-2s}\,(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a})^s(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b})^s(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})^{n-2s}. \tag{42}$$

Es läßt sich aber $\mathfrak{a}^n\cdot\mathfrak{b}^n$ auch allein durch $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ und die Resultante $R = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b} - (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})^2$ ausdrücken. Es ist nämlich nach (41):

$$\sin^2\psi = R\,\overline{4\alpha^2\beta^2},$$

daher folgt nach (21), (36):

$$\mathfrak{a}^n\cdot\mathfrak{b}^n = 2^n\,\underline{\underline{2n}}_n\,\Sigma\,\overline{-4}^\sigma\,\underline{\underline{n}}_{-2s}\,\underline{\underline{2s}}_s\,(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})^{n-2s}R^s. \tag{43}$$

29. Weiters soll der Ausdruck der $2n^{\text{ten}}$ Überschiebung $(\mathfrak{a}_{(1)}\ldots\mathfrak{a}_{(n)})\cdot\mathfrak{b}^n$ durch die Invarianten des Systems der $n+1$ Quadriken $\mathfrak{a}_{(\mu)}$, $\mathfrak{b}$ gefunden werden. Hiezu wende man, wenn

$$\mathfrak{a}_{(\mu)} = \mathfrak{a}_{(\mu)1}\,\xi^2 + 2\,\mathfrak{a}_{(\mu)2}\,\xi\eta + \mathfrak{a}_{(\mu)3}\,\eta^2$$

ist, in (42) beiderseits die Aronholdschen Prozesse:

$$\mathfrak{a}_{(\mu)1}\,D_{\mathfrak{a}_1} + \mathfrak{a}_{(\mu)2}\,D_{\mathfrak{a}_2} + \mathfrak{a}_{(\mu)3}\,D_{\mathfrak{a}_3}$$

an, wodurch man erhält:

$$\underline{n}\,(\mathfrak{a}_{(1)}\ldots\mathfrak{a}_{(n)})\cdot\mathfrak{b}^n = \Sigma\,\overline{-2}^s\,\underline{s}\,\underline{\underline{n-2s}}_s\,\underline{\underline{n}}_{-2s}\,\underline{\underline{2n}}_{-2s}\,A_s,$$

Digitized by Google

worin A_s die Summe der Produkte ist, die man aus:

$$\mathfrak{a}_{(1)} \cdot \mathfrak{a}_{(2)}\, \mathfrak{a}_{(3)} \cdot \mathfrak{a}_{(4)} \cdots \mathfrak{a}_{(2s-1)} \cdot \mathfrak{a}_{(2s)}\, \mathfrak{a}_{(2s+1)} \cdot \mathfrak{b} \ldots \mathfrak{a}_{(n)} \cdot \mathfrak{b}\,(\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b})$$

durch Permutation der Indizes erhält. Daher ergibt sich:

$$(\mathfrak{a}_{(1)} \ldots \mathfrak{a}_{(n)}) \cdot \mathfrak{b}^n = \underline{n}\, \underline{\overline{2n}}\, \Sigma \overline{-1}^s\, 2^s\, \underline{\underline{2n-2s}}\, \underline{\overline{n-s}}\, A_s$$

$$(44) \qquad = \Sigma \overline{-1}^s\, \overline{2n-2s+1} \ldots \overline{2n-1}\, A_s.$$

29. Ersetzt man nun in (44) die Formen $\mathfrak{a}_{(\mu)}$, $\mathfrak{b}$ resp. durch die der Punkte $e_{(\mu)}$, e der Einheitskugel, so erhält man wegen

$$e \cdot e = 2,\ e_{(\mu)} \cdot e = 2 \cos (e_{(\mu)} \cdot e),\ e_{(\lambda)} \cdot e_{(\nu)} = 2 \cos (e_{(\lambda)}, e_{(\nu)})$$

die Formel (siehe Art. 26):

$$E^{(n)} = (e_{(1)} \ldots e_{(n)}) \cdot e^n = 2^n\, \overline{n}\, \underline{\overline{2n}}\, \Sigma \overline{-1}^s\, 2^s\, \underline{\underline{2n-2s}}\, \underline{\overline{n-s}}\, C_s$$

$$(\text{VII}) \qquad = 2^n \Sigma \overline{-1}^s\, \overline{2n-2s+1} \ldots \overline{2n-1}\, C_s,$$

wo C_s die Summe ist der n-Produkte von s der $\cos (e_{(\lambda)}, e_{(\nu)})$ und $n-2s$ der $\cos (e_{(\mu)}, e)$ mit Indizes, die eine Permutation bilden.

30. Maxwell definiert l. c. p. 194 die Flächenfunktion $Y^{(n)}$ durch:

$$(45) \qquad Y^{(n)} = \overline{-1}^n\, \underline{\overline{n}}\, r^{n+1} D_{h_1} D_{h_2} \ldots D_{h_n} \overline{r},$$

wo h_μ Richtungen sind. Diese Funktion gibt mit einer Konstanten multipliziert die allgemeine Flächenfunktion. „Wenn nun $e_{(\mu)}$ resp. e die Einheitsvektoren sind, welche die Richtungen $h_{(\mu)}$ resp. die Richtung h des Vektors $o\mathfrak{x}$ haben, so gilt:

$$(\text{VII}') \qquad Y^{(n)} = \overline{2}^{2n}\, \underline{\underline{2n}}_{n}\, E^{(n)},$$

wo $E^{(n)}$ die in Art. 26 definierte Flächenfunktion ist, die zu dem Einheits-n-bein mit den Teilvektoren $e_{(1)} \ldots e_{(n)}$ gehört."

Denn es ist nach Maxwell p. 199:

$$Y^{(n)} = \Sigma \overline{-1}^s\, 2^{n-s}\, \overline{2n-2s}\, \underline{\overline{n}}\, \underline{\overline{n-s}}\, \Gamma_s,$$

wo Γ_s die Summe ist der n-Produkte von s der $\cos (h_{(\mu)}, h)$ (h ist die Richtung des Vektors $\overline{o\mathfrak{x}}$) und $n-2s$ der $\cos (h_{(\lambda)}, h_{(\nu)})$ mit Indizes, die eine Permutation bilden. Wenn daher als Richtungen $h_{(\mu)}$ die der Vektoren $e_{(\mu)}$ der Funktion $E^{(n)}$ gewählt werden, so wird Γ_s mit C_s identisch. Daher sind dann die rechten Seiten von (VII) und (45') nur um einen Zahlenfaktor verschieden, so daß sich (VII') ergibt.

Digitized by Google

Aus (VII'), (45) folgt weiters die Gleichung:

$$(e_{(1)} \dots e_{(n)}) \cdot e^n = \overline{-1}^n \, 2^n r^{n+1} \overline{1\,3\,5} \dots \overline{2n-1} \, D_{e_{(1)}} D_{e_{(2)}} \dots D_{e_{(n)}} \bar{r};$$

daher: „Die Richtungen der Teilvektoren des n-beins $\mathfrak{a}^{(n)}$, das eine Kugelfunktion n^{ter} Ordnung bestimmt, sind identisch mit den Richtungen, nach welchen man $\bar{r}$ differentieren muß, um diese Kugelfunktion zu erhalten."

§ 10. Kugelfunktionen zweier Punkte und zweiseitige Kugelfunktionen.

31. Es sei als Kugelfunktion der zwei Punkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$ ein Polynom der Koordinaten dieser Punkte bezeichnet, das in den Koordinaten jedes Punktes homogen ist und nach jeder der Koordinatenreihen der Gleichung $\Delta = 0$ genügt. Sind dann $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$ die Quadriken der Punkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, so muß diese Funktion, wenn sie in den Koordinatenreihen n^{ter} resp. m^{ter} Dimension ist, dargestellt werden können als die $2n^{\text{te}}$ Überschiebung einer Form $2n^{\text{ter}}$ Ordnung über die n^{te} Potenz der Quadrik $\mathfrak{x}$ und ebenso als die $2m^{\text{te}}$ Überschiebung einer Form $2m^{\text{ter}}$ Ordnung über die m^{te} Potenz der Quadrik $\mathfrak{x}'$ (vgl. Art. 17). Ist daher:

$$\mathfrak{r}^{(n)} \mathfrak{f}^{(m)} = r_\xi^{2n} s_{\xi'}^{2m} \tag{46}$$

eine doppeltbinäre Form mit den Veränderlichen ξ, η und ξ', η' und $(2n+1)(2m+1)$ Konstanten, wo in bekannter Weise erst Koeffizienten der Formen $\mathfrak{r}^{(n)} = r_\xi^{2n}$, $\mathfrak{f}^{(m)} = s_{\xi'}^{2m}$ unsymbolische Bedeutung haben, so ergibt sich als allgemeine Kugelfunktion der zwei Punkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$ die Funktion:[1])

$$\mathfrak{r}^{(n)} \cdot \mathfrak{x}^n \mathfrak{f}^{(m)} \cdot \mathfrak{x}'^{(m)}. \tag{47}$$

32. „Soll die Kugelfunktion der zwei Punkte reell sein, so muß ihre doppeltbinäre Form realisieren, d. h. es müssen ihre symbolischen Faktoren $\mathfrak{r}^{(n)}$, $\mathfrak{f}^{(m)}$ realisierende Formen sein. Denn eine solche Form ordnet jedem reellen Vektor $\mathfrak{x}$ ein reelles m-bein zu, nämlich $\mathfrak{r}^{(n)} \cdot \mathfrak{x}^n \mathfrak{f}^{(m)}$, da $\mathfrak{r}^{(n)} \cdot \mathfrak{x}^n$ reell ist und $\mathfrak{f}^{(m)}$ realisiert.

Man kann diese Funktion als zugeordnet betrachten zu dem symbolischen Produkt $\mathfrak{r}^{(n)} \mathfrak{f}^{(m)}$ der symbolischen Vielbeine $\mathfrak{r}^{(n)}$, $\mathfrak{f}^{(m)}$, welche zu den gleichbezeichneten realisierenden Formen

[1]) Es soll die k^{te} Überschiebung der Formen a_ξ^n, b_ξ^m statt wie gebräuchlich mit $(a_\xi^n, b_\xi^m)^k$ kürzer und in Übereinstimmung mit dem Voranstehenden (Art. 25) mit $a_\xi^n {}_k\, b_\xi^m$ bezeichnet und auch für $(a_\xi^n, b_\xi^n)^n = a_\xi^n {}_n\, b_\xi^n$ kürzer $a_\xi^n \cdot b_\xi^n$ geschrieben werden.

Digitized by Google

gehören. Diese symbolischen Vielbeine haben dann die Produkte $\mathfrak{r}^{(n)}_{\ k}\{^{(m)} = \mathfrak{t}^{(n+m-k)}$, welche den Elementarkovarianten:[1])

$$\mathfrak{t}^{(n+m-k)} = (rs)^k r_\xi^{2n-k} s_\xi^{2m-k} \tag{48}$$

der doppeltbinären Form (46) entsprechen. Diese Vielbeine $\mathfrak{t}^{(n+m-k)}$ können als Elementarvielbeine der Kugelfunktion zweier Punkte bezeichnet werden.

33. „Die Kugelfunktion zweier Punkte läßt sich entwickeln nach skalaren Produkten ihrer Elementarvielbeine mit den Vielbeinen $\mathfrak{x}^n_{\ k}\,\mathfrak{x}'^m = \mathfrak{z}^{(n+m-k)}$ (das sind die Produkte der speziellen $\mathfrak{x}^n, \mathfrak{x}'^m$) wie folgt (wobei $n+m=s$ gesetzt ist):

$$\text{(VIII)}\quad \mathfrak{r}^{(n)}\cdot\mathfrak{x}^n\{^{(m)}\cdot\mathfrak{x}^m = \Sigma\, a_k\, \mathfrak{t}^{(s-k)}\cdot\mathfrak{z}^{(s-k)},\quad a_k = \underline{2n}_k\underline{2m}_k\overline{\underline{2s+1-k}}_k.$$

Um dies zu zeigen, braucht man nur die bekannte Clebsch-Gordansche Reihenentwicklung[2]) doppeltbinärer Formen in etwas zu modifizieren. Nach dieser Entwicklung ist:

$$r_x^\alpha s_y^\beta = \Sigma\, t^{(k)}_{y^{n-k}} (xy)^k, \tag{49}$$

wo $t^{(k)}$ die Elementarkovariante $(rs)^k r_x^{\alpha-k} s_x^{\beta-k}$ der doppeltbinären Form und $t^{(k)}_{y^{n-k}}$ die $(n-k)^{\text{te}}$ Polare $(rs)^k (r_x^{\alpha-k} s_x^{\beta-k})_{y^{n-k}}$ dieser Elementarkovariante ist. Setzt man nun $x_1 = a_2$, $x_2 = -a_1$, $y_1 = b_2$, $y_2 = -b_1$, so übergeht $(xy) = x_1 y_2 - x_2 y_1$ in (ab), und die letztgenannte Polare wird zur $(\alpha+\beta-2k)^{\text{ten}}$ Überschiebung:

$$[(ab)^k t^{(k)}]\cdot[a_x^{\alpha-k} b_x^{\beta-k}] = t^{(k)}\cdot(ab)^k a_x^{\alpha-k} b_x^{\beta-k} = t^{(k)}\cdot c^{(k)},$$

wo $c^{(k)} = a^\alpha_{x\,k}\, b_x^\beta$ ist. Die Gleichung (49) wird somit zu:[3])

$$(ra)^\alpha (sb)^\beta = \Sigma\, \underline{\alpha}_k \underline{\beta}_k \overline{\underline{\alpha+\beta+1-k}}_k\, t^{(k)}\cdot c^{(k)}. \tag{50}$$

Werden nun hierin die Formen $r_x^\alpha s_y^\beta$, a_x^α, b_x^β resp. ersetzt durch die Formen $r_\xi^{2n} s_{\xi'}^{2m}$, $\mathfrak{x}^n$, $\mathfrak{x}'^m$, so ergibt sich Formel (VIII).

34. Fallen in der eben definierten Kugelfunktion zweier Punkte die beiden Punkte in $\mathfrak{x}$ zusammen, wird also $x'=x$, $y'=y$, $z'=z$ gesetzt, so soll die entstehende Funktion „zweiseitige Kugelfunktion von x, y, z“ genannt und mit $X^{(n,m)}$ bezeichnet werden.

Man hat demnach für diese Funktion:

$$X^{(n,m)} = \mathfrak{r}^{(n)}\cdot\mathfrak{x}^n\{^{(m)}\cdot\mathfrak{x}^m.$$

[1]) Siehe Gordan l. c. p. 80.
[2]) Siehe Gordan l. c. p. 86.
[3]) Vgl. E. Waelsch, „Über Reihenentwicklung mehrfachbinärer Formen“, Wiener Ber. Bd. 113, Abt. II*a*, p. 1209.

Digitized by Google

Nun ist aber das Vielbein $\mathfrak{z}^{(s-k)} = \mathfrak{x}^n_k \mathfrak{x}^m$ entweder $= 0$, wenn k ungerade oder ein spezielles $(s-k)$-bein, das $(s-k)$-mal den Vektor $\mathfrak{x}$ enthält, wenn k gerade ist. Denn es gilt für die $k = 2\rho^{\text{te}}$ Überschiebung der Potenzen $\mathfrak{x}^n, \mathfrak{x}^m$ der Quadrik $\mathfrak{x}$ die Formel von Gordan und Berzolari:

$$\mathfrak{x}^n_{2\varrho}\mathfrak{x}^m = b_\varrho (\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x})^\varrho \mathfrak{x}^{s-2\varrho}, \tag{51}$$

$$b_\varrho = 2^\varrho \underline{n}_\varrho \underline{m}_\varrho \underline{s-\rho}_\varrho \underline{\overline{2n}}_{2\varrho} \underline{\overline{2m}}_{2\varrho} \underline{\overline{2\rho}}_\varrho .$$

Daher ergibt sich, wenn $\mathfrak{x}$ die Quadrik des Punktes $\mathfrak{x}$ also nach (11) $\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x} = 2r^2$ wird, die folgende Entwicklung der zweiseitigen Kugelfunktion $X^{(n,m)}$ nach den Kugelfunktionen $X^{(s-2\varrho)}$ ihrer Elementarvielbeine $\mathfrak{t}^{(s-2\varrho)} = \mathfrak{r}^n_{2\varrho}\mathfrak{f}^{(m)}$ als:

$$X^{(n,m)} = \mathfrak{r}^{(n)}\cdot\mathfrak{x}^n\mathfrak{f}^{(m)}\cdot\mathfrak{x}^m = \Sigma\, c_{2\varrho}\, r^{2\varrho} X^{(s-2\varrho)}_{\mathfrak{t}} \tag{IX}$$

$$c_{2\varrho} = 2^\varrho a_{2\varrho} b_\varrho = 2^{2\varrho} \underline{n}_\varrho \underline{m}_\varrho \underline{s-\rho}_\varrho \underline{\overline{2\rho}}_\varrho \underline{\overline{2s+1-2\rho}}_{2\varrho},$$

wobei $X^{(s-2\varrho)}_{\mathfrak{t}}$ die Kugelfunktion $\mathfrak{t}^{(s-2\varrho)}\cdot\mathfrak{x}^{(s-2\varrho)}$ ist.

Es ist auch, wenn $2(s+1-2\rho) = p$ gesetzt wird:

$$c_0 = 1,\ c_{2\varrho} = 2^\varrho \underline{n}\,\underline{m}\,\underline{\rho}\,\underline{\overline{n-\rho}}\,\underline{\overline{m-\rho}}\,\overline{p+1}\,\overline{p+2}\ldots\overline{p+2\rho-1}.$$

Für die zweiseitige Flächenfunktion $\Phi^{(n,m)}$ ergibt sich durch Division von (IX) mit r^s die Entwicklung:

$$\Phi^{(n,m)} = \mathfrak{r}^{(n)}\cdot\mathfrak{e}^n\mathfrak{f}^{(m)}\cdot\mathfrak{e}^m = \Sigma\, c_{2\varrho}\, \Phi^{(s-2\varrho)}_{\mathfrak{t}}, \tag{IX'}$$

wobei $\Phi^{(s-2\varrho)}_{\mathfrak{t}}$ die Flächenfunktion $\mathfrak{t}^{(s-2\varrho)}\cdot\mathfrak{e}^{(s-2\varrho)}$ ist.

§ 11. Entwicklung des Produktes zweier Kugelfunktionen nach solchen.

35. Ersetzt man in (IX) die symbolischen Formen $\mathfrak{r}^{(n)}, \mathfrak{f}^{(m)}$ durch die unsymbolischen $\mathfrak{a}^{(n)}, \mathfrak{b}^{(m)}$, so übergeht die linke Seite in das Produkt $\mathfrak{a}^{(n)}\cdot\mathfrak{x}^{(n)}\mathfrak{b}^{(m)}\cdot\mathfrak{x}^m$, ferner das Elementarvielbein $\mathfrak{t}^{(s-2\varrho)}$ von $X^{(n,m)}$ in das k^{te} Produkt $\mathfrak{p}^{(s-2\varrho)} = \mathfrak{a}^{(n)}_{2\varrho}\mathfrak{b}^{(m)}$ der Vielbeine $\mathfrak{a}^{(n)}, \mathfrak{b}^{(m)}$, so daß sich ergibt: „Das Produkt der beiden Kugelfunktionen $X^{(n)} = \mathfrak{a}^{(n)}\cdot\mathfrak{x}^n, X^{(m)} = \mathfrak{b}^{(m)}\cdot\mathfrak{x}^m$, die resp. zu den Vielbeinen (Formen) $\mathfrak{a}^{(n)}, \mathfrak{b}^{(m)}$ gehören, läßt sich entwickeln nach Kugelfunktionen wie folgt:

$$X^{(n)}X^{(m)} = \mathfrak{a}^{(n)}\cdot\mathfrak{x}^n\mathfrak{b}^{(m)}\cdot\mathfrak{x}^m = \Sigma\, c_{2\varrho}\, X^{(s-2\varrho)}_{\mathfrak{p}}, \tag{X}$$

Digitized by Google

wobei $X_p^{(s-2\varrho)}$ die Kugelfunktion ist, welche zu dem Produkte $\mathfrak{p}^{(s-2\varrho)} = \mathfrak{a}^{(n)}_{2\varrho}\,\mathfrak{b}^{(m)}$ der Vielbeine (der $2\rho^{\text{ten}}$ Überschiebung der Formen) $\mathfrak{a}^{(n)}$, $\mathfrak{b}^{(m)}$ gehört.

36. Für das Produkt der Flächenfunktionen $\Phi^{(n)}, \Phi^{(m)}$ der Vielbeine $\mathfrak{a}^{(n)}, \mathfrak{b}^{(m)}$ hat man ebenso aus (IX) die Entwicklung nach Flächenfunktionen:

$$\text{(XI)} \qquad \Phi^{(n)}\Phi^{(m)} = \mathfrak{a}^{(n)}\cdot\mathfrak{e}^n\,\mathfrak{b}^{(m)}\cdot\mathfrak{e}^m = \Sigma\, c_{2\varrho}\,\Phi_{\mathfrak{p}}^{(s-2\varrho)},$$

wobei $\Phi_{\mathfrak{p}}^{(s-2\varrho)} = \mathfrak{p}^{(s-2\varrho)}\cdot\mathfrak{e}^{s-2\varrho}$ die Flächenfunktion des Produktes $\mathfrak{p}^{(s-2\varrho)}$ ist.

Wären z. B. die beiden Flächenfunktionen identisch mit der Funktion $\Phi^{(2)}$ zweiter Ordnung, die zur Form vierter Ordnung f gehört, und ist $h = {}^1/_2 f_{\dot 2} f$ die Hessesche Form, $g_2 = {}^1/_2 f\cdot f$ die Invariante zweiten Grades von f, so ergibt sich:

$$[\Phi^{(2)}]^2 = \Phi^{(4)} + 4\overline{7}\,\Phi'^{(2)} + 4\,\overline{15}\,g_2,$$

wobei $\Phi^{(4)}, \Phi'^{(2)}$ die Flächenfunktionen sind, die resp. zu den Formen f^2, h gehören.

37. Speziell ist nach (XI) für das Produkt zweier monomischen Flächenfunktionen:

$$\text{(52)} \qquad M_\sigma^{(n)} M_{\sigma'}^{(m)} = \xi^{n-\sigma}\cdot\mathfrak{e}^n\,\xi^{m-\sigma'}\cdot\mathfrak{e}^m = \Sigma\, c_{2\varrho}\,\mathfrak{p}^{(s-2\varrho)}\cdot\mathfrak{e}^{(s-2\varrho)},$$

wo $\mathfrak{p}^{(s-2\varrho)}$ die Überschiebung:

$$\xi^{n-\sigma}\,\eta^{n+\sigma}_{2\varrho}\,\xi^{m-\sigma'}\,\eta^{m+\sigma'} = c_{\sigma\sigma'\varrho}\,\xi^{s-\sigma-\sigma'-2\varrho}\,\eta^{s+\sigma+\sigma'-2\varrho}$$

$$c_{\sigma\sigma'\varrho} = \Sigma\,\overline{-1}^{\lambda}\,\underline{2\rho}_{\lambda}\,\underline{n-\sigma}_{\lambda}\,\underline{\overline{2n}}_{\lambda}\,\underline{m-\sigma'}_{2\varrho-\lambda}\,\underline{\overline{2m}}_{2\varrho-\lambda} =$$

$$= \underline{\overline{2n}}_{n-\sigma}\,\underline{\overline{2m}}_{m-\sigma'}\,\Sigma\,\overline{-1}^{\lambda}\,\underline{2\rho}_{\lambda}\,\underline{2n-\lambda}_{n+\sigma}\,\underline{2m-2\rho+\lambda}_{m+\sigma'}$$

ist, so daß sich nach (28) die Entwicklung des Produktes zweier monomischen Flächenfunktionen nach solchen ergibt als:

$$\text{(XII)} \qquad M_\sigma^{(n)} M_{\sigma'}^{(m)} = \Sigma\, a_{\sigma\sigma'\varrho}\,M_{\sigma+\sigma'}^{(s-2\varrho)},\quad a_{\sigma\sigma'\varrho} = c_{2\varrho}\,c_{\sigma\sigma'\varrho}.$$

Nach (28′) ergeben sich hieraus, da $i^\sigma C_\sigma^{(n)}, i^\sigma S_\sigma^{(n)}$ reell sind, die Formeln:

$$\text{(53)} \qquad \begin{cases} C_\sigma^{(n)}\,C_{\sigma'}^{(m)} - S_\sigma^{(n)}\,S_{\sigma'}^{(m)} = \Sigma\,\overline{-1}^{\varrho}\,a_{\sigma\sigma'\varrho}\,C_{\sigma+\sigma'}^{(s-2\varrho)} \\ S_\sigma^{(n)}\,C_{\sigma'}^{(m)} - C_\sigma^{(n)}\,S_{\sigma'}^{(m)} = \Sigma\,\overline{-1}^{\varrho}\,a_{\sigma\sigma'\varrho}\,S_{\sigma+\sigma'}^{(s-2\varrho)} \end{cases}.$$

Digitized by Google

Hieraus folgt speziell für $\varphi = 0$ nach (30) die Entwicklung des Produktes zweier Zugeordneten nach solchen:

$$\text{(XIII)} \qquad P_\sigma^{(n)} P_{\sigma'}^{(m)} = \Sigma \overline{-1}^{\varrho} c_{\sigma\sigma'\varrho} P_{\sigma+\sigma'}^{(s-2\varrho)}.$$

38. Hieraus ergibt sich für $\sigma = \sigma' = 0$ für das Produkt der einfachen Funktionen $P^{(n)}(\zeta)$, $P^{(m)}(\zeta)$, da nach (29) $P_0^{(n)} = 2^n \underline{\underline{2n}}_n P^{(n)}$ ist:

$$P^{(n)}(\zeta) P^{(m)}(\zeta) = \underline{\underline{2n}}_n \underline{\underline{2m}}_m \overline{2}^{2s} \Sigma c_{2\varrho} (\mathfrak{k}_{2\varrho}^n \cdot \mathfrak{k}^m) \cdot \mathfrak{e}^{s-2\varrho}.$$

Dies ist nach (51), da $\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{k} = 2$ ist, weiter gleich

$$\underline{\underline{2n}}_n \underline{\underline{2m}}_m \overline{2}^{2s} \Sigma 2^{\varrho} c_{2\varrho} b_\varrho \mathfrak{k}^{s-2\varrho} \cdot \mathfrak{e}^{s-2\varrho},$$

also ist nach (V):

$$P^{(n)}(\zeta) P^{(m)}(\zeta) = \Sigma \varkappa_\varrho P^{(s-2\varrho)}$$

$$\varkappa_\varrho = \underline{\underline{2n}}_n \underline{\underline{2m}}_m \overline{2}^{3\varrho} c_{2\varrho} b_\varrho \underline{\underline{2s-4\varrho}}_{s-2\varrho}$$

$$= (2s+1-4\varrho) \overline{2s+1-2\varrho}\, A_\varrho A_{n-\varrho} A_{m-\varrho} \overline{A}_{s-2\varrho}$$

$$\text{(XIV)} \qquad A_s = \overline{2}^{\varrho} \underline{2\varrho}_\varrho = 1.3.5 \ldots (2\varrho - 1) \underline{\varrho},$$

welches die Formel von F. Neumann und Adams ist:

39. Aus (53) hat man ferner für $m = 1$, $\tau = 0$, da $C_0^{(1)} = P_0^{(1)} = \mu$, $S_0^{(1)} = 0$ ist:

$$C_\sigma^{(n)} \mu = C_\sigma^{(n+1)} + (n-\sigma)(n+\sigma) \overline{2n+1}\, \overline{2n-1}\, C_\sigma^{(n-1)}$$

und die Formel, die aus dieser entsteht, indem S statt C sowie, wenn $\varphi = 0$ gesetzt wird, die Formel von Wangerin, indem P statt C geschrieben wird. Speziell folgt hieraus für $\sigma = 0$, da nach (30), (29): $C_\sigma^{(n)} = P_0^{(n)} = 2^n \underline{\underline{2n}}_n P^{(n)}$ die Formel von Gauß und Bonnet:

$$(n+1) P^{(n+1)} - (2n+1) \mu P^{(n)} + n P^{(n-1)} = 0$$

§ 12. Das Integral des Produktes zweier Flächenfunktionen.

40. Bekanntlich ist, wenn ω die Oberfläche der Einheitskugel bedeutet,

$$\int \Phi^{(n)} d\omega = 0 \text{ für } n \neq 0, \quad \int \Phi^{(0)} d\omega = 4\pi \Phi^{(0)}.$$

Digitized by Google

Integriert man daher in (XI) beiderseits, so folgt:

$$\int \Phi^{(n)} \Phi^{(m)} d\omega = \Sigma c_{2\varrho} \int \Phi_{\mathfrak{p}}^{(s-2\varrho)} d\omega. \tag{54}$$

Hier ist nun $(s - 2\rho)$ nur dann gleich Null, wenn $n = m = \rho$ ist, da die Form $\mathfrak{p}^{(s-2\varrho)}$ der Funktion $\Phi_{\mathfrak{p}}^{(s-2\varrho)}$ nur dann 0^{ter} Ordnung ist, als $2\rho^{\text{te}}$ Überschiebung $(a\,b)^{2\varrho}\, a_\xi^{2n-2\varrho}\, b_\xi^{2m-2\varrho}$ der Formen $\mathfrak{a}^{(n)} = a_\xi^{2n}$, $\mathfrak{b}^{(m)} = b_\xi^{2m}$. Ist dies aber der Fall, so sei $\Phi'^{(n)} = \mathfrak{b}^{(n)} \cdot \mathfrak{e}^{(n)}$ statt $\Phi^{(m)}$ gesetzt, und die letzte Gleichung ergibt dann:

$$\int \Phi^{(n)} \Phi'^{(n)} d\omega = c_{2n} \int \Phi_{\mathfrak{p}}^{(0)} d\omega = c_{2n}\, 4\pi\, \mathfrak{a}^{(n)} \cdot \mathfrak{b}^{(n)},$$

so daß vermöge des Wertes von c_{2n} aus (IX) folgt:

$$\int \Phi^{(n)} \Phi'^{(n)} d\omega = 4\pi\, 2^{2n} \overline{2n+1}\, \underline{\overline{2n}}_n\, \mathfrak{a}^{(n)} \cdot \mathfrak{b}^{(n)}, \tag{XV}$$

wodurch das Integral des Produktes zweier Flächenfunktionen gleicher Ordnung ausgedrückt erscheint durch das skalare Produkt der Vielbeine (der $2n^{\text{ten}}$ Überschiebungen der Formen) dieser Funktionen.

Nach Art. 14 folgt aus (XV) die Formel von Laplace:

$$\int \Phi^{(n)} \Phi'^{(n)} d\omega = 2\pi \overline{2n+1}\, \underline{\overline{2n}}_n\, \Sigma' \underline{\overline{2n}}_{n-\sigma} \left[U_\sigma U'_\sigma + V_\sigma V'_\sigma \right].$$

41. Ist speziell $\Phi'^{(n)}$ mit der Flächenfunktion $P^{(n)}(\cos\gamma)$ identisch, deren Form nach (36) identisch ist mit $\overline{2}^{2n}\, \underline{2n}_n\, \mathfrak{E}^n$, so gibt (XV) die bekannte Laplacesche Gleichung in der Form:

$$\int \Phi^{(n)} P^{(n)}(\cos\gamma)\, d\omega = 4\pi \overline{2n+1}\, \mathfrak{a}^{(n)} \cdot \mathfrak{E}^n,$$

wobei $\mathfrak{a}^{(n)} \cdot \mathfrak{E}^n$ der Wert ist, welchen die Funktion $\Phi^{(n)} = \mathfrak{a}^{(n)} \cdot \mathfrak{e}^n$ im Punkte $\mathfrak{E}$ annimmt.

Ist weiter $\Phi^{(n)}$ identisch mit der Funktion $P^{(n)}(\cos\gamma')$ der Form $\overline{2}^{2n}\, \underline{2n}_n\, \mathfrak{E}'^n$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int P^{(n)}(\cos\gamma)\, P^{(n)}(\cos\gamma')\, d\omega &= 4\pi \overline{2n+1}\, \overline{2}^{2n}\, \mathfrak{E}^n \cdot \mathfrak{E}'^n = \text{nach (36)} \\ &= 4\pi \overline{2n+1}\, P^{(n)}(\cos\gamma''), \end{aligned}$$

wo γ'' die sphärische Distanz der Punkte $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}'$ ist.

Digitized by Google

§ 13. Das Integral des Produktes dreier Flächenfunktionen.

42. Wird in (IX) beiderseits mit der Funktion $\Phi^{(p)}$ multipliziert, welche zur Form $\mathfrak{c}^{(p)}$ gehört, so bleibt bei Integration rechts nur das Glied mit einem solchen ρ, daß $s - 2\rho = p$ wird, so daß sich zunächst ergibt, daß $s - p = n + m - p$ eine gerade Zahl (auch 0) sein muß, und ferner:

$$\int \Phi^{(n)} \Phi^{(m)} \Phi^{(p)} d\omega = c_{s-p} \int \Phi_{\rho}^{(\mu)} \Phi^{(p)} d\omega = \text{nach (XV)}$$

$$= 4\pi\, c_{s-p}\, c_{2\rho} \left(\mathfrak{a}_{s-p}^{(n)} \cdot \mathfrak{b}^{(m)}\right) \cdot \mathfrak{c}^{(p)}.$$

Hier bleibt das Integral links ungeändert, wenn man die drei Funktionen vertauscht, also muß dies auch rechts der Fall sein. Hieraus folgt, daß die Zahlen n, m, p so beschaffen sein müssen, daß die Beziehungen bestehen:

$$m + p - n = 2\alpha,\ p + n - m = 2\beta,\ n + m - p = 2\gamma,$$

so daß sich, unter Anwendung der Ausdrücke von $c_{s-p} = c_{2\gamma}$, $c_{2\rho}$ aus (VIII) der Satz ergibt: „Das Integral des Produktes dreier Flächenfunktionen der Ordnungen n, m, p kann nur dann von Null verschieden sein, wenn diese Ordnungen gleich gesetzt werden können:

$$n = \beta + \gamma,\ m = \gamma + \alpha,\ p = \alpha + \beta,$$

wo α, β, γ positive ganze Zahlen oder auch Null sind, und es ist dann dieses Integral:

$$\text{(XVI)} \quad \int \Phi^{(\beta+\gamma)} \Phi^{(\gamma+\alpha)} \Phi^{(\alpha+\beta)} d\omega = 4\pi\, 2^{2\delta}\, \underline{\beta+\gamma}\ \underline{\gamma+\alpha}\ \underline{\alpha+\beta}\ \underline{\delta}\ \underline{\alpha}\ \underline{\beta}\ \underline{\gamma}\ \underline{\overline{2\delta+1}}\ J,$$

wobei $\delta = \alpha + \beta + \gamma$ und

$$J = \left(\mathfrak{a}_{n+m-p}^{(n)} \cdot \mathfrak{b}^{(m)}\right) \cdot \mathfrak{c}^{(p)} = \left(\mathfrak{b}_{m+p-n}^{(m)} \cdot \mathfrak{c}^{(p)}\right) \cdot \mathfrak{a}^{(n)} = \left(\mathfrak{c}_{p+n-m}^{(p)} \cdot \mathfrak{a}^{(n)}\right) \cdot \mathfrak{b}^{(m)}$$

$$= (bc)^{2\alpha} (ca)^{2\beta} (ab)^{2\gamma}$$

die trilineare Invariante der Formen

$$\mathfrak{a}^{(n)} = a_{\xi}^{2\beta+2\gamma},\ \mathfrak{b}^{(m)} = b_{\xi}^{2\gamma+2\alpha},\ \mathfrak{c}^{(p)} = c_{\xi}^{2\alpha+2\beta}$$

ist, zu welchen die drei Kugelfunktionen gehören."

43. Sind daher z. B. die Ordnungen der drei Kugelfunktionen alle ungerade Zahlen oder zwei von ihnen gerade und eine ungerade, so verschwindet das Integral ihres Produktes.

Digitized by Google

Ist weiters z. B. $\Phi^{(2\alpha)}$ die Kugelfunktion, welche zur Form $a_\xi^{4\alpha}$ mit der Invariante $J=(bc)^{2\alpha}(ca)^{2\alpha}(ab)^{2\alpha}$ gehört, so ist nach (XVI):

$$\int\left[\Phi^{(2\alpha)}\right]^3 d\omega = 4\pi\, 2^{6\alpha}\,\underline{(2\alpha)}^3\,\underline{3\alpha}\,\underline{\alpha}^3\,\underline{6\alpha+1}\,J.$$

Speziell hat man daher für $\alpha=1$ die Form $f=a_\xi^4$ vierter Ordnung (siehe Art. 40) mit der Invariante $J=(bc)^2(ca)^2(ab)^2=\overline{6}g_3$ so daß sich ergibt:

$$\int\left[\Phi^{(2)}\right]^3 d\omega = \pi\, 2^9\,\overline{5.7}\,g_3.$$

Sind ferner die drei Flächenfunktionen speziell identisch mit den Funktionen $P^{(n)}(\cos\psi)$, $P^{(m)}(\cos\psi)$, $P^{(p)}(\cos\psi)$ (siehe Art. 19), so gehören sie nach (36) zu den Formen

$$\overline{2}^{2n}\,\underline{2n}_n\,\mathfrak{E}^n,\quad \overline{2}^{2m}\,\underline{2m}_m\,\mathfrak{E}^m,\quad \overline{2}^{2p}\,\underline{2p}_p\,\mathfrak{E}^p$$

und es ist daher die Invariante J von (XVI) gleich:

$$J=\overline{2}^{4\delta}\,\underline{2n}_n\,\underline{2m}_m\,\underline{2p}_p\,(\mathfrak{E}^n{}_{2\gamma}\,\mathfrak{E}^m)\cdot\mathfrak{E}^p;$$

dies gibt unter Verwendung der Formel (51) von Gordan und Berzolari, und da nach (36)

$$\mathfrak{E}^p\cdot\mathfrak{E}^p = 2^{2p}\,\underline{\overline{2p}}_p\,P^{(p)}(1) = 2^{2p}\,\underline{\overline{2p}}_p$$

ist, nach (XVI) die Formel:

$$\text{(XVII)}\quad \int P^{(\beta+\gamma)}_{(\cos\psi)}\,P^{(\gamma+\alpha)}_{(\cos\psi)}\,P^{(\alpha+\beta)}_{(\cos\psi)}\,d\omega = 4\pi\,\overline{2\delta+1}\,A_\alpha A_\beta A_\gamma\,\overline{A}_\delta.$$

Ersetzt man hier $\cos\psi$ durch $\zeta\cos\vartheta$, so folgt, da

$$d\omega = \sin\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta = -\,d\varphi\,d\zeta$$

ist:

$$\int_{-1}^{+1} P^{(\beta+\gamma)}_{(\zeta)}\,P^{(\gamma+\alpha)}_{(\zeta)}\,P^{(\alpha+\beta)}_{(\zeta)}\,d\xi = 2\,\overline{2\delta+1}\,A_\alpha A_\beta A_\gamma\,\overline{A}_\delta,$$

welches die Formel von Ferrers und Adams ist. Jedoch ist hier die Bedingung für die Ordnungen der Funktionen in einfacherer Weise dargestellt.

Digitized by Google

Zur näherungsweisen Kubatur.

Von **Otto Biermann** in Brünn. †

Die durch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

definierte Funktion Z von x und y ist als die Größe eines Blockes zwischen der xy-Ebene und der Fläche von der Gleichung

$$Z - f(x, y) = 0$$

anzusehen, und wenn die Projektion des Blockes auf die xy-Ebene vorgegeben ist, ist das Volumen des Blockes näherungsweise durch eine über diese Projektion ausgedehnte Summe von Prismen auszudrücken:

$$f(x_\nu, y_\mu)\, \Delta x_\nu\, \Delta y_\mu,$$

wo Δx_ν und Δy_μ die Zuwächse der Variablen x und y von der Stelle (x_ν, y_μ) unseres Bereiches oder seiner Begrenzung ab bedeuten:

$$\Delta x_\nu = x_{\nu+1} - x_\nu, \quad \Delta y_\mu = y_{\mu+1} - y_\mu.$$

Die Gesamtheit der von der Projektion ab bis zur Fläche reichenden Prismen findet ihren näherungsweisen Ausdruck in der Doppelsumme

$$\sum_{(\nu)} \sum_{(\mu)} f(x_\nu, y_\mu)\, (x_{\nu+1} - x_\nu)\, (y_{\mu+1} - y_\mu),$$

und zwar ist für den Bereich des Rechteckes das Restglied hinzuzufügen

$$\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \int_{y_\mu}^{y_{\mu+1}} (x - x_\nu) f'_x(\xi, \eta)\, dx\, dy + \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \int_{y_\mu}^{y_{\mu+1}} (y - y_\mu) f'_y(\xi, \eta)\, dx\, dy,$$

wo ξ und η mittlere Werte von x bezw. y aus den Integrationsintervallen bezeichnen.

So wie nun die ebene Fläche, die durch eine Kurve von der Gleichung $y = f(x)$, die x-Achse und zwei Parallele zur y-Achse

Digitized by Google

begrenzt ist, entweder durch eine Summe von Rechtecken dargestellt wird, deren Seiten je der x- oder y-Achse parallel laufen, oder durch eine Summe von „Tangententrapezen" bezw. eine Summe von „Sehnentrapezen", soll auch das Volumen des Blockes noch in anderer Weise ausgedrückt werden als früher.

Wir stellen den Block als eine Summe tangierender oder Abschnittsprismen dar und verstehen unter einem tangierenden Prisma ein solches, dessen Deckfläche die Fläche $z - f(x, y) = 0$ in dem Punkte $(x', y', f(x', y'))$ berührt, dessen Projektion auf die xy-Ebene mit dem Mittelpunkte des Rechteckes zusammenfällt, von dem das Prisma ausgeht.

Weil der Inhalt dieses Prismas gleich ist dem Produkte von Basis und der Mittelpunktshöhe, so wird das Volumen des Blockes näherungsweise durch

$$\sum_{(\nu)}\sum_{(\mu)} f\left(\frac{x_\nu + x_{\nu+1}}{2}, \frac{y_\mu + y_{\mu+1}}{2}\right)(x_{\nu+1} - x_\mu)(y_{\mu+1} - y_\mu)$$

ausgedrückt, und zwar ist darum, weil $f(x, y)$ in dem Bereich der Basis durch die Näherungsfunktion

$$g(x, y) = f(x', y') + f'_x(x', y')(x - x') + f'_y(x', y')(y - y')$$

dargestellt werden soll, eben daselbst:

$$f(x, y) = g(x, y) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left((x-x')^2 f''_{xx}(x,y) + 2(x-x')(y-y')f''_{xy}(\xi,\eta) + (y-y')^2 f''_{yy}(\xi,\eta)\right),$$

wo ξ und η Werte für x bezw. y zwischen x' und x bezw. y' und y bedeuten. Das Restglied bei der Kubatur über das Rechteck lautet danach:

$$\frac{1}{2!}\left[\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}\int_{y_\mu}^{y_{\mu+1}} (x - x')^2 f''_{xx}(\xi, \eta)\, dx\, dy + \right.$$

$$\left. + 2\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}\int_{y_\mu}^{y_{\mu+1}} (x-x')(y-y') f''_{xy}(\xi,\eta)\, dx\, dy + \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}\int_{y_\mu}^{y_{\mu+1}} (y-y')^2 f''_{yy}(\xi,\eta)\, dx\, dy \right].$$

Ebenso verstehe man unter dem Abschnittsprisma, dessen Projektion auf die xy-Ebene das frühere Rechteck ist, dasjenige, dessen Deckfläche entweder durch die drei Punkte geht

Digitized by Google

$$\big(x_\nu, y_\mu, f(x_\nu, y_\mu)\big),\ \big(x_\nu, y_{\mu+1}, f(x_\nu, y_{\mu+1})\big)$$
$$\big(x_{\nu+1}, y_\mu, f(x_{\nu+1}, y_\mu)\big),$$

oder aber durch die drei Punkte

$$\big(x_\nu, y_\mu, f(x_\nu, y_\mu)\big),\ \big(x_\nu, x_{\mu+1}, f(x_\nu, y_{\mu+1})\big),$$
$$\big(x_{\nu+1}, y_{\mu+1}, f(x_{\nu+1}, y_{\mu+1})\big)$$

oder endlich durch die drei Punkte

$$\big(x_\nu, x_\mu, f(x_\nu, y_\mu)\big),\ \big(x_{\nu+1}, y_\mu, f(x_{\nu+1}, y_\mu)\big),$$
$$\big(x_{\nu+1}, y_{\mu+1}, f(x_{\nu+1}, y_{\mu+1})\big).$$

Wir drücken danach die Volumina der Abschnittsprismen in folgender Weise aus:

$$\sum_{(\nu)}\sum_{(\mu)} \frac{1}{2}\big(f(x_\nu, y_{\mu+1}) + f(x_{\nu+1}, y_\mu)\big)(x_{\nu+1} - x_\nu)(y_{\mu+1} - y_\mu)$$

und

$$\sum_{(\nu)}\sum_{(\mu)} \frac{1}{2}\big(f(x_\nu, y_\mu) + f(x_{\nu+1}, y_{\mu+1})\big)(x_{\nu+1} - x_\mu)(y_{\mu+1} - y_\mu).$$

Hier ziehen wir aber den zweiten Ausdruck wegen der größeren Regelmäßigkeit in der Bildungsweise vor, um so mehr, als wir in ihm die unmittelbare Erweiterung der Bestimmung einer ebenen Fläche durch Sehnentrapeze wahrnehmen.

Nun geben wir noch an, daß aus den Gleichungen

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z, & 1 \\ x_\nu, & y_\mu, & f(x_\nu, & y_\mu), & 1 \\ x_\nu, & y_{\mu+1}, & f(x_\nu, & y_{\mu+1}), & 1 \\ x_{\nu+1}, & y_{\mu+1}, & f(x_{\nu+1}, & y_{\mu+1}), & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_\nu & y_\mu & f(x_\nu, & y_\mu), & 1 \\ x_{\nu+1} & y_\mu & f(x_{\nu+1}, & y_\mu) & 1 \\ x_{\nu+1} & y_{\mu+1} & f(x_{\nu+1}, & y_{\mu+1}) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Digitized by Google

die betreffende Näherungsfunktion $z(x, y)$ von $f(x, y)$ zu finden ist und zur Berechnung von $f(x, y)$ in unserem Rechteck jedesmal ein Restglied von der Form hinzuzufügen ist

$$\frac{1}{2}\Big[(x-x_\nu)(x-x_{\nu+1})\, f''_{xx}(\xi,\eta) + 2(x-x_\nu)(y-y_\mu)\, f''_{xy}(\xi,\eta) + \\ + (y-y_\mu)(y-y_{\mu+1})\, f''_{yy}(\xi,y)\Big],$$

wo ξ und η jedesmal unbekannte, aber doch immer verschiedene Werte zwischen x_ν und $x_{\nu+1}$ bezw. y_μ und $y_{\mu+1}$ bedeuten.

Das der Doppelsumme beizufügende Restglied, soweit es sich auf unser Rechteck bezieht, heißt somit

$$\frac{1}{2!}\Big[\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}\int_{y_\mu}^{y_{\mu+1}} (x-x_\nu)(x-x_{\nu+1})\, f''_{xx}(\xi,\eta)\, dx\, dy + \\ + 2\int_{x_\mu}^{x_{\nu+1}}\int_{y_\mu}^{y_{\mu+1}} (x-x_\nu)(y-y_\mu)\, f''_{xy}(\xi,\eta)\, dx\, dy + \\ + \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}\int_{y_\mu}^{y_{\mu+1}} (y-y_\mu)(y-y_{\mu+1})\, f''_{yy}(\xi,\eta)\, dx\, dy\Big].$$

Nun kann auch die Frage aufgeworfen werden, inwieweit die letzten zwei Näherungsfunktionen für das Volumen verwendet werden können zur näherungsweisen Bestimmung eines auf der durch den Punkt (x_0, y_0, z_0) gehenden Integralfläche, die zur Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \varphi(x, y, z)$$

gehöre, befindlichen Nachbarpunkt (x', y', z') von (x_0, y_0, z_0); dann mit dessen Hilfe zur Bestimmung eines Nachbarpunktes (x'', y'', z'') u. s. w. So wie Runge[1]) die beiden Näherungsverfahren zur Quadratur durch Tangenten- und Sehnentrapeze dazu verwendete, um auf der durch eine Stelle (x_0, y_0) gehenden Integralkurve der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$$

eine der Stelle (x_0, y_0) benachbarte Stelle (x', y') zu finden, hierauf eine nächste (x'', y'') u. s. w.

[1]) Runge, Mathem. Ann., Bd. 46.

Digitized by Google

Wir denken die der genannten Differentialgleichung genügende Funktion

$$z - z_0 = \mathfrak{p}(x, y \mid x_0, y_0)$$

aufgestellt, wobei man sich der Vorschriften der Frau Kowalewsky bediene (Crelle Journal, Bd. 80) und benütze diese zur Angabe der in den Gleichungen

$$\Delta^2 z = \Delta x \, \Delta y \, \varphi\left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2}, \frac{z_0 + z_1}{2}\right)$$

oder

$$\Delta^2 z = \Delta x \, \Delta y \, \frac{1}{2}\left[\varphi(x_0, y_0, z_0) + \varphi(x_1, y_1, z_1)\right]$$

auftretenden Größe z_1. Verstehen wir also unter x_1 und y_1 die durch Variation aus x_0, y_0 entstandenen Werte

$$x_1 = x_0 + \Delta x, \quad y_1 = y_0 + \Delta y,$$

so soll ebenso

$$z_1 = z_0 + \Delta z$$

sein, doch setze man

$$\Delta z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \Delta y$$

und wähle für die partiellen Ableitungen von z an der Stelle $(x_0\, y_0)$ die Größen, die die frühere Entwicklung für $z - z_0$ vorschreibt. Hierauf bilde man entsprechend den Näherungsformeln durch Tangenten- oder Abschnittsprismen

$$\varphi\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, \; y_0 + \frac{\Delta y}{2}, \; z_0 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 \Delta y\right]\right)$$

$$\frac{1}{2}\left[\varphi(x_0, y_0, z_0) + \varphi\left(x_0 + \Delta x, \, y_0 + \Delta y, \, z_0 + \left(\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 \Delta y\right)\right)\right]$$

und entwickle bei der Voraussetzung, daß $\varphi(x, y, z)$ in der Umgebung der Stelle (x_0, y_0, z_0) nach der Taylorschen Reihe entwickelbar sei, die letztgenannten Ausdrücke.

Schließlich ist nur die Entwicklung von $z - z_0$, die der vorgelegten Differentialgleichung entspringt, mit der der ersten oder zweiten näherungsweisen Darstellung von $\Delta^2 z$ entspringenden Entwicklung für $z - z_0$ zu gleichen. Diese rein rechnerische Untersuchung führen wir hier nicht aus, doch sei bemerkt, daß man entsprechend wie bei Funktionen einer Variablen zu erwarten hat, daß die Glieder zweiter Dimension in Δx und Δy übereinstimmen.

Digitized by Google

Dann hat man ein Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung einer Kalotte der durch (x_0, y_0, z_0) gehenden Integralfläche, weil in den Ausdrücken für $z - z_0$ die beiden Zuwächse Δx und Δy vorkommen und die Fortsetzung von einer aus (x_0, y_0, z_0) ersten gefundenen Stelle (x', y', z') in gleicher Weise zu wiederholen ist. Je nach der Art der zwei willkürlichen Funktionen in dem Integral der Differentialgleichung wird natürlich die Kalotte eine verschiedene sein.

[1]) **Anm. der Redaktion.** Der Herr Verfasser ist am 28. April 1909 nach langem schweren Leiden in Brünn gestorben.

Digitized by Google

Die Darstellung der rationalen Brüche als Potenzsummen von $\frac{1}{2}$.

Von **Louis Saalschütz** in Königsberg i. Pr.

Die positiven ganzen Zahlen lassen sich bekanntlich, und zwar nur in einer einzigen Art, als Summen voneinander verschiedener Potenzen von 2 darstellen. Ebenso lassen sich, was ebenfalls theoretisch bekannt und öfters benützt sein dürfte, die rationalen echten Brüche durch endliche oder unendliche Summen von Potenzen der Zahl $\frac{1}{2}$ ausdrücken, auf die wirkliche Darstellung aber ist, soviel ich weiß, noch nicht näher eingegangen worden. Das soll hier geschehen, und zwar zuerst nach gebräuchlichen Methoden und zweitens mit Hilfe der Dyadenrechnung.

I.

Wir beweisen zunächst zwei Sätze:

1. Jeder positive echte Bruch läßt sich durch eine Summe voneinander verschiedener ganzer Potenzen von $\frac{1}{2}$ darstellen.

Beweis: Sei v der gegebene positive echte Bruch und $\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}$ die nächst kleinere Potenz von $\frac{1}{2}$; ist dann

$$v = \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} + v_1,$$

so ist $v_1 < \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}$, denn, wäre $v_1 \geqq \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}$, so hätte man $\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}$ nehmen müssen. Ist dann $\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_1}$ die zu v_1 von unten her nächstgelegene Potenz von $\frac{1}{2}$ und setzt man

$$v_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_1} + v_2,$$

so ist wieder $v_2 < \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_1}$; so kann man weiter gehen, und zwar im allgemeinen bis ins Unendliche und nur, wenn der Nenner von v

Digitized by Google

eine Potenz von 2 ist, mit einer endlichen Zahl von Operationen; in beiden Fällen ist dann

$$v = \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_2} + \cdots, \quad \alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots$$

wobei die Differenz zweier aufeinander folgender Exponenten nicht durchweg $= 1$ sein darf, weil sonst genau $v = \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha - 1}$ wäre.

2. Die Darstellung eines echten Bruches als Summe verschiedener Potenzen von $\frac{1}{2}$ ist nur in einer einzigen Art möglich.

Beweis. Seien zwei verschiedene Darstellungen des Bruches v möglich, nämlich:

$$v = q_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_2} + \cdots \quad \alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots$$

und

$$v = q_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{\beta} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\beta_1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\beta_2} + \cdots \quad \beta < \beta_1 < \beta_2 < \cdots$$

wo in q_0 die etwaigen gleichen Anfangsglieder der beiden Entwicklungen zusammengefaßt sind, so ist

$$v - q_0 \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha},$$

aber

$$< \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} . 2,$$

weil letzteres $= \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha - 1}$ wäre, also

$$v - q_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} (1 + \Theta); \quad 0 \leqq \Theta < 1$$

ebenso ist

$$v - q_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\beta} (1 + \Theta') \quad 0 \leqq \Theta' < 1.$$

Sei nun $\alpha > \beta$, und zwar $\alpha = \beta + \gamma$, so müßte

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\beta + \gamma} (1 + \Theta) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\beta} (1 + \Theta')$$

oder

$$\frac{1 + \Theta}{2^{\gamma}} = 1 + \Theta'$$

Digitized by Google

sein; die linke Seite ist aber (für $\gamma = 1$ oder > 1) ein echter Bruch und die rechte Seite $= 1$ oder > 1; also ist die aufgestellte Gleichung unerfüllbar und somit muß $\alpha = \beta$ sein u. s. f.

Sei nunmehr a eine positive ganze Zahl, p eine ungerade Primzahl, so soll der Bruch $\frac{a}{p}$ als Summe von Potenzen von $\frac{1}{2}$ dargestellt werden. Ist dies für den Bruch $\frac{1}{p}$ geschehen und verwandelt man a in eine Summe von Potenzen der Zahl 2, so ergibt sich auch sofort die Lösung der Aufgabe für $\frac{a}{p}$, wir können also die Forderung auf die Darstellung von $\frac{1}{p}$ beschränken.

Die Lösung ist äußerst einfach, wenn p die Form $2^n - 1$ hat, denn dann ist:

$$(1) \qquad \frac{1}{p} = \frac{1}{2^n - 1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3n} + \cdots \text{ in infin.}$$

Ist dies nicht der Fall, so ist p Faktor von $2^m - 1$, wobei $m = p - 1$, wenn 2 primitive Wurzel für p, m Teiler von $p - 1$, wenn 2 keine primitive Wurzel für p ist; nimmt man nun in beiden Fällen m als möglichst kleine g e r a d e Zahl an, so ist, wenn μ ein ungerader Faktor von m ist, $2^{2\mu} - 1$ sowie $2^{\mu} + 1$ und folglich auch 3 Teiler von $2^m - 1$. Setzt man

$$(2) \qquad 2^m - 1 = P, \quad \frac{P}{3} = Q, \quad \frac{P}{p} = R$$

und bestimmt γ als Potenz von 2 so, daß

$$(3) \qquad C = R\gamma - Q$$

positiv wird, so ist

$$(4) \qquad \frac{1}{3} + \frac{C}{P} = \frac{\gamma}{p}$$

und daher, da

$$\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \cdots$$

$$\frac{1}{P} = \left(\frac{1}{2}\right)^m + \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3m} + \cdots$$

und C als Summe von Potenzen von 2 angebbar ist:

$$(5) \qquad \frac{1}{p} = \frac{1}{\gamma}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots\right\} + \frac{C}{\gamma}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^m + \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} + \cdots\right\},$$

also der Bruch $\frac{1}{p}$ als Summe von Potenzen von $\frac{1}{2}$ dargestellt.

Digitized by Google

Zusatz. Statt der Zahl 3 kann auch ein anderer Primzahlteiler von P genommen werden. Dies ist nötig, wenn eine Potenz von $^1/_3$ selbst vorgelegt ist. Dann ist 2^6-1 durch 9 und durch 7 und $2^{2.3^{k-1}}-1$ durch 3^k und durch 7 teilbar etc.

Beispiel. $p=17$, 2 keine primitive Wurzel für 17, $m=8$, $Q=85$, $R=15$, $\gamma=8$, $C=35=2^5+2+1$.

$$\frac{1}{17}=\left(\frac{1}{2}\right)^5\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\dot{1}}{2}\right)^4+\left(\frac{\dot{1}}{2}\right)^6+\cdots\right\}+\left(\left(\frac{1}{2}\right)^6+\left(\frac{\dot{1}}{2}\right)^{10}+\left(\frac{\dot{1}}{2}\right)^{11}\right)$$
$$\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^8+\left(\frac{1}{2}\right)^{16}+\left(\frac{1}{2}\right)^{24}+\cdots\right\}.$$

Hier lassen sich die durch einen darüber gesetzten Stern markierten Glieder zu einem einzigen $\left(\frac{1}{2}\right)^8$ zusammenziehen, ebenso die weiteren gleichgelegenen Glieder, so daß man erhält:

$$(6)\quad \frac{1}{17}=\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\left(\frac{1}{2}\right)^7+\left(\frac{1}{2}\right)^8+\left(\frac{1}{2}\right)^{13}+\left(\frac{1}{2}\right)^{14}+\left(\frac{1}{2}\right)^{15}+$$
$$+\left(\frac{1}{2}\right)^{16}+\left(\frac{1}{2}\right)^{21}+\cdots.$$

Daß eine derartige Umformung nötig ist, um den einfachsten Ausdruck für $\frac{1}{17}$, bezw. $\frac{1}{p}$ zu erhalten, worin keine Potenz von $\frac{1}{2}$ einen größeren Faktor als 1 besitzt, ist als eine Unvollkommenheit der angegebenen Methode zu bezeichnen, welche bei der später folgenden fortfällt.

Soll der reziproke Wert einer Primzahlpotenz entwickelt werden, so ist die Methode im wesentlichen dieselbe. Geht p in 2^m-1 auf (m wieder als gerade Zahl angenommen), so teilt p^2 die Differenz $2^{pm}-1$ und überhaupt p^k die Differenz $2^{p^{k-1}m}-1$; man setze nun

$$(7)\qquad P=2^{p^{k-1}m}-1,\quad \frac{P}{3}=Q,\quad \frac{P}{p^k}=R$$

und nehme wieder γ als so hohe Potenz von 2 an, daß $C=R\gamma-Q$ positiv wird, dann ist

$$(8)\qquad \frac{\gamma}{p^k}=\frac{1}{3}+\frac{C}{P}$$

Digitized by Google

u. s. w. wie bei Gl. (4). — Z. B. geht 25 in $P = 2^{20} - 1 = 1048575$ auf und es ist

$$Q = 349525, \quad R = 41943, \quad \gamma = 16, \quad C = 321563 \text{ etc.}$$

Soll nun ein Bruch mit zusammengesetztem Nenner zu einer Summe von Potenzen von $\frac{1}{2}$ umgeformt werden, so ist auf die Methode von Gauß[1]) zurückzugreifen, welche lehrt, und zwar nur in einer einzigen Art, einen echten eder unechten Bruch, dessen Nenner von dem Produkt der relativen Primzahlen $p, q, r, \ldots$ gebildet wird, in eine Summe positiver echter Partialbrüche zu zerlegen, wobei im allgemeinen noch eine ganze positive oder negative Zahl hinzuzufügen bleibt. Da wir aber nur positive Summanden zu erhalten wünschen, so ist die genannte Methode etwas zu modifizieren.

Wir beginnen mit einigen einfachen Sätzen.

I. Jeder (positive) echte Bruch mit dem Nenner pq, wobei p prim zu q, läßt sich in die Summe oder Differenz zweier echter Brüche umformen.

Beweis. Sei $C < pq$ und

$$\frac{C}{pq} = \frac{a}{p} \pm \frac{b}{q}. \tag{9}$$

Gilt das positive Zeichen, so versteht sich der Satz, daß beide Brüche echt sein müssen, von selbst; gilt aber das negative Zeichen, so sind drei Fälle denkbar: 1. $\frac{a}{p}$ und $\frac{b}{q}$ sind echt; 2. $\frac{a}{p}$ unecht, $\frac{b}{q}$ echt; 3. beide Brüche unecht. Liegt im zweiten Falle $\frac{a}{p}$ zwischen 1 und 2, so setze man

$$\frac{a}{p} = 1 + \frac{\alpha}{p};$$

dann ist

$$\frac{C}{pq} = \frac{\alpha}{p} + \left(1 - \frac{b}{q}\right), \tag{10}$$

also gleich der Summe zweier positiver echter Brüche;

$$\left(\text{z. B. } \frac{14}{15} = \frac{4}{3} - \frac{2}{5} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{3}{5}\right);$$

[1]) Disquisit. arithmet. §§ 309—311. Andere Untersuchungen, die mit dem von uns behandelten Thema in mehr oder weniger enger Beziehung stehen, rühren von Euler, Jacobi und aus neuerer Zeit von Weihrauch und W. Fr. Meyer her. Siehe das Zitat Enzykl. der mathem. Wissenschaften, I. Bd., 2. Hälfte, S. 564. Unser Aufsatz sucht sozusagen für die Praxis auf kürzestem Wege zum Ziele zu gelangen.

Digitized by Google

größer als 2 kann aber $\frac{a}{p}$ nicht sein, weil dann $\frac{a}{p}-\frac{b}{q}>1$ wäre, also $\frac{C}{pq}>1$ gegen die Voraussetzung. Den dritten Fall kann man durch Verminderung von $\frac{a}{p}$ und $\frac{b}{q}$ um die gleiche Anzahl Einheiten auf den ersten oder zweiten zurückführen; es bleibt also nur der dem Satze gemäße erste Fall oder die Alternative zweier summierter positiver echter Brüche bestehen.

II. Jeder echte Bruch $\frac{C}{pqr\ldots}$, dessen Nenner aus den gegeneinander primen Zahlen $p, q, r, \ldots$ zusammengesetzt ist, läßt sich in ein Aggregat positiver oder negativer echter Brüche verwandeln.

Beweis. Man setzt sukzessive (etwa bei vier Faktoren im Nenner)

$$\frac{C}{pqrs}=\frac{a}{p}\pm\frac{b}{qrs},\quad \frac{b}{qrs}=\frac{c}{q}\pm\frac{d}{rs},\quad \frac{d}{rs}=\frac{e}{r}\pm\frac{f}{s}$$

und erkennt dem früheren Satze zufolge sämtliche Brüche nacheinander als echte. Daraus folgt

III. Wenn für den echten Bruch $\frac{C}{pqr\ldots}$ die positiven oder negativen Zähler $a, b, c, \ldots$ zu den Nennern $p, q, r, \ldots$ nach irgend einer Methode gefunden sind, so kann sich der Ausdruck $\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}+\cdots$ nur um eine ganze positive oder negative Zahl von $\frac{C}{pqr\ldots}$ unterscheiden, derart, daß durch Hinzufügung ihrer Einheiten zu den einzelnen Brüchen ein Aggregat positiver oder negativer echter Brüche entsteht.

Und jetzt gehen wir daran, den Bruch $\frac{A}{pqr\ldots}$, worin A positiv, ganz und prim zum Nenner, sonst aber beliebig anzunehmen ist, in Partialbrüche mit den Nennern $p, q, r\ldots$ und mit positiven Zählern zu zerlegen. Zu dem Zwecke zerlegen wir zuerst den Bruch $\frac{1}{pqr\ldots}$ im wesentlichen nach Gauß folgendermaßen: Soll der Zähler zu p gefunden werden und bezeichnen wir das Produkt $qr\ldots$ mit p', so suchen wir zwei (positive oder negative) ganze Zahlen α und β, so daß

$$p'\alpha-p\beta=1 \tag{11}$$

Digitized by Google

wird; dann ist α der Zähler zu p; ebenso verfahren wir auch mit jedem der anderen Faktoren des Nenners. Berücksichtigen wir noch III, so haben wir dann $\frac{1}{pqr\ldots}$ als Summe positiver oder negativer echter Brüche dargestellt. (Unter den Brüchen müssen auch negative sein, weil sonst der Zähler von $pqr\ldots$ größer als 1 sein müßte.) Jetzt bezeichnen wir die Faktoren des Nenners mit $p_1 p_2 \cdots p_k p_{k+1} \cdots p_n$ und ordnen die Brüche so an, daß die positiven den negativen vorangehen; dadurch erhalte man:

$$(12) \qquad \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_n} = \frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{p_k} - \frac{\alpha'_{k+1}}{p_{k+1}} - \cdots - \frac{\alpha'_n}{p_n}.$$

Jetzt multiplizieren wir (12) mit A, setzen

$$(13) \qquad \begin{cases} x_1 = A\alpha_1 - p_1 m_1 \\ \vdots \\ x_k = A\alpha_k - p_k m_k \\ x_{k+1} = p_{k+1} m_{k+1} - A\alpha'_{k+1} \\ \vdots \\ x_n = p_n m_n - A\alpha'_n, \end{cases}$$

wobei $m_1, \ldots m_k, m_{k+1} \ldots m_n$ positive ganze Zahlen mit der Bedingung

$$(14) \qquad m_1 + m_2 + \cdots + m_k = m_{k+1} + \cdots + m_n$$

sein sollen, der wir noch die weiteren Bedingungen

$$(15) \qquad \begin{cases} m_1 < \frac{A\alpha_1}{p_1}, & m_{k+1} > \frac{A\alpha_{k+1}}{p_{k+1}} \\ m_2 < \frac{A\alpha_2}{p_2}, & m_{k+2} > \frac{A\alpha_{k+2}}{p_{k+2}} \\ \vdots & \vdots \\ m_k < \frac{A\alpha_k}{p_k}, & m_n > \frac{A\alpha_n}{p_n} \end{cases}$$

hinzufügen; so erhalten wir die gewünschte Zerlegung:

$$(16) \qquad \frac{A}{pqr\ldots} = \frac{A}{p_1 p_2 \cdots p_n} = \frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} + \cdots + \frac{x_n}{p_n}.$$

Bezeichnen wir nun jede der beiden gleichen Summen in (14) mit M und addieren die beiden in (15) zusammengefaßten Systeme von Ungleichungen, jedes für sich, so lassen sich unter allen Um-

Digitized by Google

ständen beliebig viele Zahlen M finden, deren Wert zwischen den beiden rechts entstehenden Summen liegt, da deren Differenz wegen (12) die positive Größe $A \cdot \frac{1}{pqr\ldots}$ ist. Da aber die m ganze Zahlen sein müssen, um die x mittels (13) zu solchen zu machen, so müssen wir die Bedingungen (15) schärfer fassen. Bezeichnen wir zur Bequemlichkeit, wenn a eine beliebige positive Zahl ist, mit $(\underline{a})$ die größte in a enthaltene ganze Zahl oder a selbst, wenn es ganz ist, mit $(\overline{a})$ die zu a nächsthöhere ganze Zahl oder wiederum a selbst (nicht etwa $a+1$), wenn es ganz ist, so haben wir an Stelle der Bedingungen (15) folgende zu setzen:

$$(17)\qquad \begin{cases} m_1 \leqq \left(\frac{A\alpha_1}{p_1}\right) & m_{k+1} \geqq \left(\frac{\overline{A\alpha_{k+1}}}{p_{k+1}}\right) \\ \vdots & \vdots \\ m_k \leqq \left(\frac{A\alpha_k}{p_k}\right) & m_n \geqq \left(\frac{\overline{A\alpha_n}}{p_n}\right) \end{cases}$$

und daraus folgt die Bedingung für ein ganzzahliges M:

$$(18)\qquad \left(\frac{A\alpha_1}{p_1}\right)+\cdots+\left(\frac{A\alpha_k}{p_k}\right) \leqq M \leqq \left(\frac{\overline{A\alpha_{k+1}}}{p_{k+1}}\right)+\cdots+\left(\frac{\overline{A\alpha_n}}{p_n}\right);$$

diese ist aber nicht unter allen Umständen erfüllbar; ist sie es nicht, dann ist die Zerlegung von $\frac{A}{pqr\ldots}$ mittels ganzzahliger positiver Werte von $x_1 x_2 \ldots$ nicht möglich; kann jedoch (18) durch einen oder mehrere Werte von M befriedigt werden, so können auch immer die (17) auf eine oder mehrere Arten erfüllt werden und die Aufgabe hat eine oder mehrere Auflösungen. Das Letztere tritt übrigens nur dann, aber dann immer ein, wenn

$$(19)\qquad A > nN - B$$

ist, falls

$$(20)\qquad N = pqr\ldots,\ p' = \frac{N}{p},\ q' = \frac{N}{q} \text{ etc.},\ B = p' + q' + r' + \cdots$$

gesetzt wird.[1]) Es genügt aber die Aufsuchung irgend einer Auflösung, wie ebenfalls aus der Fußnote hervorgeht. — Nun liegt es

[1]) Es muß nämlich der Wert von $\frac{A}{N}$

$$> \frac{p_1-1}{p_1}+\frac{p_2-1}{p_2}+\cdots+\frac{p_n-1}{p_n}$$

sein, denn sonst wäre nach dem vorhin erwähnten Satze von Gauß die gewonnene Darstellung (16), (bei der die im allgemeinen hinzuzufügende ganze Zahl den

Digitized by Google

nahe, nach dem (jedenfalls kleineren) Werte von A zu fragen, von welchem an nach oben hin immer eine Auflösung vorhanden sein muß. Derselbe ist keinesfalls kleiner als B, doch ist es mir gelungen, einen solchen unteren Grenzwert mit Sicherheit zu ermitteln, was jedoch für unsere speziellere Anwendung ohne Belang ist. Vergleiche noch das folgende zweite Beispiel!

Nehmen wir nunmehr ein Beispiel: Sei $\frac{4096}{3.5.11.13}$ in Partialbrüche zu zerlegen und zunächst der Bruch $\frac{1}{3.5.11.13}$.

Für den Nennerfaktor 3 ($p=3$, $p'=5.11.13=715$) wird die Gleichung (11):

$$715\alpha - 3\beta = 1, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 238,$$

ebenso für 5: $429\alpha - 5\beta = 1, \quad \alpha = -1, \quad \beta = -86,$

„ 11: $195\alpha - 11\beta = 1, \quad \alpha = -4, \quad \beta = -71,$

„ 13: $165\alpha - 13\beta = 1, \quad \alpha = 3, \quad \beta = 38.$

Wir setzen also

$$3 = p_1, \quad \alpha_1 = 1 \quad k = 2 \quad 5 = p_3 \quad \alpha_3' = 1$$
$$13 = p_2, \quad \alpha_2 = 3 \qquad 11 = p_4 \quad \alpha_4' = 4,$$

dann wird

$$\frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} - \frac{\alpha_3'}{p_3} - \frac{\alpha_4'}{p_4} = \frac{715 + 495 - 429 - 780}{3.13.5.11} = \frac{1}{N}.$$

Mit $A = 4096$ werden die rechten Seiten der Ungleichungen (15)

$$\frac{\alpha_1 A}{p_1} = \frac{A}{3} = 1365\frac{1}{3} \quad \Big| \quad \frac{\alpha_3' A}{p_3} = \frac{A}{5} = 819\frac{1}{5}$$
$$\frac{\alpha_2 A}{p_2} = \frac{3A}{p_3} = 945\frac{1}{13} \quad \Big| \quad \frac{\alpha_4' A}{p_4} = \frac{4A}{11} = 1489\frac{5}{11}$$

sodann die Ungleichungen (17):

$$m_1 \lessgtr 1365 \quad \Big| \quad m_3 \gtrless 820$$
$$m_2 \lessgtr 945 \quad \Big| \quad m_4 \gtrless 1490$$

Wert 0 hat), die einzig mögliche. Ist aber einer oder sind mehrere der Brüche unecht, so kann man Einheiten von diesen Brüchen absondern und zu beliebigen anderen hinzufügen und dadurch der Auflösung verschiedene Formen geben. Der obige Ausdruck ist aber

$$= n - \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n}\right) = n - \frac{B}{N},$$

womit die Begrenzung durch (19) bewiesen ist.

Digitized by Google

und somit die Bedingung (18):

$$2310 \overline{\overline{\geqq}} M \overline{\overline{\geqq}} 2310.$$

Die Aufgabe hat also eine, und zwar nur eine Lösung; es ist

$$m_1 = 1365, \quad m_2 = 945, \quad m_3 = 820, \quad m_4 = 1490,$$

daraus folgen die Werte nach (13):

$$\begin{aligned} x_1 &= A - 3m_1 = 4096 - 4095 = 1 \\ x_2 &= 3A - 13m_2 = 12288 - 12285 = 3 \\ x_3 &= 5m_3 - A = 4100 - 4096 = 4 \\ x_4 &= 11m_3 - 4A = 16390 - 16384 = 6, \end{aligned}$$

also

$$\frac{4096}{3.5.11.13} = \frac{1}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{11} + \frac{3}{13}.$$

Behandeln wir die Aufgabe mit

$$A = 2.4096 = 8192$$

in genau gleicher Art, so erhalten wir:

$$\frac{8192}{3.5.11.13} = \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{1}{11} + \frac{32}{13}.$$

Nimmt man jetzt von dem letzten Bruch zwei Einheiten ab und legt jedem der beiden mittleren Brüche eine Einheit zu, so wird die rechte Seite

$$\frac{2}{3} + \frac{8}{5} + \frac{12}{11} + \frac{6}{13};$$

dies ist aber das Doppelte der früheren rechten Seite, so daß man die Lösung für $A = 4096$ aus der Lösung für $A = 8192$ ableiten könnte. Hingegen ergibt sich aus der Lösung für $A = 4096$ keine für $A = \frac{1}{2} \cdot 4096 = 2048$, so daß man schließen muß, daß für $A = 2048$ keine Lösung verlangter Form existiert, und in der Tat erhält man dafür als Bedingung (18)

$$1154 \overline{\overline{\geqq}} M \overline{\overline{\geqq}} 1155,$$

welcher nicht genügt werden kann.

Wir nehmen noch einen anderen Nenner an. Der Bruch $\frac{A}{3.5.7}$ soll in positive Partialbrüche zerlegt werden. Das kleinste A, bei

Digitized by Google

dem dies möglich ist, ist $A = B = 71$ und $\frac{71}{105} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}$. Darüber hinaus hat die Aufgabe keine Lösung für die Werte:

$A = 73, 74, 76, 79, 82, 83, 88, 89, 94, 97, 103, 104, 109, 118, 124.$

Über $A = 124$ hinaus sind immer Lösungen vorhanden.

Die Anwendung auf unsere eigentliche Aufgabe ist nunmehr äußerst einfach.

Soll der Bruch $\frac{1}{pqr\ldots}$, worin $p, q, r, \ldots$ ungerade Primzahlen oder Primzahlpotenzen sind, in eine Summe von Potenzen von $\frac{1}{2}$ umgeformt werden, so nehme man γ als genügend hohe Potenz von 2, etwa $= 2^\sigma$ an, so daß $\frac{\gamma}{pqr\ldots}$ sich in positive Partialbrüche der Form $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} + \cdots$ zerlegen läßt. Dabei nehme man entweder γ irgendwie probeweise (nur $\overline{\overline{>}} B$) an oder $\overline{\overline{>}} n N - B$ nach Gleichung (20) und sehe nach, ob sich die Gleichung für $\frac{\gamma}{pqr\ldots}$ durch 2 oder (sukzessive) durch höhere Potenzen von 2 heben läßt. Hat man dann, wie vorhin gezeigt, die Brüche $\frac{x}{p}, \cdots$ als Summen von Potenzen von $\frac{1}{2}$ dargestellt, so hat man das Resultat nur noch mit $\left(\frac{1}{2}\right)^\sigma$ zu multiplizieren — und die Aufgabe ist gelöst.

Beispiel. Sei $\frac{1}{315}$ als Summe von Potenzen von $\frac{1}{2}$ darzustellen.

Auflösung. Es ist nach angegebener Methode

$$\frac{1}{315} = \frac{1}{5.7.9} = \frac{2}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} = \frac{126-125}{315}, \quad B = 126 + 125 = 251.$$

Nehmen wir, um keine Rechnung unnütz zu machen, $\gamma > n N - B = 3.315 - 251 = 694$, also $\gamma = 1024 = 2^{10}$, so erhalten wir als Bedingung für M:

$$409 \overline{\overline{>}} M \overline{\overline{>}} 406,$$

welche also vier Werte für M gestattet. Nehmen wir $M = 409$, so kommt (mit $\varkappa = 2$):

$$m_1 = 409, \; m_2 \overline{\overline{>}} 293, \; m_3 \overline{\overline{>}} 113 \text{ und es sei}$$
$$m_1 = 409, \; m_2 = 295, \; m_3 = 114;$$

Digitized by Google

damit wird nach (13): $x_1 = 3$, $x_2 = 17$, $x_3 = 2$, also

$$\frac{1024}{315} = \frac{3}{5} + \frac{17}{7} + \frac{2}{9};$$

nehmen wir vom zweiten Bruch auf der rechten Seite eine Einheit fort und legen sie dem ersten zu, so können wir die Gleichung durch 2 heben und erhalten:

$$\frac{512}{315} = \frac{4}{5} + \frac{5}{7} + \frac{1}{9} = \frac{2^2}{5} + \frac{2^2+1}{7} + \frac{1}{9}.$$

Stellen wir nun $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$ durch Potenzsummen von $\frac{1}{2}$ dar:

$$\frac{1}{5} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \left(\frac{1}{2}\right)^{11} + \left(\frac{1}{2}\right)^{12} + \cdots$$

$$\frac{1}{7} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^9 + \left(\frac{1}{2}\right)^{12} + \cdots$$

$$\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \left(\frac{1}{2}\right)^{11} + \left(\frac{1}{2}\right)^{12} + \cdots$$

multiplizieren mit den Zählern, ziehen so weit wie möglich zusammen und multiplizieren schließlich mit $\left(\frac{1}{2}\right)^9$, so erhalten wir

$$\frac{1}{315} = \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3\right) \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{12} + \left(\frac{1}{2}\right)^{24} + \cdots\right\}.$$

II.

Als zweites, ich möchte sagen, naturgemäßes Mittel zur Lösung derselben Aufgabe bietet sich die Rechnung mit Dyaden[1]) dar. Ebenso wie jeder echte Bruch durch die Verwandlung in einen Dezimalbruch in eine Summe von Potenzen von $\frac{1}{10}$ umgeformt wird, so bei der Verwandlung in einen Dualbruch in eine Summe von Potenzen von $\frac{1}{2}$. Als Zahlzeichen sind nur 0 und 1 zu gebrauchen, die Ziffern bedeuten nach ihrer Stellung links vom (Dual-) Komma die 0^{te}, 1^{te}, 2^{te} ... Potenz von 2, rechts von demselben

[1]) Auf die Dyadenrechnung hat Leibnitz, Mém., Paris, 1703 (Opera omnia ed. Dutens 3, p. 390, nach dem Zitat der math. Enzyklop., Bd. I, S. 59), aufmerksam gemacht und dieselbe mit chinesischen bildlichen Darstellungen vermutungsweise in Zusammenhang gebracht.

Digitized by Google

die 1^{te}, 2^{te}, 3^{te} ... Potenz von $\frac{1}{2}$; so ist z. B. die Zahl 100 im dyadischen System, dessen Zahlen wir, wenn eine Bezeichnung wünschenswert, durch einen über die Zahl gesetzten Bogen kennzeichnen $\overbrace{1100100}$ zu schreiben, $\frac{5}{16}$ als $\overbrace{0{,}0101}$; die Rechnungsregeln sind im wesentlichen die gleichen wie bei dem Dezimalsystem, die Subtraktion und Division erscheinen etwas bequemer als die Addition und Multiplikation. Bezüglich der Subtraktion merke man (als selbstverständlich):

Eine 0 im Minuendus gilt als 0, wenn darunter (im Subtrahendus) eine 0 steht; als 2, wenn darunter eine 1 steht; eine angepumpte 0 ist 1; eine angepumpte 1 ist 0, also unter Umständen gleich 2.

So nimmt sich z. B. die Verwandlung von $\frac{1}{5}$ in einen Dualbruch folgendermaßen aus:

dyadisch 101 | 1,000 | 0,00110011 ...
101
110
101
1000
101
110
etc.,

also ist

$$\frac{1}{5}=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^7+\left(\frac{1}{2}\right)^8+\left(\frac{1}{2}\right)^{11}+\left(\frac{1}{1}\right)^{12}+\cdots,$$

von welchen Resultats Richtigkeit man sich leicht überzeugen kann. Ebenso stellt sich die Verwandlung von $\frac{1}{17}$ in einen Dualbruch folgendermaßen dar:

dyadisch 10001 | 1,00000 | 0,$\overbrace{00001111}^{\text{Periode}}$ etc.
10001
11110
10001
11010
10001
10010
10001
100000
10001
11110
etc.

Digitized by Google

Dieses Resultat stimmt mit dem vorhin in I, Gl. (6), gefundenen vollständig überein, wie es nach Satz 2 am Anfang von I zu erwarten ist.

Ebenso wie die aus rationalen Brüchen entstehenden Dezimalbrüche, haben auch die aus solchen entstehenden Dualbrüche Perioden. Zuerst $\frac{1}{p}$, wo p eine ungerade Primzahl ist. Ist m die kleinste Zahl derart, daß p in $2^m - 1$ aufgeht, so ist die Periode m-stellig, denn bei Benützung der m^{ten} 0 nach dem Dualkomma hat man unter Fortdenkung des Kommas p in 2^m dividiert, also muß der Rest der Voraussetzung gemäß 1 sein, die Ziffern sich also zu wiederholen anfangen. So ist für $\frac{1}{7}$ die dyadische Periode 3stellig. Ist daher 2 primitive Wurzel für p, so ist die Periode $(p-1)$-stellig, sonst hat sie weniger Stellen.

Ist $\mu = pm$, bezw. $= p^{k-1}m$, so teilt p^2 bezw. p^k die Differenz $2^\mu - 1$ und keine Differenz $2^{\mu'} - 1$, bei welcher $\mu' < \mu$, also hat $\frac{1}{p^k}$ eine μ-stellige dyadische Periode.[1])

Auch gilt folgender Satz für jedes Zahlensystem:

Wenn der Bruch $\frac{1}{p}$ (p Primzahl und prim gegen die Basis des Systems) in einen fortlaufenden Bruch (Dezimal-, Dualbruch etc.) verwandelt wird und die Periode eine gerade Anzahl Stellen hat, so ergänzen sich die Ziffern der ersten Hälfte mit den gleichvielten Ziffern der zweiten Hälfte zu der um 1 verminderten Basis des Systems. Also im dekadischen System zu 9, im dyadischen zu 1.

Beweis. Sei b die Basis des Systems und die Periode $(2n)$-stellig, so teilt p die Differenz $b^{2n} - 1$ aber keine Differenz $b^m - 1$,

[1]) Vgl. Gauß a. a. O., §§ 312 ff. — Glaisher gibt für das dekadische System zwei Ausnahmen (unterhalb 1000) an: 3 und 487, 3 hat eine 1stellige, 3^k eine Periode von 3^{k-2} Stellen, 487 hat eine 486stellige, 487^k eine Periode von 486.487^{k-2} Stellen. (On circulated decimals with special reference to Henry Goodwyns „Table of circles and Tabular series of decimal quotients, London 1818—1823"; Proceedings Cambridge, 3, 1879, S. 185. Zitat der mathem. Enzyklopädie, I. Bd., S. 565.) — In diesem Aufsatz macht Glaisher einige interessante Bemerkungen über den Bau von Dezimalbruchperioden, ohne sie eigentlich zu beweisen; darunter eine, die in ihrer Aussage, aber nicht in ihrer minder einfachen und erst während der Rechnung erkennbaren Voraussetzung, mit dem im Text folgenden Satze übereinstimmt. Das an derselben Stelle der Enzyklop. d. math. Wissensch. (I. Bd., S. 565) zitierte Buch: Keßler, Periodenlängen der Dezimalbrüche, Berlin, 1895, konnte ich mir nicht zugänglich machen. — Ob im Dyadensystem etwas dem Verhalten der 3 oder 487 Ähnliches stattfindet, bleibt zu untersuchen.

Digitized by Google

für die $m < 2n$ ist, also teilt p die Summe $b^n + 1$, da $b^n - 1$ und $b^n + 1$ relative Primzahlen sind. Sei nun

$$\frac{b^{2n} - 1}{p} = z, \quad \frac{b^n + 1}{p} = \zeta,$$

so ist:

$$\frac{1}{p} = \frac{z}{b^{2n} - 1} = \frac{z}{b^{2n}} \left(1 + \left(\frac{1}{b}\right)^{2n} + \left(\frac{1}{b}\right)^{4n} + \left(\frac{1}{b}\right)^{6n} + \cdots\right),$$

also ist die Periode $(2n)$-stellig und z gibt die Ziffern derselben an. Nun ist

$$z = \zeta (b^n - 1) = \zeta b^n - \zeta;$$

die Operation ζb^n besteht aber in der Anhängung von n Nullen an ζ und die Subtraktion des ζ hievon darin, daß statt der letzten der angehängten Nullen b gedacht wird, statt der $n-1$ vorangehenden: $b-1$, statt der letzten Ziffer des vorangehenden ζ die um 1 verkleinerte Ziffer und daß dann die Subtraktion wirklich vorgenommen wird. Die Ausführung ergibt unmittelbar den behaupteten Satz.

Zusatz. Der Satz gilt ebenso für Primzahlpotenzen und auch für eine zusammengesetzte Zahl, wenn dieselbe in $b^n + 1$ aufgeht.

Ist N eine zusammengesetzte Zahl, so ist die Stellenzahl der Periode für $\frac{1}{N}$ der kleinste gemeinsame Dividuus der Stellenzahlen für die Perioden der Primzahlen oder Primzahlpotenzen, welche den Nenner bilden. (Gauß a. a. O.)

Für zusammengesetzte Nenner gilt der obige Satz (von der Ergänzung zu $b-1$) im allgemeinen nicht mehr.

Schließlich noch einige Dualbrüche! Es ist immer bei den periodischen genau die erste Periode hingeschrieben und fett gedruckt, bei Perioden gerader Stellenzahl für die Primzahlen und Primzahlpotenzen und deren Produkte mit Potenzen von 2 sind die beiden Hälften durch einen Zwischenraum getrennt.

Tabelle für $\frac{1}{N}$ (N dekadisch, $\frac{1}{N}$ dyadisch).

N	$\frac{1}{N}$	N	$\frac{1}{N}$	N	$\frac{1}{N}$
1	1.	5	0,00 **11**...	9	0,**000 111**...
2	0,1.	6	0,0 **01**...	10	0,0 **00 11**...
3	0,**01**...	7	0,**001**...	11	0,**00010 11101**...
4	0,01.	8	0,001.	12	0,00 **0 1**...

Digitized by Google

N	$\frac{1}{N}$	N	$\frac{1}{N}$
13	0,000100 111011...	19	0,000011010 111100101...
14	0,0001...	20	0,00 00 11...
15	0,0001...	21	0,000011...
16	0,0001.	45	0,000001011011...
17	0,0000 1111...	73	0,000000111...
18	0,0 000 111...	315	0,000000001101...

Bei anderem Zähler verschiebt sich die Periode (z. B. für $N=5$) oder sie verändert sich (z. B. für $N=7$) ganz wie bei den Dezimalbrüchen, was von Gauß a. a. O. und auch von Glaisher a. a. O. näher ausgeführt wird.

Digitized by Google

Über die Verallgemeinerung des Krümmungsbegriffes für Raumkurven.[1])

Von **Bruno Arndt.**

Im Mittelpunkte nachfolgender Untersuchungen steht ein verallgemeinerter Krümmungsbegriff für Raumkurven, der sich auf eine willkürliche Richtung ebenso bezieht wie die gewöhnliche Kurvenkrümmung auf die Richtung der Tangente. Soweit aus der Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften (III *D*) ersichtlich ist, ist einzig Ph. Gilbert in dieser Richtung vorgegangen, doch ohne sich jener Verallgemeinerung bewußt zu sein. Prof. Dr. W. Fr. Meyer war es, der den verallgemeinerten Krümmungsbegriff bei Raumkurven scharf ins Auge faßte, auf ihn in seiner Vorlesung über Differentialgeometrie (1907) aufmerksam machte und daran verschiedene Anwendungen knüpfte. Eingangs bezeichnete Arbeit bringt nun, der von Prof. Dr. W. Fr. Meyer gewiesenen Spur folgend, neben einzelnen Wiederholungen aus jener Vorlesung eine Reihe von Untersuchungen, die eine weitere Ausführung der Verallgemeinerung des Krümmungsbegriffes für Raumkurven darstellen.

Es seien diejenigen Definitionen und Formeln vorausgeschickt, um deren Erweiterung bezw. Verallgemeinerung es sich in folgendem handelt:

1. Erste Krümmung einer Raum- bezw. Flächenkurve in einem ihrer (gewöhnlichen) Punkte P: $\frac{1}{r} = \frac{dt}{ds}$ (dt = Winkel zweier aufeinanderfolgenden Tangenten, Kontingenzwinkel), r erster Krümmungsradius oder Radius der ersten Krümmung;[2])

2. zweite Krümmung oder Torsion: $\frac{1}{\rho} = \frac{d\tau}{ds}$ ($d\tau$ = Winkel zweier aufeinanderfolgenden Binormalen oder Schmiegungsebenen, Torsionswinkel), ρ Radius der zweiten Krümmung oder Torsionsradius;[3])

---

[1]) Nachfolgendes stellt einen kurzen Auszug dar aus meiner Doktordissertation mit derselben Überschrift, die ich 1907 unter Leitung von Prof. Dr. W. Fr. Meyer in Königsberg i. Pr. angefertigt habe.

[2]) Siehe H. v. Mangoldt in: Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften III D 1, 2 (1902); S. 75 u. 78.

[3]) a. a. O., S. 78/79.

Digitized by Google

3. ganze Krümmung: $\frac{1}{\mathfrak{r}} = \frac{dt}{ds}$ (dt = Winkel zweier aufeinanderfolgenden Hauptnormalen, zu ds gehöriger Winkel der ganzen Krümmung), $\mathfrak{r}$ Radius der ganzen Krümmung der Kurve im bezeichneten Punkte;[1])

4. „pythagoreischer Satz für die Krümmungen der Kurve“:

$$dt^2 + d\tau^2 = dt^2, \quad \frac{1}{r^2} + \frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\mathfrak{r}^2}.^{2})$$

Erste, zweite und ganze Krümmung ordnen sich unmittelbar einem verallgemeinerten Krümmungsbegriff (k_g) für Raumkurven unter, der auf eine beliebige Richtung g in gleicher Weise Bezug nimmt, wie erste, zweite bezw. ganze Krümmung mit Tangente, Bi- bezw. Hauptnormale in Zusammenhang stehen. Der umgekehrte Wert einer Krümmung sei der Radius (r_g) der betreffenden Krümmung genannt (§ I).

Diese Verallgemeinerung des Krümmungsbegriffes erweist sich als besonders fruchtbar bei Übergang von der allgemeinen zur besonderen Raumkurve: der Flächenkurve. Da hier vor allem die Flächennormale eine ausgezeichnete Rolle spielt, so steht bei der Flächenkurve die auf jene Richtung bezügliche Krümmung: die Normalenkrümmung,[3]) im Vordergrund der Behandlung (§ II). Den hierher gehörenden analytischen Ausdruck hat bis zum gewissen Grade bereits (1868) Ph. Gilbert unter dem Namen Flexion einer Fläche längs einer Kurve[4]) untersucht.

Die Flächennormale bildet mit der konjugierten Tangente einer beliebigen Flächenkurve und mit der auf dieser senkrechten Tangente: der Richtung der Normalenkrümmung,[3]) ein Dreikant, das als assoziiertes Flächendreikant[3]) dem begleitenden Kurvendreikant (aus Tangente, Bi- und Hauptnormale) gegenübersteht. Wie Prof. Dr. W. Fr. Meyer in seiner Vorlesung (Sommer 1907) betonte, gelten für die Richtungen jenes neuen Dreikants die nämlichen Frenetschen Formeln (für Raumkurven)[5]) in entsprechend verallgemeinerter Gestalt. Sie bewahren sogar ihre Geltung für ein ganz allgemeines Dreikant längs einer willkürlichen Flächenkurve, vorausgesetzt, daß dessen Richtungen zueinander in derselben Beziehung stehen wie die des begleitenden bezw. des assoziierten Dreikants (§ III).

Prof. Dr. W. Fr. Meyer hatte in seiner Vorlesung darauf hingewiesen, daß es von Bedeutung sei, begleitendes und assoziiertes

[1]) a. a. O., S. 78/79.

[2]) a. a. O., S. 83; oder: H. Stahl u. V. Kommerell, Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie (1893), S. 83.

[3]) In der Bezeichnungsweise von Prof. Dr. W. Fr. Meyer.

[4]) Siehe R. v. Lilienthal in: Enz. d. m. W. III D 3; S. 168/69. — Die Bezeichnung „Flexion“ ist als zu unbestimmt vermieden worden.

[5]) Siehe Enz. d. m. W. III D 1, 2; S. 83.

Digitized by Google

Dreikant hinsichtlich des Zusammenfallens bezw. Senkrechtstehens ihrer Grundrichtungen längs der ausgezeichneten Kurven auf der Fläche zu betrachten. Dieser Gesichtspunkt ist in § IV maßgebend, wo außer den Grundrichtungen jener beiden Dreikante noch weitere beachtenswerte Richtungen in beiden Dreikanten in die Behandlung aufgenommen sind. Zur ersten Betrachtung solcher Richtungen gab die Festlegung einer Richtung Anlaß, deren Kosinus verhältnisgleich sind den zweiten Ableitungen der Kosinus einer Ausgangsrichtung, wie der Tangente (§ I) oder der Flächennormale (§ III).

Um die „höheren" Krümmungsradien möglichst auf erste Krümmungsradien zurückzuführen, gab Prof. Dr. W. Fr. Meyer mir eine Projektionsmethode an die Hand, die nach allgemeiner Durchführung mannigfacher Spezialisierung zugänglich und in gleicher Weise für die Raumkurve (§ V) wie für die Flächenkurve (§ VI) verwendbar ist.

§ VII endlich ist dem Radius der Schmiegungskugel längs einer allgemeinen Flächenkurve und seiner analytischen Verallgemeinerung auf das assoziierte Flächendreikant gewidmet.

§ I. Die Raumkurve: Krümmung bezüglich einer beliebigen Richtung. Festlegung der Richtung, deren Kosinus verhältnisgleich sind den zweiten Ableitungen der Tangentenkosinus nach dem Bogen der Raumkurve.

Sei Δs der Bogen einer Raumkurve $\mathfrak{C}$, von $P\ (x,\ y,\ z)$ bis zu einem benachbarten Pnnkte $Q\ (x+\Delta x,\ ..)$, $\Delta\omega$ der positive spitze Winkel zwischen einer willkürlichen (oder dem Punkte P nach einem gegebenen Gesetz eindeutig zugeordneten) Richtung g mit den Kosinus $g_x,\ g_y,\ g_z$ durch P und der benachbarten Richtung $g+\Delta g$ mit den Kosinus $g_x+\Delta g_x,\ ..$ durch Q, so verstehe man unter der Krümmung k_g von $\mathfrak{C}$ in P bezüglich der Richtung g den Grenzwert, dem das Verhältnis $\frac{\Delta\omega}{\Delta s}$ bei unbegrenzter Annäherung des Punktes Q an P zustrebt:

$$k_g = \lim_{\Delta s = 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta s} = \frac{d\omega}{ds} \equiv \omega'. \tag{1}$$

Ist der Parameter von $\mathfrak{C}$ der Kurvenbogen s, so ergibt sich das Quadrat von k_g dadurch, daß man die Kosinus von g nach s differenziert, quadriert und addiert:

$$k_g = +\sqrt{\Sigma\left(\frac{dg_x}{ds}\right)^2}. \tag{2}$$

Der umgekehrte Wert von k_g sei der Radius der Krümmung von $\mathfrak{C}$ in P nach g genannt:

$$r_g = \frac{1}{k_g}. \tag{3}$$

Digitized by Google

Die Anwendung von (2) auf die drei Richtungen des begleitenden Kurvendreikants liefert die erste $\left(\frac{1}{r}\right)$, die zweite $\left(\frac{1}{\rho}\right)$ und die ganze Krümmung $\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right)$ von $\mathfrak{C}$ in P.

Außer Tangente, Bi- und Hauptnormale ist eine Reihe weiterer ausgezeichneter Richtungen beachtenswert. Sie stehen in Beziehung zu der Richtung d, deren Kosinus verhältnisgleich sind den zweiten Ableitungen der Tangentenkosinus nach s. Betrachtet man den ersten und zweiten Krümmungsradius sowie die Tangente t, die Hauptnormale h und die Richtung p nach dem Pol von $\mathfrak{C}$ in P als gegeben, so gelingt die Festlegung jener Richtung im wesentlichen mit Hilfe von zwei rechtwinkligen Dreiecken.

A. Man errichte in P die auf t und h Senkrechte: die Binormale b, trage auf ihr in positiver Richtung eine Strecke $PP_1 = \mathfrak{r} = \frac{r\rho}{+\sqrt{r^2+\rho^2}}$ ab und zeichne im Punkte P_1 in der rektifizierenden Ebene von P das Lot. Seine positive Richtung wird von einem um P mit r als Halbmesser geschlagenen Kreisbogen in P_2 getroffen. Das Lot der durch PP_2 ($\equiv f$) und p gelegten Ebene gibt die gesuchte Richtung d.

B. Man zeichne die Lotebene von p und bringe diese zum Durchschnitt mit der Normalebene von $\mathfrak{C}$ in P. Auf der positiven Richtung der Schnittgeraden n jener beiden Ebenen mache man $PP' = R$, der Hypotenuse des aus den Richtungen h, p in der Normalebene gebildeten, im Krümmungsmittelpunkt rechtwinkligen Dreiecks, und errichte in P' auf n in der Lotebene von p die Senkrechte, der man die Länge $P'P'' = \rho$ gebe. Die Verbindung von P mit P'' liefert d.

Die Kosinus der Richtungen t, b, h, p, n, f, d nebst einer Richtung q, deren Kosinus den Ableitungen der Hauptnormalenkosinus verhältnisgleich sind, ordnen sich bezüglich ihrer analytischen Darstellung der einer Richtung c unter, die auf das begleitende Dreikant als Koordinatensystem bezogen ist; die Krümmung von $\mathfrak{C}$ in P nach c bestimmt sich zu:

$$k_c^2 = c_t'^2 + c_b'^2 + c_h'^2 + \tag{4}$$

$$+\left(\frac{c_t}{r} - \frac{c_b}{\rho}\right)^2 + \frac{c_h^2}{\mathfrak{r}^2} + \frac{2}{r}\begin{vmatrix} c_t & c_t' \\ c_h & c_h' \end{vmatrix} + \frac{2}{\rho}\begin{vmatrix} c_b & c_h' \\ c_h & c_b' \end{vmatrix},$$

wo c_t, c_b, c_h die Kosinus der Winkel sind, welche die Richtung c mit den Grundrichtungen des begleitenden Dreikants bildet. Die Kosinus der Winkel, die jene acht Richtungen zu je zweien einschließen, drücken sich in einfacher Weise durch das Verhältnis von Krümmungsradien (einschließlich des Radius der Schmiegungskugel) aus.

Digitized by Google

§ 11. Die Flächenkurve: Krümmung bezüglich der Normalenrichtung.

Zur Übertragung des verallgemeinerten Krümmungsbegriffes für Raumkurven auf eine Fläche $\mathfrak{F}$ ziehe man eine (wenigstens in einem gewissen Bereiche) ganz auf ihr verlaufende (Flächen-) Kurve L und bestimme deren Krümmung in einem ihrer (gewöhnlichen) Punkte P (x, y, z) bezüglich der Richtung, die hier vornehmlich als ausgezeichnet anzusprechen ist: der Flächennormale ν von $\mathfrak{F}$ in P. Diese Krümmung, Normalenkrümmung von $\mathfrak{F}$ in P längs der Flächenkurve L genannt und mit $k_\nu^L \equiv \frac{1}{r_\nu^L}$ bezeichnet, ist für den Bogen s von L als Parameter erklärt durch:

$$k_\nu^L \equiv \frac{1}{r_\nu^L} = +\sqrt{\Sigma\left(\frac{da}{ds}\right)^2} = +\sqrt{\frac{\Sigma da^2}{\Sigma dx^2}}, \quad (5)$$

[1])

unter a, b, c die Flächennormalenkosinus in P verstanden. Im übrigen richtet sich der Ausdruck für k_ν^L in seiner Gestalt nach der zu Grunde gelegten Form der Flächengleichung.

Die Normalenkrümmung steht in naher Verwandtschaft mit dem Linienelement $d\bar{s}$ der Einheitskugel bei der sphärischen Abbildung, die dadurch ihrerseits in engerem Zusammenhange mit der Fläche erscheint:

$$k_\nu^L = \frac{d\bar{s}}{ds}. \quad (6)$$

Ferner läßt sie sich für die Parameterform der Flächengleichung als simultane Kovariante der beiden Gaußschen Flächenformen Φ, Ψ darstellen:

$$k_\nu^L = h\Psi - k\Phi \quad (7)$$

und erscheint damit als Sonderfall einer allgemeinen, in den Ableitungen der Flächenparameter u, v nach s quadratischen Differentialform:

$$A(u', v') = A_{11}u'^2 + 2A_{12}u'v' + A_{22}v'^2, \quad (8)$$

deren beliebige, reelle Koeffizienten so beschaffen seien, daß die Diskriminante (von A) nicht verschwindet.

Die nähere Betrachtung von (8) lehrt: Richtung und Wert des Maximums A_a und Minimums A_i von A fallen stets reell aus; Summe und Produkt der äußersten Werte ergeben sich als Verallgemeinerung der mittleren Krümmung und des Gaußschen Krümmungsmaßes der Fläche. Zu einem

[1]) Siehe Enz. d. m. W. III D 3; S. 168.

Digitized by Google

vorgeschriebenen Werte von A gehören (im allgemeinen) zwei Kurvenrichtungen durch P; diese bilden eine projektive Beziehung, deren Doppelelemente in die Richtungen der äußersten Werte von A fallen. Trägt man auf sämtlichen durch P laufenden Flächentangentenrichtungen von P aus nach beiden Seiten die Quadratwurzel aus dem umgekehrten, zu der betreffenden Tangente gehörenden Werte von A ab, so ist der geometrische Ort für den Endpunkt der aufgetragenen Strecken ein Mittelpunktskegelschnitt in der Tangentenebene von P, mit P als Mittelpunkt. Für seine Natur ist die Beschaffenheit der Koeffizienten A_{ik} maßgebend. Die Richtungen seiner Hauptachsen sind die der äußersten Werte der Form A. Die auf diese Richtungen (unter Einführung von Polarkoordinaten) bezogene Gleichung jenes Kegelschnittes stellt die Verallgemeinerung des Eulerschen Satzes[1]) dar:

$$A = A_a \cos^2\varphi + A_i \sin^2\varphi. \tag{9}$$

Der Winkel Ω zwischen einem Paar konjugierter Durchmesser ist bestimmt durch:

$$tg\,\Omega = \frac{A\delta}{K_A}, \tag{10}$$

wo δ die Diskriminante von Φ, K_A die bezüglich A verallgemeinerte Krümmungsform[2]) bedeuten. Weiter hat jener Kegelschnitt im Falle der Ellipse einen Inhalt, der verhältnisgleich ist der Quadratwurzel aus der Diskriminante von Φ, dividiert durch die von A:

$$E_A = \pi \sqrt{\frac{EG - F^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}}. \tag{11}$$

Von diesen Untersuchungen allgemeineren Charakters läßt sich leicht Anwendung machen auf die quadratische Form der Normalenkrümmung. Ferner vermittelt diese ein geometrisch einfaches Gesetz für den Kosinus des Winkels H zwischen Haupt- und Flächennormale bezw. für den Sinus des Winkels τ zwischen Flächentangente t und ihrer konjugierten Tangente b_ν längs einer allgemeinen Flächenkurve L:

$$(r_\nu^L)\cos H = (r_t^L)\sin\tau. \tag{12}$$

Auf Grund von (12) ist man im stande, den Wert der Normalenkrümmung längs ausgezeichneter Kurven auf der Fläche anzugeben. Insbesondere fallen ihre äußersten Werte an einer Stelle P der Fläche, die mit denen der Normalschnittskrümmung daselbst entsprechend übereinstimmen, in die Richtungen der Krümmungslinien, und der Satz von

[1]) Siehe Enz. d. m. W. III D 1, 2; S. 94 bezw. III D 3; S. 107.
[2]) Die linke Seite der Differentialgleichung der Krümmungslinie.

Digitized by Google

Rodrigues[1]) ist das Gesetz, das die Normalenkrümmung auf der Krümmungslinie befolgt.

§ III. Verallgemeinerung der Frenetschen Formeln für Raumkurven. Anwendung auf das assoziierte Dreikant.

Es werde nunmehr ein Dreikant längs einer Raum- oder Flächenkurve betrachtet, dessen Richtungen (g, b_g, h_g) zueinander in derselben Beziehung stehen wie die (t, b, h) des gewöhnlichen, des begleitenden Dreikants. Für jenes gelten in erster Linie die Frenetschen Formeln in unveränderter, entsprechend verallgemeinerter Form:

$$\alpha'_g = \frac{l_g}{r_g},\quad \lambda'_g = -\frac{l_g}{\rho_g},\quad l'_g = -\frac{\alpha_g}{r_g} + \frac{\lambda_g}{\rho_g},\quad \ldots \tag{13}$$

Die Summe aus den Quadraten der Krümmung jener Kurve nach der ersten und nach der dritten verallgemeinerten Frenetschen[2]) Richtung (g, b_g) ist in jedem Kurvenpunkte dem Quadrat ihrer Krümmung nach der zweiten Richtung (h_g) gleich:

$$\frac{1}{r_g^2} + \frac{1}{\rho_g^2} = \frac{1}{\mathfrak{r}_g^2}. \tag{14}$$

Für die analytische Verallgemeinerung R_g des Radius der Schmiegungskugel (R) auf das allgemeine Dreikant g, b_g, h_g gelten entsprechende Beziehungen wie für die ursprüngliche Größe. Mit ähnlichen Hilfsmitteln wie in § I vermag man eine Richtung (d_g) festzulegen, deren Kosinus verhältnisgleich sind den zweiten Ableitungen der Kosinus der Ausgangsrichtung.

Als solche sei nun neben Tangente, Bi- und Hauptnormale vor allem die Flächennormale gewählt und das dieser zugehörige Dreikant als assoziiertes Flächendreikant bezeichnet. Gebildet wird es aus Flächennormale ν, konjugierter Tangente b_ν und der auf dieser senkrechten Tangente h_ν: der Richtung der Normalenkrümmung. Auch auf das assoziierte Dreikant lassen sich alle Untersuchungen des ersten Abschnittes unmittelbar übertragen; nur die Frage nach der geometrischen Bedeutung des auf dieses Dreikant verallgemeinerten Radius der Schmiegungskugel bleibt noch offen (s. § VII).

§ IV. Begleitendes und assoziiertes Dreikant längs der drei ausgezeichneten Flächenkurven.

Für die drei besonderen Flächenkurven: die Krümmungs- $(K \equiv |\alpha\, a\, a'| = 0)$, die Asymptoten- $(\Psi \equiv \Sigma\, a\, \alpha' = -\Sigma\, a'\, \alpha = 0)$, die

[1]) Siehe Enz. d. m. W. III D 3; S. 110.

[2]) In der Bezeichnungsweise von Prof. Dr. Schoenflies.

Digitized by Google

geodätischen Linien ($\Gamma \equiv |a\,\alpha\,\alpha'| = 0$), gilt zunächst folgende Übersicht, wo $\frac{1}{\rho_\nu}$ die Krümmung nach der konjugierten Tangente bedeutet:

	$K=0$	$\Psi=0$	$\Gamma=0$
$H=(h,\nu)$	$-\int\frac{ds}{\rho}+kst.$	$\frac{\pi}{2}$	0
$\tau=(t,b_\nu)$	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\int\frac{ds}{\rho_\nu}+kst.$
$H'=K-\frac{1}{\rho}$	$-\frac{1}{\rho}$	0	0
$\tau'=\Gamma-\frac{1}{\rho_\nu}$	0	0	$-\frac{1}{\rho_\nu}$
$\cos H$	$\frac{r}{r_\nu}$	0	1
$\sin H$	$\frac{r}{\rho_\nu}$	1	0
$\cos\tau$	0	1	$\frac{r_\nu}{\rho}$
$\sin\tau$	1	0	$\frac{r_\nu}{r}$
K	0	$\frac{1}{r_\nu}=\frac{1}{\rho}$	$\frac{1}{\rho}$
Ψ	$\frac{1}{r_\nu}$	0	$\frac{1}{r}$
Γ	$\frac{1}{\rho_\nu}$	$\frac{1}{\rho_\nu}=\frac{1}{r}$	$0.$

Um weiter begleitendes und assoziiertes Dreikant miteinander zu verknüpfen, seien die Kosinus der Winkel bestimmt, welche die ausgezeichneten Richtungen in beiden Dreikanten zu je zweien bilden. Dazu bedarf es der Betrachtung von Differentialformen höherer Ordnung, im Anschluß an K, Ψ, Γ und deren Produkte zu je zweien. Jene Differentialformen, wie z. B.:

Digitized by Google

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} |a\,a\,a''| = -\dfrac{\Psi}{\rho} - \dfrac{r'}{r}\,\Gamma = -\dfrac{R}{r^2\rho}\cos(p,\nu) \\ |a\,a''\,a| = \quad \dfrac{\Psi}{\rho_\nu} - \dfrac{r'_\nu}{r_\nu}K = -\dfrac{R_\nu}{r_\nu^2\rho_\nu}\cos(t,p_\nu) \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{l} \Sigma\, a\,a'' = \dfrac{\Gamma}{\rho} - \dfrac{r'}{r}\,\Psi = \dfrac{\sqrt{R^2+\rho^2}}{r^2\rho}\cos(d,\nu) \\ \Sigma\, a''\,a = \dfrac{K}{\rho_\nu} + \dfrac{r'_\nu}{r_\nu}\,\Psi = \dfrac{\sqrt{R_\nu^2+\rho_\nu^2}}{r_\nu^2\rho_\nu}\cos(t,d_\nu), \end{array}\right.$$

sondern sich in zwei Gruppen, die bei der Vertauschung der Flächennormalen- (a, b, c) mit den Tangentenkosinus (α, β, γ) ineinander übergehen; dieser Übergang wird gekennzeichnet durch den der beiden Größenreihen:

$$K,\quad \Psi,\ r,\ r',\ \rho,\ R,\ H',\ \cos\tau\{=\cos(t,b_\nu)\},\ \cos H\{=\cos(h,\nu)\}\ \text{u. s. w.}$$

$$\Gamma,\ -\Psi,\ r_\nu,\ r'_\nu,\ \rho_\nu,\ R_\nu,\ \tau',\ \sin H\{=\cos(\nu,b)\},\ -\sin\tau\{=\cos(t,h_\nu)\}\ \text{u. s. w.}$$

Er ist wohl auch der innere Grund für die Gegenstellung der Krümmungs- und der geodätischen Form bezw. Linie einerseits und der Sonderstellung der asymptotischen Form bezw. Linie anderseits, die in den Ergebnissen dieses Abschnitts deutlich in Erscheinung treten.

Die Kosinus jener Winkel nun drücken sich für eine allgemeine Flächenkurve durch folgende neun Größen aus: K, Ψ, Γ, r, r_ν, ρ, ρ_ν, R, R_ν. τ, τ_ν, $\rho r'$, $\rho_\nu r'_\nu$ sind auf diese zurückführbar; es ist ferner beachtenswert, daß allein die Ableitungen r' bezw. r'_ν auftreten.

Einen Einblick in das Größenverhältnis der Krümmungsradien längs der drei ausgezeichneten Flächenkurven gewährt folgende Zusammenstellung:

	$K=0$	$\Psi=0$	$\Gamma=0$
r	$=\tau_\nu, <r_\nu, \rho_\nu, R_\nu$	$=\rho_\nu$	$>r_\nu, \tau_\nu$
ρ		$=r_\nu$	$>r_\nu, \tau_\nu$
τ	$<r_\nu, \rho_\nu, \tau_\nu$	$=\tau_\nu$	$=r_\nu, >\tau_\nu$
r_ν	$>r, \tau$	$=\rho$	$=\tau, <r, \rho, R$
ρ_ν	$>r, \tau$	$=r$	
τ_ν	$=r, >\tau$	$=\tau$	$<r, \rho, \tau$
R		$>\tau_\nu$	$>r_\nu$
R_ν	$>r$	$>\tau$	

Digitized by Google

Aufschluß über das Senkrechtstehen bezw. Zusammenfallen gewisser Richtungen auf jenen Kurven gibt nachstehende Übersicht:

	K=0		Ψ=0		Γ=0	
t	$\perp \nu, b_\nu, q_\nu, f_\nu$	$= -h_\nu$	$\perp \nu,\ h_\nu$	$= b_\nu$	$\perp \nu$	
b	$\perp h_\nu,\ q_\nu$	$= f_\nu$	$\perp b_\nu, h_\nu, p_\nu, n_\nu$	$= \nu$	$\perp \nu$	
h	$\perp h_\nu,\ f_\nu$	$= -q_\nu$	$\perp \nu,\ b_\nu,\ q_\nu, f_\nu$	$= -h_\nu$	$\perp b_\nu, h_\nu, p_\nu, n_\nu$	$= \nu$
q	$\perp\ q_\nu$		$\perp h_\nu,\ f_\nu$	$= -q_\nu$	$\perp \nu,\ b_\nu,\ q_\nu, f_\nu$	$= h_\nu$
f	$\perp\ q_\nu$		$\perp h_\nu,\ q_\nu$	$= f_\nu$	$\perp \nu,\ h_\nu$	$= b_\nu$
p	$\perp h_\nu$		$\perp b_\nu$			
n	$\perp h_\nu$		$\perp b_\nu$			

oder:

	K=0		Ψ=0		Γ=0	
ν	$\perp t$		$\perp t,\ h$	$= b$	$\perp t,\ b,\ q,\ f$	$= h$
b_ν	$\perp t$		$\perp b,\ h,\ p,\ n$	$= t$	$\perp h,\ q$	$= f$
h_ν	$\perp b, h, p, n$	$= -t$	$\perp t,\ b,\ q,\ f$	$= -h$	$\perp h,\ f$	$= q$
q_ν	$\perp t,\ b,\ q, f$	$= -h$	$\perp h,\ f$	$= -q$	$\perp\ q$	
f_ν	$\perp t,\ h$	$= b$	$\perp h,\ q$	$= f$	$\perp\ q$	
p_ν			$\perp b$		$\perp h$	
n_ν			$\perp b$		$\perp h$	

§ V. Projektionen im Zusammenhang mit der Raumkurve.

Projiziert man die eine Raumkurve begleitende Geradenschar g auf eine feste Ebene Σ_{g_0}, die als Verallgemeinerung der gewöhnlichen Schmiegungsebene (Σ_t) aufzufassen ist, in einer verfügbaren Richtung ξ $(, \eta, \zeta)$ und bestimmt man den Krümmungsradius Π_ξ^g der so erhaltenen Projektionskurve in der Umgebung des festen Kurvenpunktes P_0, durch den Σ_{g_0} geht, so ergibt sich Π_ξ^g als ganze Funktion dritten Grades von r_g, dem Radius der Raumkurvenkrümmung in P_0 nach g_0; nämlich:

$$(16) \qquad \Pi_\xi^g = -\frac{r_g}{\zeta}\left\{2\begin{vmatrix}\alpha_0 & \xi\\ \gamma_0 & \zeta\end{vmatrix} - \frac{r_g}{r}\begin{vmatrix}m_0 & \eta\\ n_0 & \zeta\end{vmatrix} + \frac{r_g^2}{\zeta}\begin{vmatrix}\varrho_0 & \eta\\ \gamma_0 & \zeta\end{vmatrix}\begin{vmatrix}f_0'' & \eta\\ g_0'' & \zeta\end{vmatrix}\right\}.$$

Digitized by Google

Hierin bedeuten:

$$\alpha_0 = \cos(t_0, g_0),\ \beta_0 = \cos(t_0, h_{g_0}),\ \gamma_0 = \cos(t_0, b_{g_0});$$

$$m_0 = \cos(h_0, h_{g_0}),\ n_0 = \cos(h_0, b_{g_0});$$

$$f_0'' = \cos(d_{g_0}, h_{g_0})\sqrt{\Sigma e_0''^2},\ g_0'' = \cos(d_{g_0}, b_{g_0})\sqrt{\Sigma e_0''^2},$$

wenn man unter t_0 die (positive) Richtung der Tangente, unter h_0 die der Hauptnormale in P_0, unter h_{g_0}, b_{g_0}, d_{g_0} beziehentlich die Richtungen durch P_0 versteht, deren Kosinus verhältnisgleich sind: e', f', g' bezw. $\begin{vmatrix} e & f \\ e' & f' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}$ bezw. e'', f'', g''.

Zur Spezialisierung der Projektionsrichtung $\mathfrak{x}$, durch deren Wahl die Koeffizienten von $\Pi_{\mathfrak{x}}^{g}$ wesentlich bedingt sind, kommen als am vorteilhaftesten in Frage: 1. die Tangente t_0, 2. die Binormale b_0, 3. die Hauptnormale h_0; ferner die Richtungen: 4. g_0, 5. b_{g_0}, 6. h_{g_0} und 7. d_{g_0}. Die Projektion nach t_0 insbesondere liefert eine einfache Konstruktion des Krümmungsradius r_g. — Durch geeignete nähere Angabe der Grundrichtung g bezw. der ihr zugehörigen Geradenschar erhält man anderseits u. a. folgende Sätze:

a) In welcher Richtung man die Tangentenschar einer Raumkurve auf die Schmiegungsebene eines ihrer Punkte P_0 auch projizieren mag, stets stimmt, vom Vorzeichen abgesehen, der Krümmungsradius der dadurch entstandenen Projektionskurve mit dem ersten Krümmungsradius der Raumkurve in P_0 überein: $\left|\Pi_{\mathfrak{x}}^{t}\right| = r$.

b) Der Radius der Krümmung einer Raumkurve an der Stelle P_0 nach der Binormale ist das geometrische Mittel zweier ersten Krümmungsradien: des Radius ihrer Krümmung nach der Tangente und des Krümmungsradius derjenigen Projektionskurve in P_0, die man durch Projektion ihrer Binormalenschar nach der Tangente des festen Kurvenpunktes in der diesem zugehörigen Normalebene erhält: $\rho^2 = r\left|\Pi_{t_0}^{b}\right|$.

Projiziert man auf jene verallgemeinerte Schmiegungsebene Σ_{g_0} die Raumkurve selbst und verwendet dabei als Projektionsrichtungen möglichst viele der in § I als ausgezeichnet erkannten Richtungen, so folgt im allgemeinen Falle für den Krümmungsradius der zugehörigen Projektionskurve:

$$\mathfrak{R}_{\mathfrak{x}}^{\Sigma_{g_0}} = r\,\frac{\sqrt{\left|\begin{matrix}\alpha_0 & \mathfrak{x} \\ \gamma_0 & \mathfrak{z}\end{matrix}\right|^2 + \left|\begin{matrix}\beta_0 & \mathfrak{y} \\ \gamma_0 & \mathfrak{z}\end{matrix}\right|^2}^{3}}{\mathfrak{z}^2\cos(b_0, \mathfrak{x})}, \tag{17}$$

und insonderheit bei Spezialisierung von g u. a.:

Digitized by Google

c) Der Krümmungsradius der ebenen Kurve in P_0, die durch Projektion der Raumkurve auf die gewöhnliche Schmiegungsebene entsteht, ist stets (unabhängig von $\mathfrak{x}$) dem Radius der ersten Raumkurvenkrümmung gleich: $\mathfrak{R}_{\mathfrak{x}}^{\Sigma_0} = r$.[1])

d) Der zweite Krümmungsradius einer Raumkurve ist, gemäß $\rho^2 = r\,\mathfrak{R}_{f_0}^{N_0}$, die mittlere Proportionale zwischen ihrem ersten Krümmungsradius und dem derjenigen ebenen Kurve, die durch Projektion der Raumkurve nach der Richtung f_0 in der Normalebene durch P_0 hervorgeht.

e) Auf Grund von $r^2 = r\,\mathfrak{R}_{f_0}^{(h\,q)_0}$ ist der Radius der ganzen Raumkurvenkrümmung das geometrische Mittel zu den beiden ersten Krümmungsradien r, $\mathfrak{R}_{f_0}^{(h\,q)_0}$.

Es liegt nun nahe, jene beiden Projektionsmethoden (16/17) in gleicher Weise für die verallgemeinerte rektifizierende Ebene P_{g_0} und für die verallgemeinerte Normalebene N_{g_0} in Anwendung zu bringen. Man gelangt so zu folgenden Ergebnissen:

f) Der Ausdruck $\rho r'$ ist der Krümmungsradius der ebenen Kurve, die man durch Projektion der Tangentenschar der Raumkurve bezw. der Raumkurve selbst auf die rektifizierende Ebene in P_0 nach der Richtung d_0 bezw. nach d_0 oder n_0 erhält: $\rho r' = \mathfrak{P}_{d_0}^{t} = \left|\mathfrak{R}_{d_0}^{N_0}\right| = \left|\mathfrak{R}_{n_0}^{N_0}\right|$. Damit wird R, der Radius der Schmiegungskugel in P, die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten zwei erste Krümmungsradien sind.

g) Der Radius R ist auch das geometrische Mittel zu r, $\Pi_{t_0}^{b}$, $P_{d_0}^{t}$, wo $\Pi_{t_0}^{b}$ bezw. $P_{d_0}^{t}$ den Krümmungsradius der ebenen Kurve bedeutet, die durch Projektion der Binormalen- bezw. der Tangentenschar nach der Richtung t_0 bezw. d_0 in der Normalebene durch P_0 entsteht. Eine Konstruktion von R auf Grund dieses Ergebnisses ist indes unmöglich.

§ VI. Anwendung auf die Flächenkurve.

Es folge die Übertragung der Untersuchungen des vorigen Hauptteiles auf die Flächenkurve. Hier stehen sehr viel mehr Richtungen zur Verfügung, deren Scharen projiziert werden können bezw. nach denen die Projektion vorgenommen werden kann. Da die Ergebnisse für eine beliebige Kurve auf der Fläche zu allgemein ausfallen, geht man zweckmäßig im einzelnen wieder zur Krümmungs-, Asymptoten- und geodätischen Linie über. Man erreicht es auf diese Weise, daß sich längs ihnen die meisten der für

[1]) Vgl. § V *a*)!

Digitized by Google

eine Flächenkurve in Frage kommenden Krümmungsradien (und bis zum gewissen Grade auch deren Ableitungen) in einfacher geometrischer Form durch den ersten Krümmungsradius der Fläche und durch Krümmungsradien bestimmter (ebener) Projektionskurven darstellen. So gilt für eine *Krümmungslinie*:

a) Projiziert man ihre Binormalenschar nach der Richtung h_0^ν auf die Normalebene durch P_0, so stellt sich ihr zweiter Krümmungsradius als geometrisches Mittel dar zwischen ihrem ersten Krümmungsradius und dem der erhaltenen Projektion.

b) Der Radius (r_ν) ihrer Normalenkrümmung in P_0 ist dem Krümmungsradius gleich, welcher der Projektion der Krümmungslinie nach der Richtung der konjugierten Tangente in P_0 auf die durch ν_0, h_0^ν gehende Ebene an jener Stelle zukommt.

c) Projiziert man sie nach der Flächennormale von P_0 auf die zugehörige Tangentenebene, so hat ihre Projektion an der Stelle P_0 einen Krümmungsradius, der mit dem Radius (ρ_ν) ihrer Krümmung nach der konjugierten Tangente übereinstimmt.

d) Der Krümmungsradius der ebenen Kurve im Punkte P_0, die in der Ebene durch h_0^ν, q_0^ν vermöge der Projektion einer Krümmungslinie nach der Flächennormale bezw. konjugierten Tangente in P_0 sich ergibt, ist gleich dem Radius $(\mathfrak{r}_\nu)$ ihrer Krümmung nach der Richtung der Normalenkrümmung.

Die *Asymptotenlinie* ist u. a. ausgezeichnet durch folgende Eigenschaften:

a) $\rho^2 = r \left| \Pi_{b_0}^{b_\nu} \right|$;

b) $\rho r' = \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{\rho}{\mathfrak{r}} \left| \Pi_{\nu_0}^{h} \right|$.

c) Projiziert man die Asymptotenlinie nach der Bi- oder Flächennormale von P_0 auf die Tangentenebene durch diesen Punkt, so stimmt ihr erster Krümmungsradius mit dem der Projektion in P_0 überein.

Für eine *geodätische Linie* erhält man u. a.:

α) $\rho^2 = r \Pi_{b_0}^{b_\nu} = r \mathfrak{N}_{b_0}^{N_0}$;

β) $\mathfrak{r}^2 = r \mathfrak{N}_{b_0}^{(h\,q)_0}$;

γ) $r_\nu^2 = r \mathfrak{N}_{b_0}^{(\nu,\,h_\nu)_0}$.

Digitized by Google

δ) Der doppelte Radius ihrer Krümmung nach der konjugierten Tangente ergibt sich als vierte Proportionale zu ρ, r_ν, $\Pi^{\nu}_{d_0^\nu}$.

ε) Der Radius der Krümmung nach h_0^ν ist die vierte Proportionale zu r, r_ν und $\Pi^{h_\nu}_{t_0}$ bezw. $\mathfrak{R}^{(h_\nu, g_\nu)_0}_{h_0^\nu}$.

Von der im einzelnen gewählten Flächenkurve sind folgende Ergebnisse unabhängig:

1. Projiziert man die Flächenkurve in der Richtung der Flächenkurve von P_0 auf die zu P_0 gehörende Tangentenebene der Fläche, so ist die Krümmung der Projektion gleich der geodätischen Krümmung (Γ) der Kurve.[1])

2. Man projiziere die Flächennormalenschar in der Richtung d_0^ν einmal auf die durch ν_0, h_0^ν, ferner auf die durch ν_0, b_0^ν gelegte Ebene; die Krümmungsradien der dadurch erhaltenen Kurven in P_0 seien beziehentlich mit $\Pi^{\nu}_{d_0^\nu}$, $\mathfrak{P}^{\nu}_{d_0^\nu}$ bezeichnet. Dann ist der Ausdruck $\rho_\nu r'_\nu = +\sqrt{R_\nu^2 - r_\nu^2}$ die vierte Proportionale zu Π, $\mathfrak{P}$ und dem Radius der Normalenkrümmung jener Flächenkurve.

§ VII. Der Radius der Schmiegungskugel bei einer allgemeinen Flächenkurve und seine analytische Verallgemeinerung auf das assoziierte Dreikant.

Zur Entscheidung der Frage, ob die Größe R_ν die unmittelbare geometrische Verallgemeinerung des Radius R der Schmiegungskugel auf das assoziierte Dreikant ist, sei der Radius einer Kugel bestimmt, welche die gegebene Raum- oder Flächenkurve im Kurvenpunkte P in zweiter Ordnung berührt und deren Mittelpunkt in vorgeschriebener, durch P gehender Ebene liegt. Um das hauptsächliche Ergebnis voranzustellen: man findet, daß R_ν eine geometrische Bedeutung, die der von R unmittelbar entspräche, nicht zukommt. Daneben ergibt sich u. a.:

a) Die asymptotische Form Ψ bedeutet für eine allgemeine Flächenkurve den umgekehrten Wert des Radius der Kugel, welche sie im betrachteten Kurvenpunkte in zweiter Ordnung berührt und deren Mittelpunkt auf der zugehörenden Flächennormale liegt.

b) Längs einer beliebigen Flächenkurve kann die geodätische Form Γ als der umgekehrte Wert des Radius einer jene Kurve in P dreipunktig berührenden Kugel betrachtet

[1]) Siehe Enz. d. m. W. III D 3; S. 134. — Vgl. auch § VI *c*); c).

Digitized by Google

werden, deren Mittelpunkt auf der Tangentenrichtung liegt, die auf der Tangente (t) an jene Kurve in P senkrecht steht.

Insbesondere gilt für eine Krümmungslinie: der Radius der Krümmung nach der Flächennormale (r_ν) bezw. nach der konjugierten Tangente (ρ_ν) bezw. nach der Richtung der Normalenkrümmung (r_ν) in P stimmt mit dem Radius einer Kugel überein, welche die Krümmungslinie in P in zweiter Ordnung berührt und deren Mittelpunkt auf der zugehörenden Flächennormale bezw. konjugierten Tangente bezw. Hauptnormale liegt.

Weiter erhält man unter Benützung von

$$P^{1}) \equiv \Sigma a' \alpha' - \Sigma a'' \alpha, \qquad Q \equiv \Sigma a \alpha'' - \Sigma a' \alpha';$$

$$S \equiv |a a' \alpha'| - |a a'' \alpha|, \quad T \equiv |a \alpha \alpha''| - |a' \alpha \alpha'|,$$

für R, R_ν invariante Darstellungen, die sich insonderheit für die drei ausgezeichneten Kurven auf der Fläche eignen. In diesen Ausdrücken kann man schließlich noch P, Q, S, T in den Grundgrößen der Fläche darstellen, worauf hier aber nicht weiter eingegangen werden soll.

---

[1]) Stahl-Kommerell, Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie, S. 86/87.

Digitized by Google

Über eine krummlinige Projektion und deren Verwendung in der darstellenden Geometrie.

Von **Ludwig Tuschel** in Wien.

I. Krumme Projektion.

Jede Schraublinie definiert ein Möbiussches Nullsystem, von dem die Normalen der Schraublinie Leitstrahlen sind. Durch jeden Punkt p des Raumes geht eine und nur eine Schraublinie des Systems.

Jener Punkt p^k, in welchem diese Schraublinie eine zur Achse A des Nullsystems senkrechte Ebene Π schneidet, möge die „krumme Projektion“[1]) oder der „Krummriß“ des Punktes p genannt werden. A möge künftighin die Achse der krummen Projektion heißen.

Es soll nun im folgenden gezeigt werden, wie man mit dieser Projektionsart, die grundlegende Konstruktionsaufgaben über Schraubflächen zu lösen gestattet, operieren kann.

L. Burmester beweist in einem Aufsatze d. Z. Math. Phys. 33, p. 344, über „Kinematische Flächenerzeugung vermittelst zylindrischer Rollung“ den Satz, daß der Normalschnitt einer Schraubfläche Σ, die durch Schraubung einer Schraublinie E entsteht, deren Achse A_1 zur Schraubachse A parallel ist, immer eine Trochoide, d. h. eine Linie ist, die durch Rollung eines Kreises R_1 auf (bezw. in) einem zweiten Kreise R erzeugt werden kann.

Es handelt sich zunächst darum, die Radien r und r_1 dieser beiden Kreise zu ermitteln, wenn die Parameter $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}_1$ der Schraubungen um A und A_1 bekannt sind.

Einem Schraubengang $\mathfrak{h}_1$ von E entspricht in Π ein Trochoidengang. Bezeichnet φ den zu einem Trochoidengang gehörigen Winkel, so gilt

$$\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{k}\varphi = 2\pi\mathfrak{k}_1,$$

mithin

$$\varphi = \frac{2\pi\mathfrak{k}_1}{\mathfrak{k}}.$$

[1]) Dieser Begriff wurde von Prof. Dr. E. Müller in der p. 363, Fußnote erwähnten Vorlesung eingeführt.

Digitized by Google

Multiplizieren wir φ mit $\mathfrak{r}$, so erhalten wir jenes Stück des Kreises R, auf welchem sich der Kreis R_1 einmal abrollen ließe. Es ist demnach

$$\varphi \mathfrak{r} = 2 \mathfrak{r}_1 \pi$$

oder

$$\frac{2 \pi \mathfrak{k}_1 \mathfrak{r}}{\mathfrak{k}} = 2 \pi \mathfrak{r}_1 ;$$

daraus folgt

$$\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}_1} = \frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{k}_1} = \pm \varkappa .^{1})$$

Da nun auch $\mathfrak{r} \pm \mathfrak{r}_1 = \overline{A' A_1'} = \mathfrak{a}$ eine bekannte Strecke darstellt, so sind $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_1$ vollständig bestimmt.

Die Kurve E definiert ein Nullsystem $\mathfrak{N}_1$. Statt E hätten wir nun eine beliebige Schraublinie dieses Nullsystems herausgreifen können; wir wären wieder zu denselben Werten $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_1$ gelangt. Es gilt daher folgender Satz:

1. Die krummen Projektionen sämtlicher Schraublinien eines Nullsystems, dessen Achse mit der Achse der krummen Projektion parallel ist, sind Trochoiden, die alle durch Rollung eines einzigen Kreises auf (bezw. in) einem anderen Kreise erzeugt werden können.

Wie man leicht einsieht, gilt auch die Umkehrung dieses Satzes:

1*a*. Rollt ein Kreis auf (in) einem anderen, festen Kreise, so beschreiben alle mit dem ersteren in starrer Verbindung stehenden Punkte Trochoiden, die als Krummrisse sämtlicher Schraublinien eines Nullsystems angesehen werden können.

Aus diesem Satze ergibt sich unmittelbar folgender:

2. Rollt ein Drehzylinder Φ vom Radius $\mathfrak{r}_1$ auf (in) einem zweiten Ψ vom Radius $\mathfrak{r}$, so beschreiben alle mit Φ starr verbundenen Schraublinien eines Nullsystems, dessen Achse mit der Drehachse des rollenden Zylinders übereinstimmt, Schraubflächen von gleicher reduzierter Ganghöhe.

Sämtliche Schraublinien des Nullsystems $\mathfrak{N}_1$, die eine Raumkurve C_1 schneiden, bilden die Bahnschraublinien einer Schraubfläche Σ_1. Verschraubt man diese Bahnschraublinien um A, so erhält man eine Schar von Schraubflächen, die auch durch Rollung eines Zylinders Φ, mit dem jene Schraublinien starr verbunden sind, erzeugt werden können und deren Einhüllende wieder eine

[1]) Das untere Zeichen gilt, wie man sich sofort überzeugt, für den Fall, als E dieselbe Windung besitzt, wie die Schraubung um A.

Digitized by Google

Schraubfläche (die durch Schraubung der Schraubfläche Σ_1 entstehende Fläche) ist. Wir können demnach behaupten:

3. Rollt ein Drehzylinder Φ auf (in) einem anderen Ψ, so erzeugt jede mit Φ in starrer Verbindung stehende Schraubfläche Σ_1, deren Achse mit jener des Zylinders Φ zusammenfällt, eine Fläche Θ, die auch durch eine Schraubung der Schraubfläche Σ_1 um die Achse von Ψ entstehen kann.[1])

Eine solche Fläche Θ möge in der Folge kurz eine „Hüllschraubfläche" genannt werden.

Sonderfälle.

a) $\frac{r}{r_1} = 0$; r endlich.

In diesem Falle ist $r_1 = \infty$, d. h. R_1 ist eine Gerade. Es bestehen daher die Sätze:

4. Rollt eine Gerade auf einem Kreise, so beschreiben alle mit der Geraden starr verbundenen Punkte Kreisevolventen, die man als Krummrisse eines Parallelstrahlbündels betrachten kann.

5. Rollt eine Ebene auf einem Drehzylinder, so erzeugen alle mit der Ebene verbundenen, mit ihr und untereinander parallelen Geraden Regelschraubflächen von gleichem Parameter.

6. Rollt eine Ebene auf einem Drehzylinder, so beschreibt jeder mit der Ebene in starrer Verbindung stehende mit ihr parallele Zylinder eine endliche Anzahl von Regelschraubflächen gleicher reduzierter Ganghöhe.[2])

b) $\frac{r}{r_1} = \infty$; r_1 endlich.

Bei dieser Annahme ist $r = \infty$, d. h. R ist eine Gerade. Wir gelangen hier zu folgenden Sätzen:

7. Alle Schraublinien eines Nullsystems, die mit einem Drehzylinder in starrer Verbindung stehen und deren gemeinsame Achse mit jener des Zylinders übereinstimmt, beschreiben bei der Rollung dieses Zylinders auf einer Ebene parallele zykloidische Zylinder.

---

[1]) Jenen Sonderfall dieses Satzes, wo die Schraubfläche Σ_1 in eine Schraublinie ausartet, hat L. Burmester in oben erwähnter Schrift mitgeteilt.

[2]) Daß die Charakteristik der Einhüllenden in diesem Falle in eine endliche Anzahl gerader Linien zerfällt, wird weiter unten erläutert werden (S. 364).

Digitized by Google

8. Rollt ein Drehzylinder auf einer Ebene, so erzeugt jede, mit dem Zylinder starr verbundene koaxiale Schraubfläche einen mit der Ebene parallelen Zylinder.

9. Rollt ein Kreis auf einer festen Geraden, so beschreiben alle mit ihm starr verbundenen Punkte Zykloiden, die bei gegebener Lichtrichtung als Schatten der Schraublinien eines Nullsystems angesehen werden können.

Die im Vorangehenden aufgestellten Sätze ermöglichen uns nun, Aufgaben über krumme Projektion graphisch streng zu lösen, wenn wir unsere Zeichenhilfsmittel so verallgemeinern, daß wir auch Rollungen zulassen.

II. Verwendung der krummen Projektion zur Lösung darstellend geometrischer Konstruktionsaufgaben.

a) Ermittlung des Normalschnittes einer Schraubfläche.

Man kann den Normalschnitt als krumme Projektion der erzeugenden Kurve E definieren. Diese sei durch ihren Grundriß E' und ihre schiefe Projektion E^s auf eine zur Schraubachse A_1 senkrechte Ebene Π gegeben. Die Sehstrahlen seien gegen diese Ebene unter einem Winkel λ geneigt.

Ist $\mathfrak{k}_1$ der Parameter der Schraubung, so bedeutet $\mathfrak{k}_1 \cot\lambda$ den Radius r_1 jenes Kreises R_1, bei dessen Rollung auf einer zum Grundriß eines Sehstrahls parallelen Tangente R des Kreises $K = (A_1', \mathfrak{k} \cot\lambda)$ [1]) die schiefen Projektionen sämtlicher Schraublinien des Nullsystems $\mathfrak{N}_1 = (A_1, \mathfrak{k}_1)$ entstehen (Satz 6).

Um nun die krumme Projektion eines beliebigen Punktes p von E zu finden, verfahre man auf folgende Art:

Man befestige mit dem Zeichenblatt einen Kartonstreifen,[2]) so daß dessen Kante mit der Geraden R zusammenfällt und lege eine mit einem Papierstreifen überklebte Kartonscheibe (das Instrument R_1) vom Radius $\mathfrak{k}_1 \cot\lambda$ so in die Zeichenebene, daß sich ihre Peripherie mit jener des Kreises K deckt.

Nachdem man nun jenen Punkt x auf der Kante des Papierstreifens markiert hat, in welchem diese den Grundriß der durch p hindurchgehenden Bahnschraublinie schneidet, lege man das Instrument R_1 so in das Zeichenblatt, daß die Scheibe die Kante R berührt und der Punkt x auf die schiefe Projektion p^s von p zu liegen kommt.

[1]) R hat dieselbe Orientierung wie die Sehstrahlen und berührt den durch die Schraubung orientierten Kreis K gleichsinnig. Es ist deshalb nur eine solche Gerade R möglich.

[2]) Wir wählen deshalb einen Kartonstreifen, weil es möglich ist, daß Konstruktionsergebnisse in den vom Streifen überdeckten Teil der Zeichenebene fallen können. Um auch diese Resultate zu erhalten, konstruieren wir auch auf dem Kartonstreifen und pausen die Ergebnisse dann ab.

Digitized by Google

Hierauf rolle man die Scheibe so lange auf dem Kartonstreifen ab, bis ihr Umfang wieder mit jenem des Kreises K zusammenfällt. Die Stelle x des Papierstreifens gibt dann schon jenen Punkt p^k an, in welchem die durch p gehende Bahnschraublinie die Ebene Π schneidet.

Diese Methode ist nicht nur um vieles kürzer als die sonst gebräuchlichen Konstruktionsweisen, sondern sie gestattet auch, was uns wichtiger erscheint, eine vollkommen strenge Lösung der Aufgabe.

Da der Winkel λ beliebig ist, kann er immer so gewählt werden, daß $\mathfrak{k}_1 \cot \lambda = \mathfrak{r}_1$ eine vorgegebene Strecke darstellt.

Man kann demnach mit Hilfe eines einzigen Instruments R_1 für jede Schraubfläche den Normalschnitt konstruieren.

b) Die konstruktive Behandlung jener Hüllfläche Θ, die durch Schraubung einer Schraubfläche Σ entsteht, deren Achse A_1 mit der Schraubachse A parallel ist.

α) Konstruktion und Eigenschaft der Charakteristik.

Die Charakteristik N der Hüllschraubfläche Θ ist der wirkliche Umriß der Schraubfläche Σ für die krumme Projektion (Achse A).

Um diese Kurve zu konstruieren, erinnern wir uns des auf S. 360) bewiesenen Satzes 3, der besagt, daß die Hüllschraubfläche Θ auch durch Rollung eines mit Σ starr verbundenen koaxialen Drehzylinders $\Phi = (A_1, \mathfrak{r}_1)$ auf einem zweiten $\Psi = (A, \mathfrak{r})$ erzeugt werden kann.

In einem gewissen Augenblick berühren sich beide Zylinder, z. B. längs einer Geraden Z_0.

Die zu Σ benachbarte Fläche Σ^*, die auch durch eine infinitesimale Drehung um Z_0 aus der ersteren hervorgeht, schneidet diese in der gesuchten Charakteristik N.

Um nun diese Schnittkurve zeichnerisch zu ermitteln, benützen wir die Gesamtheit der Normalschnitte von Σ, die sich im Grundriß als kongruente Kurven projizieren.

Drehen wir alle diese Kurven unendlich wenig um Z_0', so werden die so entstehenden Nachbarlagen dieser Kurven die ursprünglichen in Punkten schneiden, die in ihrer Gesamtheit den Grundriß der zu ermittelnden Charakteristik erfüllen.

Die Schnittpunkte zweier solcher benachbarter Kurven ergeben sich aber als Treffpunkte der aus Z_0' auf diese Kurven fällbaren Lote.

Digitized by Google

Um also die Konstruktion praktisch durchzuführen, verfahren wir folgendermaßen:

Wir verzeichnen auf einem Pauspapier[1]) einen Normalschnitt E^k von Σ und dessen Evolute E^* und legen es so in das Zeichenblatt, daß E^k mit dem Normalschnitt $[\Sigma.\Pi]$ zusammenfällt. Hierauf befestigen wir das Pauspapier in A_1' mit einem Reißnagel.

Dreht man nun das so erhaltene Instrument um A_1' und bringt immer die aus Z_0' an E^* legbaren Tangenten mit E^k zum Schnitt, so erhält man, wenn man diese Schnittpunkte mit einer Pausnadel durchdrückt, in der Zeichenebene eine Folge von Punkten, die dem Grundriß der gesuchten Charakteristik angehören müssen.

Die Charakteristik N ist, da sie als Schnittkurve zweier, durch eine infinitesimale Drehung um Z_0 hervorgegangener Flächen Σ und Σ^* entsteht, vom Radius r des festen Zylinders Ψ gänzlich unabhängig. Sie ändert sich nur, wenn $\mathfrak{r}_1$ sich ändert.

Ist somit $\mathfrak{r}_1$ und $\Sigma = (E, A_1, \mathfrak{k}_1)$ gegeben, so gibt es ∞^1 Hüllschraubflächen Θ_i, deren Achsen A_i in der Ebene $[Z_0 . A_1]$ liegen und die Σ längs N berühren.

Die Gesamtheit aller dieser Schraubflächen möge ein „Hüllschraubflächenbüschel“ B und die Schraubfläche Σ die „Erzeugende“ dieses Büschels genannt werden. N soll die „Grundkurve“ von B heißen.

Bezeichnet $\mathfrak{r}_i$ die Entfernung $\overline{A_i Z_0}$, so findet man den Parameter $\mathfrak{k}_i$ der zugehörigen Hüllschraubfläche Θ_i aus der Gleichung:

$$\frac{\mathfrak{k}_i}{\mathfrak{k}_1} = \frac{\mathfrak{r}_i}{\mathfrak{r}_1}.$$

Es ist demnach $\mathfrak{k}_i = \mathfrak{l}\mathfrak{r}_i$, wo $\mathfrak{l} = \frac{\mathfrak{k}_1}{\mathfrak{r}_1} = \operatorname{tg}\lambda$ eine Konstante ist.

Wir können daher, wenn wir die Gerade Z_0 die „Achse“ des Büschels B nennen, den Satz aussprechen:

Die Parameter der Flächen eines Hüllschraubflächenbüschels sind proportional den Entfernungen ihrer Achsen von der Achse des Büschels.

Die Endpunkte der auf den einzelnen Achsen A_i von Π aus aufgetragenen Parameterstrecken $\mathfrak{k}_i$ liegen somit auf einer Geraden L, die durch $z_0 = [\Pi Z_0]$ geht und unter dem Winkel λ gegen Π geneigt ist Diese Gerade soll die „Leitgerade“ des Büschels heißen.

[1]) Der Gedanke, das Pauspapier als Zeichenhilfsmittel in der darstellenden Geometrie zu verwenden, rührt von Prof. E. Müller her. Dieser konstruiert z. B. auf sehr einfache Art mit Hilfe eines Pauspapieres die Eigenschattengrenze, Licht- und Helligkeitsgleichen einer Schraubfläche für Parallelbeleuchtung. (Vgl. die Vorlesungen über „Schraub-, Schieb- und Drehflächen in konstruktiver Behandlung“, gehalten von Prof. E. Müller im Studienjahre 1907/08 an der Techn. Hochschule Wien.)

Digitized by Google

Ist $r_i = \infty$, so ist Θ_i ein Zylinder, dessen Erzeugende mit Π den Winkel λ bilden.

Daher gilt: Die in den Punkten der Charakteristik einer Hüllschraubfläche legbaren Tangentialebenen umhüllen einen Zylinder.

Dieser Satz ist für die Beleuchtung einer Hüllschraubfläche von Wichtigkeit; denn die der Abwickelbaren längs der erzeugenden Kurve N zugeordnete Kurve[1]) ist ein Punkt (der Punkt z_0).

Es kann somit die Charakteristik N auch als Eigenschattengrenze der Schraubfläche Σ für eine Lichtrichtung λ betrachtet werden und um diese Kurve zu konstruieren, ist es daher nicht nötig, den Normalschnitt zu verwenden, sondern es können die gebräuchlichen Konstruktionen der Eigenschattengrenze einer Schraubfläche benützt werden.

Es ist auch folgender Satz richtig:

Die Eigenschattengrenze einer Schraubfläche Σ ist die Grundkurve N eines Hüllschraubflächenbüschels, das Σ enthält und dessen Leitlinie die um -90^0 (um A_1) gedrehte, durch den Endpunkt der Parameterstrecke hindurchgehende, zur Lichtrichtung parallele Gerade ist.

Beleuchtet man eine beliebige Schraubfläche Θ_i des Büschels B bei Verwendung der Lichtrichtung λ, so entsteht eine Eigenschattengrenze, die in zwei (oder mehrere) Kurven N und N^* zerfällt, von denen eine die Grundkurve des Büschels B sein muß. Denn wir wissen ja, daß die in den Punkten von N legbaren Tangentialebenen einen Zylinder von der Neigung λ umhüllen.

Wir gelangen auch zu sämtlichen Schraubflächen des Büschels B, indem wir die Grundkurve N um alle Achsen A_i bei Verwendung der zugehörigen Parameter f_i (was in der Folge durch $A_i(f_i)$ ausgedrückt werden möge) verschrauben. Es gehört demnach auch die Erzeugende Σ dem Büschel an.

Wählen wir nun eine beliebige Fläche Θ_i von B (z. B. Σ_1) als erzeugende Fläche, d. h. verschrauben wir diese Hüllschraubfläche um alle $A_i(f_i)$, so erhalten wir als Grundkurve des so entstehenden Büschels B_1 eine Kurve N_1, die in mindestens zwei Kurven N und N^* zerfällt, von denen eine die Grundkurve des durch Σ erzeugten Büschels B sein muß. Denn wir können ja N_1 auch als Eigenschattengrenze von Σ_1 für eine Lichtrichtung λ auffassen, für welche diese Kurve, wie wir wissen, in N und N^* zerfällt.

[1]) Benennung nach Prof. E. Müller. Vgl. auch L. Tuschel: „Zur Verwertung der sphärischen Abbildung in der darstellenden Geometrie." Sitzgsber. Ak. Wien, 1908 (dzt. unter der Presse).

Digitized by Google

Da nun das Büschel B_1 auch dadurch entsteht, daß die aus N und N^* bestehende Kurve N_1 um alle A_i ($\mathfrak{k}_i$) schraubt, so ist klar, daß B_1 in mindestens zwei Büschel B und B^* zerfällt, von denen das eine auch durch Σ erzeugt werden kann.

B_1 möge daher ein „zerfallendes Büschel“ und B^* das mittels Σ_1 aus B „abgeleitete“ Büschel genannt werden.

Es besteht daher der Satz:

Jede Fläche eines Hüllschraubflächenbüschels B erzeugt bei ihrer Schraubung um alle A_i ($\mathfrak{k}_i$) ein zerfallendes Büschel, welches aus dem Büschel B und dem vermittels jener Fläche aus B abgeleiteten Büschel B^* besteht. (Letzteres kann unter Umständen wieder zerfallen.)

Ist daher eine zur Achse einer Hüllschraubfläche parallele Gerade gegeben, so gibt es immer eine Schraubung um diese Gerade, für welche jene Hüllschraubfläche zumindest zwei neue Hüllschraubflächen erzeugt.

Sieht man nun von sämtlichen ∞^1 Büscheln ab, die aus B vermöge aller O_i abgeleitet werden können, so kann man auch behaupten:

Sämtliche Flächen eines Hüllschraubflächenbüschels können erhalten werden, indem man irgend eine seiner Flächen um alle A_i ($\mathfrak{k}_i$) verschraubt.

Ist $\mathfrak{r}_i = 0$, so ist auch $\mathfrak{k}_i = 0$, d. h. Θ_i ist eine Drehfläche Δ mit der Achse Z_0. Es gilt daher der Satz:

Jedes Hüllschraubflächenbüschel enthält eine Zylinder- und eine Drehfläche.

Man gelangt sohin zu sämtlichen Flächen des Büschels B auch dadurch, daß man die Drehfläche Δ um sämtliche Achsen A_i ($\mathfrak{k}_i$) verschraubt.

Da die Kurve N immer sowohl als Eigenschattengrenze von Σ für eine Lichtrichtung λ als auch als Charakteristik der Drehfläche Δ angesehen werden kann, so können wir behaupten:

Die Eigenschattengrenze einer Schraubfläche Σ ist die Charakteristik einer Hüllfläche, die durch Drehung jener Schraubfläche um die durch den der Lichtrichtung zugeordneten Punkt hindurchgehende, zur Schraubachse parallele Gerade entsteht.

Wir gelangen also zu folgendem Ergebnis, das wir schon auf anderem Wege gefunden und zur Konstruktion der Charakteristik benützt haben:

Die einer Schraubfläche Σ benachbarte Fläche, die durch Drehung von Σ um Z_0 aus der ersteren entsteht, schneidet diese in der Eigenschattengrenze.

Digitized by Google

Sei nun der Normalschnitt von Σ ein Nullkreis.

Das Büschel B besteht dann aus zyklischen Schraubflächen,[1]) die einander längs einer Schraublinie berühren. Wir können demnach behaupten:

Verschraubt man eine Schraublinie um alle $A_i(\mathfrak{k}_i)$, so entstehen zyklische Schraubflächen, die einander längs dieser Schraublinie berühren.

Unter diesen zyklischen Schraubflächen gibt es wieder einen Zylinder und es besteht daher folgender, für die Beleuchtung der zyklischen Schraubflächen wichtige Satz, der ein Sonderfall eines oben bewiesenen Satzes ist:

Die Tangentialebenen in den Punkten der erzeugenden Schraublinie einer zyklischen Schraubfläche umhüllen einen Zylinder.

Beachten wir, daß eine zyklische Schraubfläche im allgemeinen immer auf zwei Arten entstehen kann, so können wir behaupten:

Ist eine zyklische Schraubfläche gegeben, so gibt es immer zwei Winkel λ und λ_1, die als Lichtrichtungen angenommen, zerfallende Eigenschattengrenzen ergeben, für welche ein Teil immer eine Schraublinie ist.[2])

3) Konstruktion des Normalschnittes.

Der Normalschnitt einer Hüllschraubfläche Θ ist der scheinbare Umriß N^k der Fläche Σ für die krumme Projektion. Man könnte ihn daher als krumme Projektion der Kurve N finden. Es empfiehlt sich jedoch, ihn direkt auf folgende Art zu konstruieren:

Nach Satz 3 wird Θ auch durch Rollung des mit Σ starr verbundenen, koaxialen Zylinders Φ auf dem Zylinder Ψ erzeugt. Wir erhalten daher N^k als Einhüllende einer Kurvenschar, die aus sämtlichen Lagen des Normalschnittes $[\Sigma.\Pi]$ besteht, der mit dem rollenden Kreise $R_1 = [\Phi.\Pi]$ starr verbunden ist.

---

[1]) L. Burmester nennt Flächen, die durch Schraubung zyklischer Kurven erzeugt werden können, zyklische Schraubflächen. In der Folge sollen aber nur jene Flächen, die durch Schraubung von Schraublinien entstehen, deren Achsen parallel zur Achse der Schraubung sind, kurz „zyklische Schraubflächen" genannt werden.

[2]) Der andere Teil stellt sich im Grundriß als eine Kurve vierter Ordnung dar. Im allgemeinen ist nämlich der Grundriß der Eigenschattengrenze eine zirkulare Kurve sechster Ordnung. Es würde jedoch zu weit führen, dies hier nachzuweisen. Verfasser gedenkt übrigens, in nicht zu ferner Zeit eine Theorie der Beleuchtung von Schraubflächen auf rein geometrischer Grundlage zu geben, wo sich dann zeigen wird, daß dieser Satz nur ein Sonderfall eines allgemeineren Satzes ist.

Digitized by Google

Um nun N^k punktweise zu erhalten, wende man folgendes Verfahren an:

Man befestige zunächst eine Kartonscheibe vom Radius r mit dem Zeichenblatt, daß der Umfang der Scheibe mit jenem des Kreises $M = (A', \mathfrak{r})$ zusammenfällt. Hierauf überklebe man eine andere Kartonscheibe mit einem Pauspapiere, lege die Scheibe auf den Kreis $K = (A_1', \mathfrak{r}_1)$ und verzeichne auf dem Pauspapier in dieser Stellung den Normalschnitt $E^k = [\Sigma\, \Pi]$ sowie dessen Evolute E^*.[1])

Markiert man nun in der Zeichenebene jenen Punkt, der sich im Schnitt einer durch das Momentanzentrum $z_0 = [Z_0\, \Pi]$ hindurchgehenden Tangente der Evolute E^* mit der Kurve E^k ergibt, so erhält man bereits einen Punkt von N^k. Es werden natürlich im allgemeinen mehrere solche Tangenten möglich sein.

Wiederholt man dieses Verfahren für beliebig viele Lagen der rollenden Scheibe, so erhält man in der Zeichenebene eine Reihe von Punkten, die miteinander verbunden, den Normalschnitt N^k der Hüllschraubfläche Θ liefern.

c) *Ermittlung der Durchdringungskurve zweier Schraubflächen mit parallelen Achsen.*

Die beiden Schraubflächen seien $\Sigma = (E, A, \mathfrak{k})$ und $\Sigma_1 = (E_1, A_1, \mathfrak{k}_1)$. Ihre Durchdringungskurve $E^k_{\Sigma_1}$ ist identisch mit dem Krummriß von E auf Σ_1 (Achse A). E und E_1 seien durch ihre Grund- und Krummrisse (bezüglich A als Achse) gegeben.

Um $E^k_{\Sigma_1}$ zu konstruieren, verwende man wieder zwei Scheiben R und R_1, von welchen die erste R fest, während die zweite, auf R rollende Scheibe R_1 mit einem Papierstreifen versehen ist.

Man markiere zunächst auf dem Instrument R_1 den Endpunkt x des Radius der durch einen beliebigen Punkt q_1 von E_1 gehenden Bahnschraublinie B_1 und lege das Instrument R_1 so in die Zeichenebene, daß es die Scheibe R berührt und der Punkt x auf den Krummriß q_1^k von q_1 liegt.

Rollt man hierauf R_1 so lange auf R ab, bis x den Krummriß E^k von E trifft, so erhält man an der Stelle x (von E^k) einen Punkt q^k, der mit Hilfe des Bogens $K = (A', A'q^k)$ auf B_1' zurückgeführt, einen Punkt $q^{k'}_{\Sigma_1}$ des Grundrisses der gesuchten Kurve liefert.

d) *Konstruktion des Schlagschattens und der Eigenschattengrenze einer Schraubfläche.*

Diese Aufgabe kann als Sonderfall der Aufgabe *b* behandelt werden. ($\mathfrak{r} = \infty$.)

Die Eigenschattengrenze wird, wie schon erwähnt, genau so konstruiert wie die Charakteristik N (mit Hilfe eines Pauspapieres).

[1]) Ist E^k keine geschlossene Kurve, so dürfte es sich empfehlen, dem Pauspapiere selbst die Form von E^k zu geben.

Digitized by Google

e) Konstruktion des Schlagschattens einer Raumkurve C auf eine Schraubfläche $\Sigma = (E, A, \mathfrak{k})$.

Wir haben es hier mit einem Sonderfall der Aufgabe *c* zu tun. Da $r = \infty$ ist, geht die krumme Projektion in eine schiefe über und die Aufgabe kann mit Hilfe einer auf einem Kartonstreifen R abrollenden Scheibe R_1 ohne Benützung des Normalschnittes gelöst werden.

Man könnte noch eine ganze Reihe derartiger Konstruktionen aufstellen.

Wir wollen jedoch auf weitere Aufgaben nicht eingehen, sondern nur hervorheben, daß alle diese Probleme nicht nur höchst einfach, sondern auch vollkommen streng mit Hilfe rollender Scheiben gelöst werden können. Unsere gewöhnlichen Zeichenhilfsmittel (Zirkel, Lineal) gestatten hingegen nur eine angenäherte Konstruktion dieser Aufgaben.

Digitized by Google

Literaturberichte.

Digitized by Google

Digitized by Google

Vorlesungen über die Weierstraßsche Theorie der irrationalen Zahlen. Von V. v. Dantscher. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1908. VI und 80 S. Preis geh. M 2.80.

Von den drei wesentlich verschiedenen arithmetischen Theorien der Irrationalzahlen, die in den Siebzigerjahren des vergangenen Jahrhunderts von Cantor, Dedekind und Weierstraß ausgebildet wurden, ist die letztere am wenigsten bekannt geworden; der Grund für ihre geringe Verbreitung ist derselbe, der auch der Verbreitung anderer Theorien von Weierstraß hindernd im Wege stand: das Fehlen einer authentischen Darstellung. Nach Veröffentlichung des vorliegenden Buches wird das nun hoffentlich anders werden. Dem Buche liegt eine von Weierstraß im Jahre 1872 gehaltene Vorlesung zu Grunde, die der Verfasser selbst gehört hat, sowie eine Ausarbeitung einer späteren Vorlesung aus dem Jahre 1884. Wir wollen zunächst andeutungsweise den Gedankengang wiedergeben: Nach einer kurzen historischen Einleitung und dem Hinweise auf die Unmöglichkeit, im Gebiete der rationalen Zahlen aus einer natürlichen Zahl, die nicht k^{te} Potenz einer natürlichen Zahl ist, die k^{te} Wurzel auszuziehen, wird der Begriff des „additiven Aggregates rationaler Zahlen" eingeführt; so wird eine endliche oder unendliche Menge positiver rationaler Zahlen bezeichnet, wenn aus jeder endlichen Menge darin enthaltener Zahlen die Summe zu bilden ist. Nennt man jede positive rationale Zahl, die kleiner ist als die positive rationale Zahl a, einen „Bestandteil von a"; die Summe aus einer endlichen Anzahl von Bestandteilen der in unserem Aggregat enthaltenen Zahlen einen „Bestandteil des Aggregates", so lautet Weierstraß' Definition für die Gleichheit zweier Aggregate: Zwei Aggregate heißen gleich, wenn jeder Bestandteil des einen auch Bestandteil des anderen ist. Es erweist sich nun sofort als notwendig, den Begriff des additiven Aggregates einzuschränken; es geschieht durch Unterscheidung der Aggregate in divergente und konvergente, von denen nur die letzteren weiter verwendet werden; die Definition lautet: Ein Aggregat konvergiert, wenn es eine positive Zahl gibt, die größer ist als jeder Bestandteil des Aggregates. Es läßt sich nun leicht definieren, wann ein konvergentes Aggregat größer, beziehungsweise kleiner heißt als ein anderes. Dann folgt ein Paragraph „Darstellung eines konvergenten additiven Aggregates durch einen systematischen Bruch", in dem die Aufgabe behandelt ist, zu bestimmen, wie oft der genaue Teil $\frac{1}{n^k}$ der Einheit in einem vorgelegten Aggregat enthalten ist. Sodann wird gezeigt, daß die Aggregate Summencharakter haben, insofern sie von der Anordnung und der Gruppierung ihrer Glieder unabhängig sind; es wird nun auch das Aggregat als Summe seiner Glieder bezeichnet und es wird zur Verbindung dieser Glieder das $+$-Zeichen verwendet. Sodann werden Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division für unsere Aggregate definiert und nachdem gezeigt ist, daß diese Operationen denselben Regeln wie bei rationalen Zahlen genügen, werden die Aggregate selbst als Zahlen bezeichnet. Es folgen Abschnitte über additive Aggregate aus unendlich vielen, teils positiven, teils negativen ganzen Zahlen und über additive Aggregate aus

Digitized by Google

unendlich vielen komplexen Zahlen der Form $a+bi$, in denen das Wesentliche aus der Theorie der absolut konvergenten Reihen entwickelt wird. Den Abschluß bildet ein Abschnitt über die multiplikativen Aggregate aus unendlich vielen Zahlen, in dem die Lehre von den absolut konvergenten unendlichen Produkten durch Zurückführung auf die von den unendlichen Reihen (additiven Aggregaten) erledigt wird.

Dies in Kürze der Inhalt des Buches. Die Darstellung ist ausführlich und äußerst klar und läßt den logischen Aufbau deutlich zu Tage treten. Nur mit einigen wenigen Stellen ist Referent nicht ganz einverstanden, und zwar sind dies: der Nachweis, daß die Weierstraßsche Gleichheitserklärung die einzig mögliche ist (S. 22). (Ich möchte zur Ansicht hinneigen, daß ein solcher Beweis, der sich nur auf die vom Verfasser l. c. gestellten Forderungen stützt, gar nicht geführt werden kann); in § 10 wäre, wie leicht hervorzuheben, daß, wenn die Summe $A+B$ zweier Aggregate erklärt ist, es zur Einführung der Summe $A'+A''+\cdots+A^{(n)}$ einer endlichen Anzahl von Aggregaten keiner neuen Definition bedarf, während die Einführung einer Summe von unendlich vielen Aggregaten (sofern sie nicht gleich rationalen Zahlen sind) auf einer neuen Definition beruht. Das angeführte Beispiel $A+A^2+\cdots$, wo $A=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$ kann, wie mir scheint, an dieser Stelle noch nicht verwendet werden, da $A=\frac{\pi^2}{6}-\frac{5}{4}$, also irrational ist und eine Multiplikation irrationaler Zahlen erst im folgenden Paragraphen eingeführt wird. Endlich scheint mir der in § 16 eingeführte Begriff der „vollkommen bestimmten Irrationalzahl" bedenklich; doch wäre es zu lange, die Gründe hiefür an dieser Stelle darzulegen. Selbstverständlich betreffen die hier angeführten Bedenken nur nebensächliche Details, so daß das Buch als Ganzes dadurch in kleiner Weise beeinträchtigt wird. — Als ein besonderer Vorteil der in diesem Buche vorgetragenen Irrationalzahltheorie, der auch ihre Verwendung in Vorlesungen empfehlen dürfte, erscheint es mir, daß sie die Einführung der Irrationalzahlen und die Theorie der absolut konvergenten Reihen mit einem Schlage erledigt, was bei der Cantorschen und Dedekindschen Theorie nicht der Fall ist; auch die wichtigste Darstellungsform der reellen Zahlen, die durch systematische Brüche, ergibt sich hier von selbst. — Ich glaube, daß der Verfasser sich durch Herausgabe dieser Vorlesungen ein hervorragendes Verdienst in dreifacher Hinsicht erworben hat: in rein mathematischer, in historischer und in pädagogischer. Es wird nun wohl die Weierstraßsche Irrationalzahltheorie ebenso Gemeingut aller Mathematiker werden, wie es die Theorien von Cantor und Dedekind heute schon sind. Auch den Studierenden kann dieses Buch nicht warm genug empfohlen werden; es dürfte kein zweites geben, das sich besser zur Aneignung der abstrakten Gedankengänge eignen würde, die zur Erfassung des Begriffes der reellen Zahl erforderlich sind.

Hans Hahn.

Synthetische Geometrie der Kegelschnitte nebst Übungsaufgaben für die Prima höherer Lehranstalten. Von J. Lange. Dritte Auflage, besorgt von P. Zühlke. 68 Seiten mit 55 Figuren im Texte. Verlag von W. Müller, Berlin 1908. Preis geb. M. 1.50.

Das von einem tüchtigen Schulmanne verfaßte Büchlein erscheint hier durch einen seiner einstigen Schüler in dritter Auflage. Es enthält in ge-

Digitized by Google

drängter Kürze eine Theorie des Kegelschnite einschließlich der Polarität und Flächenbestimmung, ferner in einem Anhange die Projektivität, die Involution und mehr als 250 hübsche Aufgaben (die mit *a*, *b*, *c*, bezeichneten, hat der gegenwärtige Herausgeber hinzugefügt). Das Wort „projektivisch" ist noch nicht durch das jetzt allgemein gebrauchte „projektiv" ersetzt. *Th. Sch.*

Vergangene und künftige Lehrpläne. Rede, gehalten zu Mailand den 22. April 1905 von Gino Loria, ord. Professor der höheren Geometrie an der Universität Genua; Übersetzung von H. Wieleitner. 22 S. Göschensche Verlagsbuchhandlung 1906. Preis M. 0.80.

In schwungvoller Rede tritt Herr Loria für radikale Reformen des mathematischen Unterrichtes an Italiens Mittelschulen ein. Auf die Geometrie näher eingehend, welche den Gymnasien noch immer nach einem Plane gelehrt wird, wie er aus den Elementen Euklids sich herausbildete, fordert er die Berücksichtigung der Ergebnisse der späteren Forschung. Es wird die Einführung des Funktionsbegriffes, des Begriffes der Verwandtschaft und Transformation sowie der Elemente der analytischen und darstellenden Geometrie verlangt. Dann wird darauf verwiesen, daß in Frankreich solche Reformen schon durchgeführt sind und dort noch weitergegangen wurde, indem man auch die Elemente der Infinitesimalrechnung in den Mittelschulunterricht aufnahm, ferner daß Deutschland und Österreich das Gleiche anstreben. *Th. Sch.*

Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen. Von E. Müller. I. Band. Mit 273 Figuren und 3 Tafeln. 8, XIV u. 366 S. Leipzig und Berlin 1908. B. G. Teubner. Preis geb. 12 M.

Das Lehrbuch, dessen erster Band vorliegt, enthält, wie der Verfasser im Vorworte bemerkt, den Stoff seiner Vorlesungen an der Technischen Hochschule in Wien. Es wird aber nicht bloß den Hörern des Verfassers wegen seiner leicht verständlichen und korrekten Darstellung sehr willkommen sein, sondern hat auch allgemeines Interesse; denn man lernt dadurch nicht nur eine pädagogisch richtige und schon bewährte Behandlung des für den Techniker wichtigen Lehrstoffes kennen, sondern findet darin auch die Aufgabe glücklich gelöst, den Bedürfnissen der technischen Hochschulen Rechnung zu tragen, ohne den wissenschaftlichen Charakter aufzugeben. Um dies zu erreichen, hat der Verfasser an einigen Stellen allgemeine Sätze aus der analytischen Geometrie, Differentialgeometrie und Funktionentheorie herübergenommen, wodurch manche wesentliche Vereinfachung bei der Darstellung möglich war.

Ich möchte vorerst auf das Eigenartige dieses Lehrbuches hinweisen. Zunächst begrüße ich die konsequente Bezeichnungsweise, die sich auf die Graßmannsche Ausdehnungslehre stützt. Wenn auch demjenigen, der mit dieser Bezeichnungsweise nicht vertraut ist, manches (wie die Bezeichnung der normalen Stellung) befremdlich erscheinen mag und wenn es auch einiger Übung bedarf, sich einzulesen, so sind doch die Vorteile unverkennbar und es wäre zu wünschen, daß dieses Prinzip allgemein Nachahmung fände.

Digitized by Google

Weiters wurde in der orthogonalen Projektion, mit der sich dieser Band ausschließlich beschäftigt, das Weglassen der Rißachsen als Konstruktionsprinzip aufgestellt und durchgeführt. Von der Tatsache ausgehend, daß der praktische Techniker fast nie mit Rißachsen und Spuren mit Rißebenen zu operieren hat, wurde damit ganz gebrochen; die Ebenen werden durch Haupt- oder Fallinien dargestellt. Ebenso wurde die Verwendung des in Lehrbüchern oft vernachlässigten Seitenrisses als Konstruktionsprinzip konsequent durchgeführt und auf die daraus erwachsenden Vorteile oft hingewiesen; ich erwähne nur S. 156 die Bestimmung des Krümmungskreises für Ellipsenpunkte oder S. 293 die Konstruktion der Selbstschattenpunkte einer Rotationsfläche im Mittelschnitte, auf welche leider selten Rücksicht genommen wird, oder S. 219 die Benützung des Seitenrisses bei der Schattenkonstruktion eines praktischen Objektes. Um überhaupt die Nachteile zu beseitigen, die daraus erwachsen, daß man in den Mittelschulen fast ausschließlich mit Grund- und Aufriß operiert, wird von Anfang an die allgemeine Auffassung berücksichtigt, daß die beiden normalen Rißebenen beliebige Lage im Raume haben dürfen; dies wird auch dadurch zum Ausdruck gebracht, daß der Verfasser von der üblichen Bezeichnung des „Grund- und Aufrißverfahrens" abgeht und von einer „Abbildung mittels zugeordneter Normalrisse" spricht.

Schließlich erfuhren erfreulicherweise die Schattenkonstruktionen eine eingehendere Behandlung, als dies sonst üblich ist; dabei ist bemerkenswert, daß eine Reihe von Sätzen, welche für die Konstruktion wichtig sind und gewöhnlich nur nebenbei oder gar nicht erwähnt werden, scharf hervorgehoben ist; ich verweise nur auf Nr. 92, wo eine Reihe von Sätzen über Selbst- und Schlagschatten von krummen Flächen aufgestellt ist, oder S. 217, wo in Satz 1 eine oft verwendete Konstruktion in allgemeiner Form ausgesprochen wird, oder S. 289, wo ein sehr verwendbarer Satz über den Schatten einer Randkurve ins Innere einer Fläche allgemein bewiesen wird. Auch ist überall auf die praktisch wichtigen Vereinfachungen bei 45° Beleuchtung hingewiesen.

Was nun die Anordnung des Stoffes im besonderen anlangt, so ist zunächst in einer Einleitung der Begriff der Projektion erörtert und die dem Buche eigene Bezeichnungsweise ausführlich besprochen. Dabei ist S. 8 der Absatz über die unendlich fernen Elemente etwas kurz geraten; ich halte eine etwas ausführlichere Besprechung dieser Begriffe für wünschenswert; denn insbesondere seit in den Mittelschulen nicht mehr Perspektive gelehrt wird, sind die Techniker mit den unendlich fernen Elementen nicht so vertraut, als dies hier vorausgesetzt wird.

Im ersten Abschnitte wird die Abbildung mittels zugeordneter Normalrisse auseinandergesetzt. Dabei ist wohl das Interessanteste die Behandlung der Grundaufgaben über Lagenbeziehungen; es ist hier zum ersten Male die Voraussetzung für die einheitliche Lösung dieser Aufgaben in allen gebräuchlichen Projektionsarten scharf und prägnant hervorgehoben werden, wie dies schon von dem Verfasser in seinem bedeutungsvollen Vortrage in Meran über „die darstellende Geometrie als eine Versinnlichung der abstrakten projektiven Geometrie" bei Aufstellung des allgemeinen Begriffes einer linearen Abbildung angedeutet wurde. Das Kapitel über Drehungen hätte ich gerne in diesem Abschnitte vermißt, trotzdem der Verfasser im Vorworte die Einschaltung

Digitized by Google

dieses Kapitels durch Rücksicht auf die Konstruktionsübungen begründet, weil durch die ausführlichere Behandlung dieser nebensächlichen Aufgabe eine zu große Bedeutung beigemessen wird. Sehr nützlich erscheint mir Nr. 35 über die Konstruktion in begrenzter Zeichenebene. Der zweite Abschnitt enthält zunächst zwei Kapitel, in welchen die wesentlichen Eigenschaften der Kurven und Flächen in knapper, sehr verständlicher Weise auseinandergesetzt sind, dann werden die Kegelschnitte behandelt; dabei vermißte ich die Sätze von Pascal und Brianchon, deren Anwendung auch für den Techniker recht vorteilhaft ist; die Lösung der Aufgaben zweiten Grades für die Hyperbel und Parabel dürfte wohl im zweiten Bande als Anwendung der Kollineation gezeigt werden. Das 4. Kapitel behandelt die Kegel, Zylinder und abwickelbaren Flächen neben der hübschen praktischen Anwendung auf Gewölbeformen in Nr. 103 (wie im nächsten Kapitel Nr. 108 und 109) möchte ich noch hervorheben die Bestimmung der Brennpunkte eines ebenen Schnittes des Drehkegels mittels einer beliebigen eingeschriebenen Kugel (S. 198). Die Anwendung räumlicher Betrachtung für die Konstruktion eines Kegelschnittes, der durch drei Punkte und zwei Tangenten gegeben ist (S. 200), sowie den Satz über besondere ebene Schnitte von Drehzylindern (S. 201).

Im fünften Kapitel wird die Kugel behandelt; in Fig. 224 hätte bei der Schattenkonstruktien einer Kugelnische erwähnt werden können, wie man jenen Punkt bestimmt, in welchem die Schattengrenze von der Kugel auf den Zylinder übergeht.

Sehr ausführlich und erschöpfend ist das sechste Kapitel über Drehflächen. Es finden sich hier Aufgaben besprochen, die sonst nicht an technischen Hochschulen behandelt werden, wie die Konstruktion der Tangente an die Selbstschattengrenze (S. 297); es war dies nur möglich durch die in Nr. 117 und 119 vorhergehende Besprechung der Indikatrix, deren Aufnahme insbesondere mit Rücksicht auf die einfache Darstellung sehr zu begrüßen ist. Auch die wesentliche Vereinfachung durch Verwendung eines Proportionalwinkels bei der Konstruktion eines ebenen Schnittes (S. 277) möchte ich hervorheben. Die letzten beiden Kapitel beschäftigen sich mit den Schrauben-, windschiefen und graphischen Flächen; besonders die Besprechung der letzteren ist sehr angezeigt, da mit diesen Flächen, wie der Verfasser im Vorworte betont, der Techniker sehr häufig zu tun hat.

Den Schluß bildet ein ausführliches Sachregister, welches für den Gebrauch des Buches sehr bequem ist. Auch sei der für den Techniker wertvollen Winke über die praktische Ausführung der Zeichnungen gedacht (S. 59, 158, 270); die drei dem Buche beigegebenen Tafeln dienen demselben Zwecke. Die zahlreichen Fußnoten, in welchen angegeben ist, von wem verschiedene gebräuchliche Konstruktionen oder Sätze herrühren, halte ich für sehr nützlich.

Nun möchte ich noch auf einige Kapitel des ersten Abschnittes zurückgreifen, welche ich früher nicht erwähnte. Der Verfasser hat den Begriff der projektiven Punktreihen (Nr. 4), den allgemeinen Kollineations- und Affinitätsbegriff (Nr. 36—39) sowie den Begriff imaginärer Gebilde aufgenommen; er läßt sich dabei (siehe Vorwort) von dem idealen Gedanken leiten, daß auch der Techniker die Geometrie von einem höheren Gesichtspunkte betrachten und dadurch beherrschen lernen soll und daß man dem Techniker nicht Begriffe vorenthalten soll, die sich zur Abkürzung von Schlüssen und Über-

Digitized by Google

legungen trefflich eignen; es sei diesbezüglich nur auf die Benützung des absoluten Kegelschnittes beim Beweise des Satzes, daß jede doppelt berührende Ebene einen Torus in zwei Kreisen scheidet, und die Verallgemeinernung dieses Satzes (S. 321) verwiesen, auch werden sich im zweiten Teile dieses Lehrbuches bei der Zentralprojektion die Vorteile der Einführung des Doppelverhältnisses (welches in diesem Teile gar nicht verwendet wurde), der Projektivität und allgemeinen Kollineation noch deutlicher zeigen. Aber ich hege Bedenken, ob der Techniker, welcher die darstellende Geometrie nur als Hilfswissenschaft betrachtet und sich mit diesen Begriffen nicht gründlich befassen kann, überhaupt im stande ist, die Bedeutung dieser abstrakten Begriffe für die Geometrie zu erfassen. So glaube ich, daß der Satz (S. 325), daß jede Fläche zweiter Ordnung zwei Scharen von geradlinigen Erzeugenden besitzt, die jedoch auf Flächen mit elliptischen Punkten imaginär sind, oder die Einführung der imaginären Kreispunkte (S. 179) und des absoluten Kegelschnittes (S. 260) für den Techniker zu theoretisch sind. Vielleicht hat sich da der Verfasser durch die Einfachheit mit welcher er solche Dinge zu behandeln weiß, darüber getäuscht, welche Schwierigkeiten diese theoretischen Betrachtungen dem Techniker machen. Ich bin ja auch der Überzeugung, daß z. B. die Verwendung des Begriffes imaginärer Gebilde in der Geometrie immer tiefer dringen muß; aber ob diese Begriffe für den Techniker brauchbar sind, ist eine andere Frage; ich würde es freudig begrüßen, wenn ich mich dabei im Irrtum befinde.

Zum Schlusse möchte ich noch sprechen über das, was bei diesem Lehrbuche zuerst angenehm in die Augen fällt und worüber man sich dem Studium des Buches immer wieder freut: das sind die Textfiguren, die ich als mustergültig bezeichnen möchte. Sowohl die deutliche und klare Ausführung und Bezeichnung als der verständnisvolle Entwurf derselben bringen es mit sich, daß sie in den meisten Fällen ohne jeden erklärenden Text vollkommen verständlich sind. — Man kann auf das Erscheinen des zweiten Bandes dieses trefflichen Lehrbuches mit Recht gespannt sein.

Graz. *R. Schüßler.*

Mathematische Spiele von Dr. W. Ahrens in Magdeburg. Aus Natur und Geisteswelt, Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen. 170 Bändchen. Mit einem Titelbild und 69 Textfig. VI + 117 S. Verl. B. G. Teubner in Leipzig, 1907.

Einfache Darlegungen der Prinzipe der Spiele: Wettspringen; Boß-Puzzle oder Fünfzehnerspiel; Solitär- oder Einsiedlerspiel; Wanderungsspiele; Dynadische Spiele; Baguenaudier; Nim; Rösselsprung und die Magischen Quadrate. Jedermann, der Freude an der Vertiefung in solche Spiele besitzt, sicherlich ein willkommener Handweiser. *St. M.*

Ziel und Struktur der physikalischen Theorien von Pierre Duhem. Autorisierte Übersetzung von Friedrich Adler. Mit einem Vorwort von Ernst Mach. XII + 367 S. Verl. von Joh. A. Barth, Leipzig, 1908. Preis M. 8·—.

„In dieser Schrift", sagt Duhem, der berühmte französische Theoretiker, in seiner Einleitung, „sollen die Methoden, auf Grund deren die physikalische Wissenschaft sich entwickelt, einer einfachen logischen Analyse unterzogen werden", und der Altmeister erkenntnis-theoretischer Forschung Ernst Mach

Digitized by Google

urteilt über das Buch in seinem einbegleitenden Vorwort mit den Worten: „Nicht in trockener, abstrakter Weise, sondern unter fortwährender Beleuchtung durch lebendige historische Tatsachen zeigt der Verfasser, wie die physikalische Theorie allmählich aus einer vermeintlichen Erklärung auf Grundlage einer vulgären oder mehr oder weniger wissenschaftlichen Metaphysik in ein auf wenigen Prinzipien ruhendes System mathematischer, die Erfahrungen ökonomisch beschreibender und klassifizierender Sätze sich umwandelt."

Dem läßt sich kaum etwas hinzufügen. Das Buch gehört jedenfalls zu dem Besten, was über die Materie geschrieben wurde, und wenngleich gerade die jüngste Zeit mit den Triumphen, die die Atomistik, verjüngt durch die Elektronik, feiert, den Wert guter Bilder und Hypothesen drastisch vor Augen führt, wird man doch gerade diejenigen Kapitel Duhems, in welchen er gegen Modelle und Bilder als gegen parasitäre Gebilde sich wendet, mit größtem Interesse lesen. *St. M.*

Die Vorstellung vom Weltgebäude im Wandel der Zeiten. Das Werden der Welten. Neue Folge von Svante Arrhenius. Aus dem Schwedischen übersetzt von L. Bamberger. Mit 28 Abbildungen, XI + 191 S. Leipzig, Akadem. Verlagsges. m. b. H., 1908.

Dem geistvollen ersten Bande über das Werden und Vergehen der Welten folgt dieses Buch, das sein Entstehen eigentlich den Vorstudien zu dem ersten verdankt. In glänzender Weise ist hier ein historischer Überblick über die Anschauungen der primitivsten Völker bis zur Moderne gegeben und die fesselnde Darstellung ist durch geschickt gewählte Abbildungen noch gehoben. Soweit es sich um den rein historischen Teil handelt, kann das vorliegende Werk als geradezu mustergültig bezeichnet werden. Leider ist dies nicht mehr ganz der Fall für die Schlußkapitel, die von den eigensten Anschauungen des Verfassers handeln. Man vermißt vom IX. Kapitel angefangen immer wieder den Hinweis auf die großartigen Untersuchungen Boltzmanns — dessen Name in beiden Bänden vollkommen fehlt —, der als erster in Durchführung seines klassischen H-Theorems auf die Möglichkeit und Notwendigkeit der Existenz von Gegenden abnehmender Entropie gegenüber denjenigen zunehmender hingewiesen hat, und zwar in einer Form und mit einer Klarheit, die alle Darlegungen des Verfassers, der ohne zureichende Begründung gerade die Nebelflecken als solche Gegenden anspricht, weit übertrifft. Man hätte es von Arrhenius erwarten dürfen, daß er seines eigenen Lehrers nicht vergißt. *St. M.*

Die Elektronentheorie, gemeinverständliche Einführung in die moderne Theorie der Elektrizität und des Magnetismus von E. E. Fournier d'Albe. B. Sc. (Lond.) A. R. C. Sc. Autorisierte Übersetzung von Dr. J. Herweg, Privatd. a. d. Univ. Greifswald. Mit 35 Figuren, VI + 332 S. Leipzig, Verl. von Joh. A. Barth, 1908. Preis M. 4·80.

Eines der originellsten Werke über die Elektronentheorie, das ins Deutsche aus der zweiten Auflage übertragen zu sehen mit Freude begrüßt werden muß. Der Verfasser hat es verstanden, die große Anzahl neuerer Erscheinungen in hübscher und leichtfaßlicher Weise so geschickt zusammenzustellen, daß jedermann, auch derjenige, der nicht Physiker von Fach ist.

Digitized by Google

aus dem Buche ein vollkommen klares Bild über die Anschauungen, die derzeit die Elektrizität beherrschen, gewinnen kann. Für die Lektüre sind keinerlei mathematische Kenntnisse erforderlich. *St. M.*

Die neueren Forschungen auf dem Gebiete der Elektrizität und ihre Anwendungen. Gemeinverständlich dargestellt von Prof. Dr. A. Kalähne. Verl. von Quelle & Meyer, Leipzig, 1908. VIII + 284 S. Preis M. 4·40.

In eleganter, leichtfaßlicher Weise hat es der Verfasser verstanden, die Ergebnisse der modernen Anschauungen über die Elektrizität dem Leser, der über Mittelschulbildung verfügt, vorzuführen, ohne von den Theorien mehr als absolut nötig heranzuziehen.

Nach kurzer Besprechung der Fluidumstheorien, der Gesetze der elektrischen Kräfte auf Grund von Fernewirkung und Nahewirkung sowie der Grundgesetze des elektromagnetischen Feldes gelangen Maxwells Theorie und die moderne Elektronentheorie zur Diskussion. Dem folgen die elektromagnetischen Schwingungen und die Wellentelegraphie und endlich die Vorgänge bei elektrischen Entladungen in Gasen und die Radioaktivität.

Es ist besonders anzuerkennen, auf wie kleinem Raume es hier gelungen ist, fast alle in neuerer Zeit bekannt gewordenen Erscheinungen in trefflicher Weise darzustellen.

Daneben mag nur beiläufig erwähnt werden, daß es einen Unterschied zwischen Polonium und Radiotellur (S. 249) nicht gibt; daß das Wort Halbwertsperiode unzweckmäßig gewählt ist, da es sich ja gar nicht um „Perioden" handelt; daß die weichen δ-Strahlen sich von den β-Strahlen so weit unterscheiden, daß die Einführung einer besonderen Bezeichnung gerechtfertigt erscheint und diese als Begleiter der α-Strahlen, z. B. bei Polonium, verdient hätten, Erwähnung zu finden; daß das Wort „Restaktivität" (S. 260), das für die Summe $Ra\,D \rightarrow Ra\,F$ in Gebrauch ist, nicht für die Strahlung von enteemaniertem *Ra* angewendet werden sollte; daß *Ra D* eine Halbierungskonstante von zirka 12 Jahren (und nicht von 40 Jahren) hat.

Diese geringfügigen Ausstellungen, die in einer Neuauflage leicht berücksichtigt werden können, vermögen selbstverständlich den großen Wert des vorliegenden Buches nicht zu beeinträchtigen. *St. M.*

Populäre Astrophysik von Dr. J. Scheiner, a. o. Prof. der Astrophysik in Berlin. Mit 30 Tafeln und 210 Textfig., IV + 718 S. Verl. von B. G. Teubner. Leipzig und Berlin, 1908. Preis M. 12·—.

Das Erscheinen dieses Werkes füllt eine bisher immer unangenehm empfundene Lücke aus, und zwar in einer so vorzüglichen Weise, daß man nur wünschen kann, daß keine Bibliothek und überhaupt niemand, der sich für Physik und Astronomie interessiert, das Buch in seiner Sammlung vermissen möge. Die neuesten Forschungsergebnisse sind berücksichtigt, die Darstellung ist überall einfach, klar und kritisch gewissenhaft, Bilder und Tafeln sind geschickt und glücklich gewählt und vortrefflich wiedergegeben. Dabei ist die gesamte Anlage durchaus übersichtlich und der physikalische Teil ohne Anforderung an mathematische Kenntnisse geschrieben. Das Buch ist keineswegs nur für populäre Zwecke geeignet, sondern wird auch dem Fachstudierenden zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel und Nachschlagewerk werden. *St. M.*

Digitized by Google

Hebezeuge. Das Heben fester, flüssiger und luftförmiger Körper von Richard Vater, Prof. der königl. Bergakademie Berlin. Aus Natur und Geisteswelt, Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen. 196. Bändchen. Mit 67 Abbildungen, VI + 126 S. Verl. von B. G. Teubner, Leipzig, 1908.

Die Maschinen und Vorrichtungen der im Titel genannten Gebiete sind bereits so zahlreiche geworden und sie spielen im täglichen Leben eine so eminente Rolle, daß eine Spezialdarstellung hierüber willkommen geheißen werden muß. Dieselbe ist als durchaus gelungen zu bezeichnen, so daß das vorliegende Bändchen eine wertvolle Ergänzung der physikalisch-technischen Monographien obiger Sammlung darstellt. *St. M*

Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz von Brillouin. (1 Band, VII + 228; 2. Band, 141 S. Paris, 1907.)

Es liegt hier die erste zusammenfassende Darstellung der beobachteten Tatsachen und der Theorie der inneren Reibung vor. Unter Berücksichtigung des historischen Entwicklungsganges gibt das erste Hauptstück die Abteilung der Differentialgleichungen einer reibenden Flüssigkeit sowie die Integration derselben für die wichtigsten Fälle. Das zweite Hauptstück bespricht die Beobachtungen an tropfbaren Flüssigkeiten einschließlich der Beobachtungen von Reynolds und Couette. Das dritte Hauptstück behandelt die Reibung in Gasen, das vierte die Molekulartheorie der inneren Reibung in Gasen und Flüssigkeiten. Namentlich das letzte Kapitel enthält zahlreiche neue Betrachtungen. *Hl.*

Die Elemente der Differential- und Integralrechnung in geometrischer Methode von R. Düsing. Ausgabe A. M. Jänecke, Hannover, 1908. X und 74 S. Preis brosch. M. 1·—, geb. M. 1·30.

Wieder eine für Mittelschulen bestimmte Einführung in die Differential- und Integralrechnung, die mir ihrem Zwecke durchaus nicht zu genügen scheint. Ich glaube dieses Urteil am besten zu begründen, indem ich einen Paragraphen wortgetreu vom Anfang bis zum Ende hier wiedergebe. Im Vorwort heißt es: „Die geometrische Methode ist an sich ebenso exakt wie die algebraische. Die Schwierigkeiten liegen bei beiden Methoden an anderen Stellen, z. B. in der Erklärung des unendlich Kleinen und in den Beweisen, daß es neben einer endlichen Größe vernachlässigt werden kann und daß das Verhältnis zweier unendlich kleiner Größen eine endliche Zahl ist. Schwierig ist hiebei, diese Beweise kurz, anschaulich, für Schüler leicht verständlich und doch genügend streng durchzuführen. Im vorliegenden Buche sind diese Beweise streng genug gehalten." Der § 3, der diese „Beweise" enthält, lautet nun folgendermaßen (und ich füge noch bei, daß dies tatsächlich die einzige Stelle des Buches ist, die der Erörterung des Begriffes „unendlich klein" gewidmet ist): „Wenn am Ende eines Maßstabes ein Staubkorn haftet, so läßt man dies bei Messungen unberücksichtigt. Ist das Staubkörnchen so klein, daß es nur durch ein Mikroskop zu sehen ist, so kann es um so eher vernachlässigt werden. Denken wir uns nun, es würde immer noch kleiner, bis es schließlich kleiner wäre als jede noch so kleine endliche Größe, so nennen wir es eine unendlich kleine Größe. Sollen unendlich kleine Größen zu einer endlichen addiert oder von ihr subtrahiert werden, so können wir sie

Digitized by Google

vernachlässigen; wir setzen sie gleich Null. Man kann diesen Beweis (!) noch weiter verfolgen. Wenn man sich eine noch so kleine endliche Größe vorstellt, so ist doch immer eine noch viel kleinere Größe denkbar, die mit dem schärfsten Mikroskop nicht mehr sichtbar gemacht werden kann. Da aber eine unendlich kleine Größe noch viel kleiner ist als diese, so kann der Beweis, daß sie gegen eine endliche Größe vernachlässigt werden kann, mit beliebiger Genauigkeit geführt werden. Sieht man unter dem Mikroskop am Ende eines Maßstabes mehrere Staubkörner, so bemerkt man, daß sie verschiedene Größe haben, daß das eine vielleicht zweimal so groß ist wie ein anderes. Das Verhältnis zweier sehr kleiner Größen ist also eine reelle (!) Zahl, hier z. B. Zwei. Nehmen wir jetzt schärfere Mikroskope und betrachten wir mit ihnen immer kleinere Teilchen, so nähern wir uns den unendlich kleinen Größen immer mehr. Man kann also mit beliebiger Genauigkeit beweisen, daß das Verhältnis zweier unendlich kleiner Größen eine endliche Zahl ist." Angesichts dieses Tatbestandes scheint es nicht überflüssig, die Trivialität niederzuschreiben: Auch über einen mathematischen Gegenstand darf einer nur dann ein Buch schreiben, wenn er diesen Gegenstand versteht!

Hans Hahn.

Elemente der Differential- und Integralrechnung. Hilfsbuch für den mathematischen Unterricht zum Gebrauche an höheren Lehranstalten von L. Tesař. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1906. VIII + 128 S. Preis geb. M. 2·20.

Dies Buch scheint mir weitaus besser zu sein, als die meisten anderen Lehrbücher der Differential- u. Integralrechnung zum Gebrauche an Mittelschulen, die in der letzten Zeit erschienen sind, wenigstens soweit sie mir unter die Hände kamen; es sei ihm daher eine eingehendere Besprechung gewidmet. Das erste Kapitel handelt von der graphischen Darstellung von Funktionen; es werden eingehend behandelt: die Gerade $(y = mx + b)$, die Parabel $(y = ax^2 + bx + c)$ und die gleichseitige Hyperbel $\left(y = \frac{a}{x}\right)$. Kapitel II trägt die Überschrift Differentialquotient und Integral; ausgehend vom Begriffe der Geschwindigkeit wird, der erste Differentialquotient eingeführt, ausgehend vom Begriffe der Beschleunigung der zweite. Das Integral wird eingeführt als Summengrenzwert (Flächeninhalt) und sodann gezeigt, daß Differentiieren und Integrieren inverse Operationen sind. Es folgen geometrische und physikalische Anwendungen in großer Zahl. Kapitel III, Untersuchung von Kurven, bringt die übliche Kurvendiskussion, einschließlich der Lehre von der Krümmung. Kapitel IV entwickelt die Eigenschaften des Logarithmus und der Exponentialfunktion, und zwar (nach J. Tannery) ausgehend von der Quadratur der gleichseitigen Hyperbel. Kapitel V endlich enthält die Lehre von den Maxima und Minima der Funktionen, die an zahlreichen gut gewählten Beispielen durchgeführt wird (Brechungsgesetz, Reflexionsgesetz, Thomsons Satz vom wirtschaftlichen Querschnitt etc.). — Mit Auswahl und Anordnung des Stoffes kann man sich wohl einverstanden erklären; vielleicht wird man die Behandlung des Logarithmus etwas gekünstelt finden, vielleicht auch bedauern, daß der Verfasser, in der Meinung, die Theorie der unendlichen Reihen erzeuge im Schüler nur öde Langweile (Vorwort, S. IV), von der Taylorschen Reihe nichts erwähnt. Doch ist dies Ansichtssache. Nicht unerwähnt

Digitized by Google

darf aber bleiben, daß die Sprache nicht überall die in einem Mittelschullehrbuche ganz besonders notwendige Präzision zeigt. Gleich im ersten Paragraphen finden sich Belege dafür; z. B. heißt es bei Besprechung der Funktionen $y = \frac{a}{x}$ und $y = \sqrt{b - x^2}$ (S. 2): Zweitens erkennen wir, daß nur in einem bestimmten Intervall der unabhängigen Veränderlichen x y eine wohldefinierte Funktion sein wird." Welches soll dieses bestimmte Intervall für $\frac{a}{x}$ sein? oder ist der Satz anders zu verstehen? Ich weiß es nicht. Oder (S. 3): „Ferner ist der letzte Fall, vorausgesetzt, wir fassen die Wurzel als zweideutig auf, ein Beispiel dafür . . . ." Können wir die Wurzel auch als nicht zweideutig auffassen? Auch die Worte „im allgemeinen" sollten tunlichst vermieden werden. Wenn z. B. (S. 3) der Satz vorkommt: „Im letzten Falle endlich ist einleuchtend, daß, soll y einen für uns vorstellbaren Wert haben, und auf solche wollen wir uns im allgemeinen beschränken . . . ." muß man sich fragen, ob also in Ausnahmefällen auch für uns nicht vorstellbare Werte in dem Buche vorkommen werden. Bedenklicher aber als diese sprachlichen Inkorrektheiten sind die, leider auch nicht allzu seltenen, sachlichen Inkorrektheiten. So wird z. B. (S. 9) ein funktionaler Zusammenhang als stetig bezeichnet, wenn die ihn darstellende Kurve „unzerrissen" ist. Das kann wohl nicht anders gemeint sein, als daß eine Funktion stetig heißt, wenn sie nicht von einem Wert zu einem anderen übergehen kann, ohne alle Zwischenwerte anzunehmen. Diese Eigenschaft hat nun mit Stetigkeit so wenig zu tun, daß sie auch total unstetigen Funktionen zukommt! S. 36 wird die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ eingeführt als Limite des Differenzenquotienten $\frac{\triangle s}{\triangle t}$ und es heißt: „Daß dieser Grenzquotient als Grenze eines Quotienten, dessen Zähler und Nenner der Null zustrebt, trotzdem einen bestimmten Wert hat, lehrt uns die Erfahrung." Das ist doch ganz unrichtig, die Erfahrung kann uns doch über die Existenz einer solchen Limite keinen Aufschluß geben! Durchaus unkorrekt ist auch ein Satz, wie der folgende (S. 47): „Nähert sich x_2 dem x_1, so wird $\frac{x_2 - x_1}{2}$ eine sehr kleine Größe, daher sin $\frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{x_2 - x_1}{2}$." Die Verfasser von Mittelschullehrbüchern über Differential- und Integralrechnung müßten, wie mir scheint, scharf darauf achten, den Schüler nicht durch vage Ausdrucksweise und logisch bedenkliche Beweise zur Ansicht zu verleiten, die ganze höhere Mathematik sei doch nur „ein Schwindel"; es könnte sonst leicht das Gegenteil von dem erreicht werden, was man anstrebt: es könnten leicht gerade die begabtesten Schüler abgestoßen werden und die Liebe zur Mathematik verlieren, sobald sie einsehen, daß der ihnen vorgetragenen Mathematik nicht mehr absolute Gewißheit zukommt. Ganz scheint mir diese Gefahr im vorliegenden Buche nicht vermieden zu sein. Ich möchte wünschen, daß sich der Verfasser möglichst mit den exakt arithmetischen Darstellungen der Infinitesimalrechnung (Stolz, Peano) befreunde; Unkorrektheiten, wie die oben angeführten, würden ihm dann wohl nicht mehr passieren; eine eventuelle Neuauflage des Buches würde dann hoffentlich so ausfallen, daß man es rückhaltlos empfehlen kann. *Hans Hahn.*

Digitized by Google

Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung von E. Czuber. 2. Auflage. 1. Band, XIV u. 560 S., 2. Band, VIII u. 532 S. B. G. Teubner, Leipzig, 1906. Preis per Band geb. 12·—.

Die zweite Auflage weist gegen die erste keine weitgehenden Änderungen auf, es kann daher auf die Besprechung der ersten Auflage in Band X dieser Zeitschrift verwiesen werden. Es sind in der zweiten Auflage neu hinzugekommen: im ersten Bande ein Paragraph über die Hyperbelfunktionen; der Begriff der Funktion komplexen Argumentes in seinem Zusammenhange mit der konformen Abbildung; im zweiten Bande ein Abschnitt über die Eulerschen Integrale und die Fourierschen Reihen; Moment- und Schwerpunktsbestimmungen; die Greenschen Sätze; Erweiterungen der Abschnitte über mechanische Quadratur und über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Ferner fand eine durchgängige Vermehrung der Beispiele statt. — Die Brauchbarkeit des Buches wurde durch diese Zusätze gewiß gesteigert, doch darf nicht verschwiegen werden, daß sich einzelne nicht ganz unbedenkliche Versehen und Ungenauigkeiten in dem Buche vorfinden. Hoffentlich gelingt es dem Verfasser, dieselben aus der nächsten Auflage zu verbannen.

Hans Hahn.

Einführung in die Differential- und Integralrechnung. Zum Gebrauch an höheren Schulen. Bearbeitet von Prof. H. Müller. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1907. VI und 37 S. Preis M. 1·20.

Ich glaube nicht, daß dieses Buch seinen Zweck erfüllen kann. Von halbwegs korrekten Begriffsbestimmungen, von einer nur einigermaßen logischen Beweisführung findet sich keine Spur. Die Ableitung einer Funktion ist der Quotient der zwei unendlich kleinen Wertänderungen dy und dx, das Integral eine Summe unendlich vieler unendlich kleiner Summanden! Wie wenig der Verfasser mit den Elementen der Analysis vertraut ist, geht aus manchen Stellen des Buches hervor, z. B. (S. 3): „Um beurteilen zu können, ob die Funktion $f(x)$ von der Stelle $x = a$ ab zu- oder abnimmt, müßte man nach dem Bisherigen den Wert der Funktion für $x = a$ und für $x = a + \delta$ berechnen, wo δ eine im Verhältnis zu a sehr kleine Größe bedeutet." Auf Seite 9 wird die Taylorsche Reihe hergeleitet für $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ in der Form:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots$$

und daran die Bemerkung geknüpft: „Ist n nicht eine ganze positive Zahl, so hat die Reihe unendlich viele Glieder und ist — ebenso wie der allgemeine binomische Lehrsatz, auf den sie sich stützt — nur so lange gültig, wie die Veränderliche x (sic!) zwischen den Grenzen $+1$ und -1 eingeschlossen bleibt." Und vieles ähnliche!

Hans Hahn.

Annuaire pour l'an 1909, publié par le Bureau des Longitudes, Paris, Gauthier-Villars. Preis Frs. 1·50.

Das bekannte französische Jahrbuch, diesmal mit vorzugsweiser Berücksichtigung der Maße, Münzen, der Geographie, Statistik und Meteorologie. Außerdem enthält das Buch einen Aufsatz von Bigourdan über die veränderlichen Sterne und von Lallemand über die Bewegungen und Deformationen der Erdkruste.

Digitized by Google

Grundzüge der Differential- und Integralrechnung von Franz Bendt. (Webers Illustrierte Handbücher, Band 157). Dritte, verbesserte Auflage. J. J. Weber, Leipzig, 1906. XVI und 268 S. Preis M. 3·—.

Wiewohl das Buch bereits in dritter Auflage vorliegt, halte ich es für völlig wertlos und zur Erlernung der Differential- und Integralrechnung für ungeeignet. Dem Verfasser scheinen die einfachsten Dinge der Analysis nicht geläufig zu sein. So findet sich schon im allerersten Paragraphen des Buches die Behauptung, der binomische Lehrsatz in der Form:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + n\, a\, b^{n-1} + b^n$$

gelte für beliebige reelle (ganze oder gebrochene, positive oder negative) Werte von n. Um einen Begriff von der Diktion des Verfassers zu geben, seien einige Sätze aus dem Kapitel über die bestimmten Integrale wiedergegeben: „So ist z. B. $y = \int f'(x)\, dx + C$ ein unbestimmtes Integral und die Konstante C ganz beliebig. Soll nun die Konstante C bestimmt werden, so setzt man den Wert von x in die Funktion ein, für welchen das Integral Null wird. Diesen Wert nennt man die untere Grenze des Integrals." „Zuweilen wünscht man den Wert des Integrals für irgendeinen gegebenen bestimmten Wert von x zu kennen. Man pflegt einen solchen Wert die obere Grenze des Integrals zu nennen. In diesem Falle schreibt man $\int f'(x)\, dx = f(b) + C$. In den meisten Fällen sind aber die beiden Grenzen, die untere und die obere, vereinigt; dann nennt man das Integral ein bestimmtes." Ich kann mir nicht denken, daß jemand, der noch nicht weiß, um was es sich handelt, aus solchen Sätzen klug wird. *Hans Hahn.*

Feldmessen und Nivellieren von G. Volquardts. Leitfaden für den Unterricht an den Hochbauabteilungen bautechnischer Fachschulen. Mit 35 Figuren im Text, 34 pg. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1907.

Das Büchlein hat den Zweck, als Leitfaden bei dem theoretischen Unterricht an Baugewerkschulen zu dienen und soll den Schülern das zeitraubende Mitschreiben ersparen. Da im Einklange mit dem Lehrplane der Stoff für den Schulunterricht ein sehr beschränkter ist, indem das Hauptgewicht auf die praktische Ausbildung gelegt wird, konnte das Ganze in sehr engem Rahmen gehalten werden und gelangten daher nur die wichtigsten und grundlegenden Methoden zur Besprechung. *A. P.*

Das Feldmessen des Tiefbautechnikers von H. Friedrichs. Methodisches Taschenbuch für den Gebrauch an technischen und verwandten Fachschulen und in der Praxis. 1. Teil: Reine Flächenaufnahme. Mit 182 Textabbildungen und einem Plan in mehrfarbiger Lithographie. 138 pg. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1908.

Das vorliegende Werk hat nicht nur den Zweck, den theoretischen Unterricht zu unterstützen, sondern soll auch als Nachschlagebuch sowohl für die Feld- als die Hausarbeit dienen. Es sind daher nicht nur die Methoden und

Digitized by Google

Instrumente besprochen, sondern es wird auch eine große Anzahl praktischer Ratschläge gegeben und werden viele kleine Handgriffe bis in alle Einzelheiten beschrieben. *A. P.*

Internationales Archiv für Photogrammetrie. Organ der „Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie" in Wien. Redigiert von Eduard Doležal. Karl Fromme, Wien und Leipzig.

Zum Zwecke der Pflege und Förderung der Photogrammetrie, welche in neuester Zeit eine solche Wichtigkeit für das gesamte Plan- und Kartenwesen gewonnen hat und auch sonst in fast allen Gebieten des menschlichen Wissens und der menschlichen Betätigung ihr Anwendungsgebiet gefunden hat sich in Österreich eine Gesellschaft gebildet, welche bald durch den Beitritt zahlreicher Ausländer einen internationalen Charakter erhalten hat. An der Zeitschrift, welche von dieser Gesellschaft herausgegeben wird, beteiligen sich als Mitarbeiter die hervorragendsten Gelehrten und Praktiker des In- und Auslandes und es bringt daher jedes Heft eine ganze Reihe der wertvollsten Beiträge. Nachfolgend das Inhaltsverzeichnis der ersten beiden Hefte:

Heft 1: Ziel und Aufgabe des internationalen Archives für Photogrammetrie. Von den Herausgebern.

Oberst Aimé Laussedat, der Begründer der Photogrammetrie, sein Leben und seine wissenschaftlichen Arbeiten, von Prof. E. Dolezal.

Zur Theorie der perspektivischen Abbildung nichtparalleler Bildflächen. Von Univ.-Doz. Dr. N. Herz.

Métrophotographie aérienne à l'aide de mon Auto-Panoramographe. Par R. Thiele.

Die Photographie und Photogrammetrie im Dienste der Denkmalpflege und das Denkmälerarchiv. Von Prof. E. Dolezal.

Kleinere Mitteilungen, Literaturbericht, Bibliographie und Vereinsmitteilungen.

Heft 2: Die Orientierung photographischer Aufnahmen von demselben Standpunkt. Von Prof. A. Klingatsch.

Notes on the filed-work of photographie surveying as applied in Canada By A. O. Wheeler.

The Determination of heights in plotting from photographs. By D. B. Dowling.

Photogrammetrie auf Forschungsreisen. Von Prof. K. Fuchs.

Nivellement photographischer Platten. Von Prof. K. Fuchs.

Über die Anwendung von großen Basen im stereophotogrammetrischen Verfahren. Von Prof. Dr. N. Herz.

Ein Beitrag zur Photogrammetrie. Von Prof. E. Dolezal.

Kleinere Mitteilungen etc. *A. P.*

Stereochemie von Dr. L. Mamlock. Die Lehre von der räumlichen Anordnung der Atome im Molekül, VI + 152 S. B. G. Teubner, Leipzig, 1907. Geb. M. 5·—.

Das vorliegende Buch ist entstanden aus dem vom selben Verfasser geschaffenen gleichnamigen Abschnitte aus der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften und ist für einen nicht ausschließlich chemischen Leserkreis bestimmt. Dementsprechend wurde auch mehr Wert auf eine ausführliche

Digitized by Google

Wiedergabe der allgemeinen Gesetze als auf die Anführung zahlreicher experimenteller Tatsachen gelegt.

Ausgehend von der Theorie des asymmetrischen Kohlenstoffatoms, stellt der Verfasser in überaus klarer und durch Heranziehung einfacher Beispiele überzeugender Form die Beziehungen der beiden optischen Antipoden zueinander und zu ihrer Raumverbindung dar, indem er trotz des knappen Raumes mit ziemlicher Ausführlichkeit die physikalischen und chemischen Methoden zur Umwandlung und Isolierung optisch-aktiver Stoffe behandelt. Bei der Konfigurationsbestimmung von Stereomeren wird die Wahl des Spiegelbildsymboles für die Zuckersäure durchgeführt, wie es auch der geschichtlichen Entwicklung dieses Teiles der Stereochemie entspricht Für den vorliegenden Fall jedoch dürfte es empfehlenswerter sein, die Entscheidung bei einfacheren Verbindungen. etwa den Weinsäuren, zu fällen. Auch auf die Schwierigkeiten in der Anwendung der Zeichen *d* — und *l* — wäre vielleicht ein Hinweis am Platze gewesen. Im zweiten Teil werden die durch die Doppelbindung bedingten Isomerieerscheinungen besprochen, worauf als dritter Teil die Stereochemie ringförmiger Kohlenstoffverbindungen angefügt ist, der mit der Darstellung der durch den Doppelring des Kampfers hervorgerufenen Erscheinungen abschließt.

Schließlich finden wir kurz das Allerwichtigste über die Stereochemie des Stickstoffs, über die optisch-aktiven organischen Schwefel-, Selen- und Zinnverbindungen sowie über die Stereochemie rein anorganischer Verbindungen.

Das vorliegende Werk kann wegen seiner knappen Form und namentlich mit Rücksicht darauf, daß nicht nur die Theorie der stereochemischen Erscheinungen mit großer Übersichtlichkeit entwickelt wird, sondern auch die experimentellen Beweise für dieselben in reichlichem Maße herangezogen sind, zur Orientierung über den gegenwärtigen Stand der Stereochemie bestens empfohlen werden. *Prof. Dr. F. Wenzel.*

Lehrbuch der Physik für Studierende. Von H. Kayser. Vierte, verbesserte Auflage. Stuttgart, Ferdinand Enke, 1908. (525 S. 10 Mk.)

Das vorzügliche Lehrbuch der Physik ist im großen ganzen ein Abdruck der dritten Auflage, doch „sind zahlreiche kleine Änderungen vorgenommen worden, die den Zweck haben, größere Klarheit und Präzision zu schaffen". Einige neue Kapitel wurden hinzugefügt; so eines über den ökonomischen Koeffizienten der Wärmemaschinen. Ferner wurde der Anwendung der elektrischen und magnetischen Kraftlinien ein größerer Raum gewidmet. Ganz neu sind die Kapitel über die Kathodenstrahlen, Elektronen, Kanal-, Becquerelstrahlen, radioaktive Substanzen und elektrische Leitfähigkeit der Gase. Es wird der elektrischen Arbeitsübertragung durch das Dreiphasensystem Erwähnung getan, desgl. finden wir eine erweiterte Darstellung der Gesetze der Lichtemission. Das Buch verdient die weiteste Verbreitung. *G. J.*

Lehrbuch der Physik. Von O. D. Chwolson. Vierter Band; die Lehre von der Elektrizität. Übersetzt von H. Pflaum. Erste Hälfte. Braunschweig, Vieweg & Sohn, 1908.

Von diesem Buch durch ein Referat eine richtige Vorstellung zu geben, ist eine unerfüllbare Aufgabe. Dieses Buch will ganz gelesen sein; und wie schon bei den früheren Bänden, so drängt sich bei dem vorliegenden noch

Digitized by Google

viel mehr der Gedanke auf: Hier haben wir es mit dem besten Lehrbuch der Physik zu tun, das je geschrieben worden ist. Schon die Lektüre der Einleitung, in welcher die Schwierigkeiten geschildert werden, das gesamte Gebiet der Elektrizität und des Magnetismus sowie der verwandten Erscheinungen unter dem Gesichtspunkt einer einheitlichen Theorie darzustellen, bietet einen hohen wissenschaftlichen und künstlerischen Genuß. Hier gewinnen wir schon eine Vorstellung von der seltenen Gabe des Verfassers, das ungeheure Gebiet zu beherrschen und kritisch zu sichten. Kein Physiker kann an diesem Buche vorübergehen, es muß jeder gelesen haben und jeder wird viel daraus lernen können. — Chwolson teilt den ganzen Stoff in fünf Teile ein, welche der Reihe nach lauten: „1. Elektrisches Feld, 2. Magnetisches Feld, 3. Veränderliches Magnetfeld, 4. Durchgang der Entladung durch Gase, 5. Neue Strahlen und Radioaktivität." Der vorliegende Band enhält davon nur die zwei ersten Teile. Davon zerfällt der erste Teil: „Das konstante elektrische Feld" in fünf Kapitel folgenden Inhalts: 1. Eigenschaften des konstanten elektrischen Feldes. 2. Die Quellen des elektrischen Feldes. 3. Wirkung des elektrischen Feldes auf die in demselben befindlichen Körper. 4. Elektrostatische Messungen. 5. Elektrizität der Atmosphäre (der Erde). Der zweite Teil: „Das konstante magnetische Feld" enthält: 1. Eigenschaften des konstanten Magnetfeldes. 2. Quellen des Magnetfeldes. Magnete. 3. Quellen des Magnetfeldes. Elektrischer Strom. 4. Innerhalb der Kette auftretende Erscheinungen: Thermische und mechanische Erscheinungen. 5. Innerhalb der Kette auftretende Erscheinungen; chemische Erscheinungen. Elektrolyse. Theorie des hydroelektrischen Stromes. 6. Innerhalb der Kette auftretende Erscheinungen: Thermoelektrische Erscheinungen. 7. Ponderomotorische Wirkungen des Magnetfeldes. 8. Erregung des magnetischen Zustandes der Körper. *G. J.*

Die Korpuskulartheorie der Materie. Von J. J. Thomson. Autorisierte Übersetzung von G. Siebert. Mit 29 Abbildungen VII + 166 S. 8°. Braunschweig, Verlag von F. Vieweg & Sohn, 1908. Preis 5 Mk.

Als Heft 25 der Sammlung naturwissenschaftlicher und mathematischer Monographien „Die Wissenschaft" werden uns hier die von wissenschaftlicher Phantasie getragenen Ausblicke in die Entwicklung der Elektronik zum Aufbau der Atome und der Materie vorgebracht. Das Buch ist aus Vorträgen entstanden und man könnte fast behaupten, daß ihm auch die Lebendigkeit und das Impulsive des gesprochenen Wortes geblieben ist.

Leider ist die Übersetzung nicht immer ganz sorgfältig. Leicht zu erkennende Druckfehler der englischen Ausgabe, wie z. B. der auf Seite 23, wo X-Strahlen anstatt α-Strahlen steht, hätte der Übersetzer nicht stehen lassen sollen und hie und da ist es ihm sogar gelungen, den Sinn geradezu in das Gegenteil dessen zu verkehren, was gesagt werden soll. So heißt es S. 24: „Dies hat möglicherweise seinen Grund darin, daß die α-Teilchen in einer Entladungsröhre in viel geringerer Anzahl vorhanden sind, als die positiv geladenen Teilchen, daß infolgedessen ein solches Teilchen in seiner ionisierenden und Phosphoreszenz erzeugenden Wirkung von den übrigen Teilchen nicht unterstützt wird." Das ist unsinnig. Die getreue Übersetzung der Stelle lautet: „Dies hat möglicherweise seinen Grund darin, daß die α-Partikel in viel geringerer Zahl

Digitized by Google

vorhanden sind, als die positiv geladenen Partikel in einer Entladungsröhre; und da die α-Partikel so gering an Zahl und in so großen Zwischenräumen voneinander vorhanden sind, erfährt ein Partikel in seinem Anprall der ionisierend oder Phosphoreszenz erregend wirkt, keine Unterstützung von seinen Genossen.

Eine Übersetzung verliert sehr an Wert, wenn man zu ihrem Verständnis das Original daneben haben muß. *St. M.*

Physikalische Musiklehre. Eine Einführung in das Wesen und die Bildung der Töne in der Instrumentalmusik und im Gesang von Dr. Hermann Starke, a. o. Prof. an der Kgl. Univ. Greifswald. VIII + 232 S. 8°. Verlag von Quelle & Meyer in Leipzig 1908. Preis Mk. 3.80.

Eine recht anschauliche Darstellung der physikalischen Grundbegriffe der Akustik, ihrer Anwendung auf den Bau der Instrumente und auf die Skalen- und Akkordbildungen.

Allzu viele Details sind gewiß dem Leserkreis, dem das Büchlein zugedacht ist, nicht entsprechend. Immerhin hätte sich z. B. der Widerspruch zwischen den richtig gezeichneten Figuren 10—12 und der unrichtigen Behauptung der S. 23, daß die Stablängen eines eingeklemmten Stabes in Wellenlängen $\frac{\lambda}{4}, 3\frac{\lambda}{4}$ . . . seien, (während die Obertöne tatsächlich unharmonische sind) vermeiden lassen. Dasselbe gilt für das Kapitel 16. — Das Buch ist insbesondere Musikern zu empfehlen, die hier in leichtfaßlicher Weise fast alles finden werden, was ihnen zum akustischen Verständnisse not tut. *St. M.*

Elementar-Physik mit Chemie für die Unterstufe. Ausgabe für Gymnasien. Unter besonderer Berücksichtigung der norddeutschen Lehrpläne bearbeitet von Johann Kleiber, Reallehrer an der städtischen Handelsschule in München, und Hugo Scheffler, Oberlehrer an der Hohenzollernschule in Berlin. III. Auflage. Mit mehr als 250 Figuren. VII + 136 + 32 S. 8°. Verlag von R. Oldenbourg, München und Berlin 1907.

Das bekannte Schulbuch ist in dritter Auflage fast unverändert wiedererschienen. *St. M.*

Wissenschaft und Bildung. Einzeldarstellungen aus allen Gebieten des Wissens, herausgegeben von Privatdozent Dr. P. Herre. Quelle & Meyer, Leipzig 1908.

Nr. 20. Einführung in die Elektrochemie, von Prof. Dr. W. Bermbach in Köln. 140 Seiten, geb. Mk. 1.25.

In diesem Büchlein, das dem Anfänger bestens empfohlen werden kann, werden die wichtigsten Erscheinungen und Theorien knapp und verständlich dargestellt und an einfachen Beispielen erläutert. Zwei einleitende Kapitel über Elektrizität und über physikalische Chemie vermitteln in geschickter Weise die nötigen Vorkenntnisse. Ein ausführlicheres Eingehen in die spezielle Elektrochemie ist bei dem geringen Umfange des Werkchens, das nur als „Einführung" gedacht ist, nicht zu erwarten, doch wird dem Leser durch Literaturangaben der weitere Weg gewiesen.

Digitized by Google

Nr. 25. Das Wetter und seine Bedeutung für das praktische Leben. Von Prof. Dr. C. Kahner. 148 Seiten, geb. Mk. 1.25.

Ein sehr anregend geschriebenes Büchlein, in welchem nicht nur das Wichtigste aus der modernen Meteorologie mit besonderer Berücksichtigung der Wetterkunde und der Wettervorhersage leicht verständlich dargestellt ist, sondern auch viel Interessantes aus der Geschichte der Wetterkunde von den Uranfängen an gebracht und zum Schlusse die Wichtigkeit des öffentlichen Wetterdienstes an einigen Beispielen des Einflusses des Wetters auf die verschiedensten Zweige des gesellschaftlichen Lebens gezeigt wird. Da wohl über wenige Erscheinungen so viel Aberglauben und Irrtümer bestehen, wie über das Wetter, ist diesem aufklärenden Büchlein eine recht weite Verbreitung zu wünschen. *K. Prz.*

Leitfaden der Physik. Von Heinrich Bohn, Professor am Dorotheen-städtischen Realgymnasium in Berlin. Unterstufe, Ausgabe B (ohne chemischen Anhang), Leipzig. Erwin Nägele, 1908. 221 Seiten, geb. Mk. 2.80.

Ein für die Unterstufe der Mittelschulen bestimmtes Lehrbuch, das mit seinen deutlichen Abbildungen und dem möglichst einfach gehaltenen Text wohl seinen Zweck erfüllen wird, ohne sich wesentlich von der großen Zahl ähnlicher Bücher zu unterscheiden. *K. Prz.*

Die Grundlehren der Integral- und Differentialrechnung. Von Bruno. 54 S., Wien, A. Hölder, 1908.

Der Verf. beabsichtigt, eine Probe des Lehrganges zu geben, in dem die Elemente der Infinitesimalrechnung mit ihren Anwendungen in der Mittelschule vorgetragen werden könnten. Er definiert die „Veränderliche“ (u. zw. als die Menge aller reellen Zahlen), zeigt zunächst wie ein Trapez, das von der x-Achse mit einer beliebigen, nicht in ihr gelegenen Strecke bestimmt wird, durch infinitesimale Teilung ausgemessen werden kann, und geht schon an diesem Beispiel auch zum Begriff des unbestimmten Integrals über. Die Summationsmethode zeigt an dem folgenden Beispiel, dem der Parabel, welche im Scheitel von der x-Achse berührt wird, ihre Schwierigkeit; sie wird daher durch die Methode der unbestimmten Integration ersetzt. Um diese einzuführen, stellt der Verf. das einem endlichen Intervall entsprechende Wachstum der Funktion $f(x) = \frac{x^3}{3}$ als infinitesimale Summe der Differentiale $f'(x)\,dx$ dar, wobei $f'(x)$ als Tangente der Neigung definiert ist. Darauf folgen die allgemeinen Differentiationsregeln und ihre Anwendung auf Potenzen mit positiven und negativen ganzzahligen Exponenten. Die Ausdehnung auf gebrochene Exponenten wird durch die Differentiation zusammengesetzter und implizite Funktionen vorbereitet (Exkurs auf singuläre Stellen). Schließlich werden die einfachsten Integrationsregeln, speziell die teilweise Integration angegeben. Die analytischen und geometrischen Anwendungen beziehen sich auf die Bestimmung der Tangenten von Kegelschnitten, die Berechnung des Parabelsegmentes und der Ellipsenfläche, die Diskussion der Spitzen ebener Kurven (im Anschluß an den — geometrisch erklärten — Mittelwertsatz der Differentialrechnung), Bestimmung der Maxima und Minima, Auswertung der unbestimmten arithmetischen Formen, Kubatur der Pyramide, der Kugel und ihrer Teile

Digitized by Google

Berechnung der Kugeloberfläche. Außerdem werden die infinitesimalen Methoden auf die Dynamik des freien Massenpunktes, die Bestimmuug des Schwerpunktes und des Trägheitsmomentes, das Pendel (von der Weggleichung $\frac{d^2s}{dt^2} = ks$ ausgehend), das Potential, speziell das einer Kugelflächenbelegung, das Gesetz von Biot und Savart und die Tangentenbussole angewendet. — Der methodische Plan der Schrift ist zum großen Teil neu, auch im einzelnen enthält sie manchen interessanten didaktischen Gesichtspunkt. Doch möchte der Ref. mit einigen Einwänden gegen die vorgeschlagene Methode nicht zurückhalten. Dem Schüler muß die infinitesimale Teilung als Ausmessungsverfahren bei der Geraden unnötig und schon bei dem nächsten Beispiel, dem der Parabel, worauf ja der Verf. selbst hindeutet, zu schwierig erscheinen, so daß man wohl fragen könnte, ob dieser Ausgangspunkt der natürliche ist. Zur Vereinfachung der Quadratur wird nun die Änderung der Funktion gleich $\Sigma\, tg\, \alpha_i\, \Delta\, x_i$ gesetzt, wobei α_i der Neigungswinkel einer elementaren Sekante ist; für diese Summe wird im Grenzübergang $\int_{x_0}^{x} tg\, \alpha\, d\, x$ geschrieben und dann erst wird die Bestimmung der Funktion $tg\, \alpha$ durchgeführt, wobei sich α als Neigung der Tangente ergibt; damit aber wird das bestimmte Integral als Grenzwert einer andern endlichen Summe als bei seiner allgemeinen Definition (nach der der Winkel α_i die Neigung der Kurventangente im Punkte $[x_i, f(x_i)]$ sein müßte) hergeleitet, ein Verfahren, das nach Ansicht des Ref. dem Schüler schwerlich recht klar gemacht werden kann. Der Verf. sieht einen Hauptvorteil des Voranschickens dar Integration darin, daß dadurch der unrichtigen Anschauung, das Integral sei die Umkehrung der Derivierten, begegnet werde. Indessen kann man in den beiden Relationen $(\int f[x]\, d\, x)' = f(x)$, $\int f'(x)\, d\, x = f(x)$ nicht wohl etwas anderes als ein Umkehrungsverhältnis erblicken; es würde, um die vom Verf. befürchtete Verwechslung mit dem gewöhnlichen inversen Operationen zu vermeiden, wohl genügen, darauf hinzuweisen, daß die Umkehrung einer Funktionaloperation nicht dasselbe ist wie die Auflösung einer Gleichung $y = f(x)$ nach x. — Es fragt sich ferner, ob man, um die Ableitung einer Potenz mit gebrochenem Exponenten zu gewinnen, den langen und schwierigen Weg über die Differentiation der Funktionen $f(x, \varphi[x])$ gehen soll, da schon die Anwendung der einfachen inversen Funktion und der Funktionen $f(\varphi[x])$ genügt. Betreffs der Beschränkung, die man sich im Elementarunterricht bei den implizite gegebenen Funktionen auferlegen kann, erlaubt sich der Ref. auf das kürzlich erschienene Lehrbuch der Arithmetik von J. Jacob hinzuweisen.

Vollständig gelöste Maturitätsaufgaben aus der Mathematik. Von Napravnik. (233 S.) Wien und Leipzig, F. Deuticke, 1907.

Das Buch enthält 25 Gruppen von je 3—4 Aufgaben (im ganzen 337), so daß jede Gruppe an Umfang und Inhalt ungefähr eine der schriftlichen Maturitätsprüfungen, wie sie bis vor kurzem in Österreich bestanden haben, darstellt. Die Aufgaben, die, wie der Verf. sagt, teils neu gebildet, teils andern Sammlungen entnommen sind, tragen in der Tat ganz das Gepräge jener Prüfungen an sich: sie stellen an das mathematische Verständnis des Kandidaten so gut wie keine, an seine Rechensicherheit die größten Ansprüche und können daher mehr als Prüfstein für sein Phlegma als für sein Denken dienen.

Digitized by Google

In der ganzen Sammlung sind nur zwei elementar-geometrische Konstruktionsaufgaben, dagegen zahlreiche Körperausmessungen, trigonometrische Rechnungen, Exponentialgleichungen und Systeme von nicht-linearen algebraischen Gleichungen, welch letztere dem Schüler nur durch Kunstgriffe zugänglich sind, enthalten. Einzelne Aufgaben sind nur durch die hinzugefügte Lösung verständlich, z. B. „Der Flächeninhalt eines Dreiecks auf drei verschiedene Arten aus den Koordinaten der Eckpunkte zu berechnen", „Beweise direkt, daß das Volumen einer dreiseitigen Pyramide $v = \frac{gh}{3}$ ist". — Es ist dem Ref. nicht klar, worin der didaktische Zweck dieser Sammlung besteht, deren Aufgaben vom Verf. numerisch bis ins Detail gelöst sind, so daß dem Schüler nichts zu finden übrig bleibt. *F.*

Niedere Analysis. Von Schubert. I. Teil, 2. Auflage, (Sammlung Schubert V.), 181 S., G. J. Göschen, Leipzig 1908.

Daß die erste Auflage des vorliegenden Lehrbuches bald vergriffen war, bezeugt seine praktische Verwertbarkeit. Der erste Teil enthält die Lehre von den Kombinationen mit ihrer Anwendung auf den binomischen und den polynomischen Lehrsatz, sowie auf die arithmetischen Reihen höherer Ordnung, ferner die einfachsten Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung (der Ref. möchte als didaktisch besonders gelungen die Darstellung der force-majeure-Probleme hervorheben), die endlichen und unendlichen Kettenbrüche, die unbestimmten ganzzahligen Gleichungen ersten Grades mit zwei und mit mehreren Unbekannten, die Pellsche Gleichung und die wichtigsten ganzzahligen quadratischen Gleichungen mit drei und vier Unbekannten. Jedem Abschnitt sind zahlreiche Beispiele hinzugefügt. *F.*

Mathematische Aufgaben aus den Reifeprüfungen der badischen Mittelschulen. Von Treutlein, I. Teil: Aufgaben (XIII + 158 S.). Leipzig, B. G. Teubner, 1907.

Der Herausgeber hat zu den bestehenden Aufgabensammlungen einen wertvollen Beitrag geliefert, um so mehr als einzelne Aufgabentypen, die in ähnlichen Sammlungen wenig berücksichtigt wurden, hier reichlich vertreten sind, z. B. die Anwendungen des binomischen Satzes und die harmonische Lagebeziehung. Über die synthetische Behandlung der Kegelschnitte werden zahlreiche interessante Aufgaben gestellt; die analytische Geometrie ist wohl etwas zu kurz gekommen. Es ist von Interesse, daß den schriftlichen Reifeprüfungen der badischen Mittelschulen häufig theoretische Themata zu behandeln sind, wie die vorliegende Sammlung zeigt; z. B. werden Darlegungen der allmählichen Erweiterung des Zahlbegriffs, der mathematischen Induktion, des Trugschlusses von Achilles und der Schildkröte gefordert etc. Die Aufgaben aus angewandter Mathematik beziehen sich auf Astronomie und mathematische Geographie, jedech nicht auf Physik. *F.*

Einführung in die Geodäsie. Von Dr. P. Eggert. Mit 237 Figuren im Texte. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner, 437 S

Das vorliegende Werk ist aus Vorlesungen entstanden, die der Verfasser an der Universität in Berlin gehalten hat. Es zerfällt in vier Abschnitte: Der erste handelt von der geometrischen und trigonometrischen Landesaufnahme, der zweite von der Höhenaufnahme, der dritte von der gleichzeitigen Hori-

Digitized by Google

zontal- und Höhenaufnahme (Tachymetrie), der vierte endlich von der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Der Inhalt deckt sich natürlich im allgemeinen mit dem anderer Lehrbücher desselben Gegenstandes; es möge daher nur folgendes hervorgehoben werden. In der Beschreibung der Instrumente wurde im Interesse des Umfanges des Buches keine Vollständigkeit angestrebt. Es gelangten daher hauptsächlich nur jene Typen zur Besprechung, die in der Sammlung der technischen Hochschule in Danzig, der der Verfasser jetzt angehört, vorhanden sind. Die sonst meist übergangenen Aufgaben der vier, sechs und acht Punkte werden in Kürze behandelt. Im zweiten Abschnitt erscheint die barometrische Höhenmessung eingehender behandelt als sonst üblich. Im dritten Abschnitt wird ein eigenes Kapitel der jetzt immer mehr an Wichtigkeit gewinnenden Photogrammetrie und Stereophotogrammetrie gewidmet. Auch der letzte Abschnitt über die Ausgleichsrechnung erfreut sich großer Ausführlichkeit. Zahlreiche numerische Beispiele erläutern die Anwendbarkeit der geschilderten Methoden in der Praxis.

A. P.

Sternkarten in gnomonischer Projektion zum Einzeichnen von Meteorbahnen oder Lichtstrahlen, Kometenschweifen, leuchtenden Wolken und Zodiakallicht und anderen Himmelserscheinungen zugleich als Repetitionsatlas für das Studium der Sternbilder entworfen und bearbeitet von Karl Rohrbach. 3., vermehrte Aufl. Kommissionsverlag bei E. F. Thiemann, Gotha, 1907.

Die dritte Auflage dieser Sternkarten erscheint gegen die früheren erweitert durch Hinzufügung eines Übersichtsblattes, welches die neun Hauptblätter in verkleinertem Maßstabe unter Hervorhebung der Sternbilder und Eintragung ihrer Namen bringt, wodurch es möglich ist, die Karten zum Studium des gestirnten Himmels zu verwenden. Ferner ist ein Verzeichnis der Sternbilder beigegeben mit Angabe der Nummer der Karte, auf welcher dasselbe zu finden ist. Im übrigen dürfte es kaum notwendig sein, auf diese allgemein beliebten und verbreiteten Karten neuerlich hinzuweisen. *A. P.*

The Collected Mathematical Papers of J. J. Sylvester. Vol. II (1854—1873), with two plates. Cambridge, University Press, 1908.

H. F. Baker hat die Herausgabe des zweiten Bandes nach denselben Grundsätzen, wie die des ersten besorgt, nämlich den Text ungeändert abgedruckt, offenbare Rechenfehler stillschweigend verbessert und die wenigen Zusätze und Verbesserungen in eckige Klammern gesetzt. Der Inhalt dieses Bandes ist ein sehr merkwürdiger und manches davon auf dem Kontinent wenig bekannt. So befaßt sich Sylvester eingehend mit Poncelets Näherungsdarstellung von Wurzeln aus algebraischen Ausdrücken und findet bei der Gelegenheit einige bestimmte Integrale. Seine mannigfache Beschäftigung mit Zahlentheorie und mit Anordnungsproblemen tritt hervor, aber auch mit astronomischen Problemen, ja sogar mit der Theorie des Erddruckes. Daneben sind seine Reden und viele Anmerkungen ein sprechendes Zeugnis seiner impulsiven Art und seines beweglichen Geistes. Eine eingehende Besprechung der 110 Arbeiten dieses Bandes, welche den verschiedensten Gebieten angehören, und von denen viele Verbesserungen und Abänderungen vorhergehender geben,

Digitized by Google

ist wohl nicht möglich. Druck und Ausstattung sind in der bekannten, vornehmen Weise der University Press gehalten.

Handbuch der Elementarmathematik für Lehrer. Von Prof. Dr. K. Schwering. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1907. (8°, VIII + 407.)

Das Buch gibt der Reihe nach Arithmetik, Planimetrie. Trigonometrie und Stereometrie in etwas weiterem Umfang, als für den Unterricht erforderlich. Die Einleitungen geben weitere Ausblicke, in welchen sich jedoch der Verfasser mit Rücksicht auf den didaktischen Zweck seines Buches eine gewisse Zurückhaltung auferlegt. Die Ableitung der Exponentialreihe leidet an dem üblichen, leicht zu beseitigendem Mangel, wird aber dann durch eine allerdings auch nicht vollständige Verifikation ergänzt. Auch die Definition der Konvergenz einer Reihe ist mangelhaft, da sie den Begriff der Summe der auf das n^{te} Glied folgenden Glieder voraussetzt.

Überhaupt wird man vom Lehrer volle Einsicht in diese Begriffe verlangen müssen, da ihm sonst der Maßstab fehlt, die allmähliche Entwicklung dieser Begriffe im Geiste des Schülers zu leiten und zu ergänzen. Die Einzelheiten an Lehrsätzen und Beispielen sind dagegen sehr sorgfältig.

Universität und Schule. Vorträge, gehalten von J. Klein, P. Wendland, Al. Brandl, Ad. Harnack auf der Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner am 25. IX. 1907 zu Basel. Mit einem Anhang: Vorschläge der Unterrichtskommission der Ges. deutscher Naturforscher u. Ärzte, betreffend die Ausbildung der Lehramtskandidaten der Mathem. u. Naturwissenschaften. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin, 1907. (88 S.).

Hervorragende Vertreter der verschiedenen Bildungsrichtungen entwickeln hier ausführlich ihr Programm und ihre Vorschläge, Schule und Universität einander wieder näher zu bringen. Es ist die ernste Mahnung, nach jeder Richtung hin den Bedürfnissen der Zeit von sich aus entgegenzukommen, um so die Bedeutung der Wissenschaft auch im allgemeinen Bewußtsein lebendig zu erhalten und nicht bloß im Herzen der wenigen Auserwählten, die in ihr aufgehen. Das erfordert gegenüber dem heutigen Zustand Kompromisse und Anpassungen mannigfacher Art, welche für die naturwissenschaftlichen Fächer im Anhang zu konkreten Studienplänen verdichtet sind, an denen besonders zu billigen ist, daß sie auch der individuellen Entwicklung Zeit sichern.

B. G. Teubners Verlag auf dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften, Technik nebst Grenzwissenschaften, mit einem Gedenktagebuch für Mathematiker und den Bildnissen von G. Galilei, H. Bruns, M. Cantor, F. R. Helmert, F. Klein, Fr. Kohlrausch, K. Kraepelin, C. Neumann, A. Penk, A. Wüllner, April 1908. Leipzig u. Berlin.

Es ist die Festgabe zum internationalen Mathematikerkongreß, welche die bekannte Firma nun auch freigebig verbreitet. Man versuche nur einmal aus der mathematischen Literatur der letzten dreißig Jahre die Erscheinungen des Teubnerschen Verlages auszuscheiden und man wird staunen, wie wenig übrig bleibt. Dieser Verlag stellt geradezu die geschäftliche und wirtschaftliche Seite der mathematischen Organisation Deutschlands vor.

Digitized by Google

N. H. Abel, sa vie et son oeuvre. Par Ch. Lucas de Pesloüan, Paris, Gauthier-Villars 1906. (8°, 168 S.)

Es ist eine liebevoll und lebendig geschriebene Biographie Abels, welche seinen Werken und Schicksalen gerecht zu werden versucht auf Grund der bekannten Urkunden, und in welcher auch seiner Persönlichkeit ein breiter Raum gegönnt ist. Der Verfasser erleichtert demjenigen, der mit Abels Werken nicht genauer vertraut ist, jedoch über allgemeine mathematische Bildung verfügt, das Verständnis durch erläuternde Noten und Abdruck besonders charakteristischer Stellen im Anhang.

Oeuvres de Charles Hermite. Publiées sous les auspices de l'Académie des sciences. Par Emile Picard. Tome II. Paris, Gauthier-Villars, 1908. (Gr.-8°, 520 S.)

Der vorliegende zweite Band, der mit einem Bildnis Hermites im Alter von ungefähr 50 Jahren geschmückt ist, gleicht in seiner Anlage und Ausführung dem ersten Band. Er umfaßt die Arbeiten Hermites von 1858 bis 1872 vorwiegend in chronologischer Ordnung und einige Beiträge Hermites zu anderen Werken nebst einem Brief an Tannery. Revidiert wurden die Arbeiten außerdem noch von H. Bourget, insbesondere in bezug auf die oft recht umfangreichen Rechnungen. Den Hauptinhalt des Bandes bilden die Abhandlungen Hermites zur Theorie der elliptischen Funktionen und ihrer Beziehungen zur Algebra und Zahlentheorie, insbesondere zur Theorie der Gleichung fünften Grades und der Theorie der quadratischen Formen, auch die bekannte „Note sur la theorie des fonctions elliptiques" im Anhang zu Lacroix' Traité ist wieder abgedruckt. Auch die Arbeiten über Entwicklung nach sogenannten Hermiteschen Polynomen findet sich hier sowie Untersuchungen über kubische Formen. Doch treten die invariantentheoretischen Abhandlungen in dieser Zeit zurück gegen die über elliptische Funktionen und insbesondere gegenüber der Theorie der Modulargleichungen.

L. Pfaundler. Das chinesisch-japanische Go-Spiel. Eine systematische Darstellung und Anleitung zum Spielen desselben. Leipzig, Teubner, 1908, geb. in Lwd. 3 Mk.

Das Go-Spiel wird auf einem Brett von 19 . 19 Punkten mit 2181 gleichartigen Steinen von zwei Gegnern gespielt. Die Züge bestehen im Setzen von Steinen; außerdem kann noch der Fall des Wegnehmens (Tötens) fremder Steine vorkommen, Der Gewinn wird nach der Menge der durch zusammenhängende „Ketten" von Steinen eingeschlossenen freien Punkte bemessen. Diese und einige andere Spielregeln bilden den ersten Teil. Im zweiten werden mehrere häufig auftretende Kombinationen zum Gegenstand einer ausführlichen Behandlung gemacht. *Dr. Schrutka.*

Raymond Le Vavasseur. Quelques démonstrations relatives à la Theorie des Nombres Entiers Complexes Cubiques. — Propriétés de quelques Groupes d'Ordre Fini. (Annales de l'Université de Lyon. Nouvelle Série I, fasc. 21) Lyon, A. Rey & files, Paris, Gauthiers-Villars, 1908. 3 frs.

Die erste der beiden Arbeiten enthält eine Darstellung der elementaren Zahlentheorie der kubischen Kreisteilungskörper, in der Art, wie sie für den

Digitized by Google

biquadratischen von Dirichlet gegeben wurde. In der zweiten werden die Gruppen der Ordnungen p, pq, 6 und 8 nebst den zugehörigen Isomorphismengruppen als Gruppen binärer Substitutionen untersucht. Im Vorbeigehen werden nichtzyklische Gruppen als sozusagen „pseudozyklische" Gruppen mit Verwendung der Galoisschen Imaginären als Exponenten dargestellt.

Dr. Schrutka.

F. Benneke. Eine konforme Abbildung als zweidimensionale Logarithmentafel zur Rechnung mit komplexen Zahlen. (Festschrift des königlichen Viktoria-Gymnasiums zur 300jährigen Jubelfeier des königlichen Joachimsthalschen Gymnasiums in Berlin.) Potsdam 1907.

Auf 9 Blättern von 313.220 mm^2 Größe ist die konforme Abbildung der Funktion $Z = X + Yi = \log z = \log (x + yi)$ für alle Werte welche den Ungleichungen $2 \leqq X < 3$, $0 < Y < \frac{\pi}{2} \log e = 0{\cdot}682188$ genügen, dargestellt. Die x- und y-Kurven haben daher die Gleichungen $C - X = \log \text{co} \frac{Y}{\log e}$ und $C - X = \log \frac{Y}{\log e}$; man erkennt leicht, daß die Kurven jeder Schar untereinander kongruent und gleich orientiert und die beiden Scharen zu einander symmetrisch sind. Das entsprechende Stück der z-Ebene hat die Form eines Viertelkreisringes mit den Grenzen $100 \leqq x^2 + y^2 \leqq 1000$; $o \leqq \arctan \frac{y}{x} \leqq \frac{\pi}{2}$. Genügt die Zahl z diesen Bedingungen nicht so ist sie durch eine geeignet bestimmte Zahl $z_0 = z\, 10^{p\, i^q}$ zu ersetzen und man erhält $\log z = \log z_0 + p + 0{\cdot}682188\, i.\, q$. Der umgekehrte Vorgang ist bei der Aufsuchung des Numerus einzuhalten. Die Parallelen zu den Achsen $X = \text{const.}$ $Y = \text{const.}$ sind durch die matten Linien eines quadratisch geteilten Papiers (wie Millimeterpapier nur mit der Seitenlänge 0·91 mm), die x- und y-Kurven durch tiefschwarze Linien dargestellt, welche im Gebiet $2 \leqq X \leqq 2{\cdot}45$ für jede ganze Zahl und für jedes Vielfache von i, im übrigen Gebiet für jeden fünften dieser Werte ausgezogen. Auf einer zehnten Tafel ist der Plan der Abbildung im Maßstab 1:3 zur Übersicht wiederholt. Die typographische Ausführung läßt zu wünschen übrig.

Dr. Schrutka.

Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Von Schoenflies. 2. Teil (Ber. der Deutschen Mathematiker-Vereinigung), X + 331 S. (Leipzig, B. G. Teubner, 1908).

Das erste Kapitel enthält neu aufgefundene Bedingungen, welche es zu entscheiden gestatten, wann zwei Mengen die gleiche Mächtigkeit haben oder welche von ihnen die größere hat; eine Reihe dieser Sätze bezieht sich speziell auf die Abschätzung der Mächtigkeit von Zahlklassen. Als Mächtigkeit aller abzählbaren, aller perfekten, aller abgeschlossenen Teilmengen eines Raums von endlicher Dimensionenzahl sowie als die aller geordneten abzählbaren Mengen wird die des Kontinuums festgestellt; das gleiche geschieht für die Mächtigkeit einiger Klassen von Funktionen und geodätischen Linien gewisser Flächen. Der Verf. sucht gewisse Paradoxien des Mengenbegriffs zu entkräften. (Die Einwände sind nach der Ansicht des Ref. nicht ganz stichhältig.)

Das zweite Kapitel berichtet über Untersuchungen solcher geordneter Mengen, die keinem ihrer resp. Abschnitte ähnlich sind; der Verf. analysiert

Digitized by Google

ihre Beziehung zu Veroneses transfiniten Zahlen und zu denjenigen Klassen monoton wachsender Funktionen, deren jede die Eigenschaft hat, daß die Unendlichkeitsordnungen ihrer Funktionen verschieden und vergleichbar sind und daß sie in keiner umfassenderen Klasse derselben Art enthalten ist.

Im dritten Kapitel werden neue Beweise für die Zerlegbarkeit einer beliebigen abgeschlossenen Punktmenge in eine abzählbare und eine perfekte mitgeteilt sowie für den Satz, daß die Zentren eines Systems von Kugeln, wenn sie eine abgeschlossene Menge bilden, im Innern von Kugeln endlicher Anzahl, die dem System angehören, enthalten sind. Der Verf. zitiert eine neuerdings erfolgte Definition des Abstandes zweier Punkte mit abzählbar unendlich vielen Koordinaten, die es gestattet, die gewöhnlichen Sätze über Punktmengen auf den Fall eines Raumes von unendlich vielen Dimensionen zu übertragen. Ferner werden die Hauptresultate der neuen Inhaltsbestimmung von Punktmengen, die jeder abzählbaren Menge meßbarer Mengen und jeder komplementären Menge einer meßbaren Menge ebenfalls einen Inhalt zuordnet, entwickelt.

Das vierte Kapitel handelt von den gestaltlichen Grundbegriffen. Auf Grund des Axioms, daß jedes Dreieck ein „inneres" Gebiet eindeutig bestimme, wird derselbe Satz für einfache Polygone aufgestellt; es wird untersucht, wie Polygone, die einander durchdringen, die Ebene zerlegen und wie Polygone, deren jedes die anderen ausschließt, durch gesonderte Streckenzüge zu einem System vereinigt werden können. Die Sätze über die Teilung der Ebene bleiben aufrecht, wenn jedes Polygon abzählbar unendlich viele Strecken mit einer einzigen Häufungsstelle enthält. Nach der Definition von „Abstand" und „Flächenzahl" wird zu einer beliebigen, in einem endlichen Kreis gelegenen Menge eine approximierende Polygonalfigur konstruiert und darauf die Definition der Zusammenhangszahl eines „Gebietes" gegründet (darunter eine Punktmenge verstanden, die zu jedem ihrer Punkte auch die Punkte einer um ihn beschriebenen Kreisfläche enthält und zu je zweien ihrer Punkte auch die Punkte einer aus Strecken in endlicher Zahl bestehenden Verbindung derselben enthält): approximiert man nämlich die Menge der Begrenzungspunkte des Gebietes G durch eine polygonale Figur, so kommt dem System der Gebiete, welche von dem in G enthaltenen Teile der polygonalen Figur begrenzt werden, eine gewisse Zusammenhangszahl zu, die bei verstärkter Annäherung variiert; die obere Grenze dieser Zusammenhangszahlen wird als Zusammenhangszahl von G bezeichnet. Daraus folgt, daß einfach zusammenhängende Gebiete von innen durch einfache Polygone approximiert werden können. Die geschlossene Linie wird auf folgende Art definiert: Die Punkte der Ebene sollen in drei Klassen: A, J und T, zerfallen; 1. je zwei Punkte von A gehören einer zusammenhängenden Teilmenge von A an (d. h. einer solchen abgeschlossenen Teilmenge, die sich nicht in zwei abgeschlossene Teile zerlegen läßt); das entsprechende gilt für J; T soll 2. abgeschlossen, 3. in einem endlichen Kreis enthalten, 4. mit der Gesamtheit der gemeinsamen Grenzpunkte von J und A identisch sein; dann heißt T eine geschlossene Kurve.[1]) Man kann beweisen: 1. Um jeden Punkt von A gibt es eine aus lauter Punkten von A bestehende

[1]) Die in § 10, Satz XI, gemachte Voraussetzung, daß T zusammenhängend sei, dürfte nicht nötig sein, dagegen muß man hier und bei Satz XII und XV hinzufügen, daß T in einem endlichen Kreise liegt.

Digitized by Google

Kreisfläche (entsprechend für J), 2. T ist perfekt, 3. zusammenhängend und enhält 4. von keiner Kreisfläche alle Punkte. Wenn man die Voraussetzungen 1, 2, 3 und die Schlußfolgerung 1 als erfüllt annimmt, so folgt, daß die Menge T eine geschlossene Kurve enthält, die J und A trennt. Daraus ergibt sich weiter, daß in der Grenzmenge T eines einfach zusammenhängenden, in einem endlichen Kreis enthaltenen Gebietes sich alle Punkte einer geschlossenen Kurve befinden müssen und daß die Menge T das Gebiet vollständig bestimmt Geht man von den in den Voraussetzungen 2 und 3 und in den Folgerungen 3 und 4 enthaltenen Eigenschaften der Menge T aus, so folgt, daß die übrigen Punkte der Ebene in „Gebieten" endlicher oder abzählbar unendlicher Mannigfaltigkeit vereinigt sind. Diese Sätze werden auf den Raum übertragen. — Es folgen die Resultate neuerer Untersuchungen über die Gestalt der Punktmengen, in welchen Reihen analytischer Funktionen gleichmäßig konvergieren können, und über die Wertmengen, die solche Funkionen bei Stellen ihrer natürlichen Grenzen annehmen.

Die Hauptresultate des fünften Kapitels beziehen sich auf die Eigenschaften derjenigen Mengen, deren Punkte sich den Punkten einer gegebenen Menge umkehrbar eindeutig und stetig zuordnen lassen: Jedem Grenzpunkte der gegebenen entspricht ein Grenzpunkt der zugeordneten Menge; ist die gegebene Menge abgeschlossen, perfekt, zusammenhängend, so hat die zugeordnete die entsprechende Eigenschaft; ist die gegebene Menge eine geschlossene Kurve oder eine solche samt ihrer begrenzten Fläche, so gilt für die zugeordnete das gleiche (für den Fall, daß die gegebene Menge aus den Punkten eines Kreisumfanges besteht, werden mehrere Beweise dieser Tatsache gegeben). Der Verf. nennt solche geschlossene Kurven „einfach", deren Punkte von innen und außen „erreichbar" sind, d. h. sich mit einem beliebigen inneren oder äußeren Punkte durch einen Streckenzug verbinden lassen, der ganz im Innern, resp. Äußern verläuft und dessen Ecken, in höchstens abzählbarer Menge, sich nur bei dem Kurvenpunkte häufen können. (Im folgenden Kapitel wird bewiesen, daß die Erreichbarkeit von außen die von innen nach sich zieht und umgekehrt; ferner, daß jede abgeschlossene, in einem endlichen Kreise gelegene Punktmenge, die keinen zusammenhängenden Bestandteil enthält, mindestens einer einfachen, geschlossenen Kurve angehört.) Jede einfache geschlossene Kurve geht bei umkehrbar eindeutiger, stetiger Abbildung in eine ebensolche über und läßt sich ihrerseits durch eine solche Abbildung aus einem Kreise gewinnen. Einfach zusammenhängende Gebiete gehen in ebensolche über; wird die Grenze mit abgebildet und ist jeder ihrer Punkte von dem Gebiet aus erreichbar, so gilt dasselbe für das Bild. Bildet die gegebene Menge den Umfang eines Kreises (vgl. Kap. 6, III), so kann man eine umkehrbar eindeutige, stetige Zuordnung angeben, welche unter Aufrechterhaltung der Korrespondenz der Grenzen auch das Innere des Kreises auf das Innere der entsprechenden Kurve abbildet. Die Zusammenhangszahl eines Gebietes bleibt stets erhalten. Der Verf. dehnt diese Sätze summarisch auf den Raum aus. Die Dimension bleibt in dem Sinne erhalten, daß der vollen Umgebung eines Punktes des Raumes von m Dimensionen bei umkehrbar eindeutiger und stetiger Abbildung nicht die volle Umgebung eines Punktes in einem Raum von mehr als m Dimensionen entsprechen kann.

Dieser Satz ist bekanntlich nicht richtig, wenn die Zuordnung stetig und eindeutig ist, ohne umkehrbar eindeutig zu sein. Aber auch bei diesen

Digitized by Google

Transformationen (5. u. 6. Kap.) gilt: Einem Grenzpunkt entspricht wieder ein Grenzpunkt. einer abgeschlossenen oder zusammenhängenden Menge eine resp. gleichartige (einer perfekten im allgemeinen nicht); jeder abgeschlossene Teil der zugeordneten Menge entspricht einem passend zu bestimmenden abgeschlossenen Teile der gegebenen Menge. Ist diese speziell eine Strecke, so lassen sich ihr alle die und nur die zusammenhängenden Gebietsgrenzen stetig zuordnen, deren Punkte aus jedem Teile des Gebietes (den sie begrenzen helfen) erreichbar sind. Jedes stetige Bild einer Strecke („stetige Kurve") liegt in einem endlichen Kreis, ist perfekt und zusammenhängend; es kann eine Fläche sein, und zwar gilt der aus einer umfangreichen Untersuchung erhaltene Satz: Dafür, daß ein ebenes, in einem endlichen Kreis enthaltenes Kontinuum C stetiges und eindeutiges Bild einer Strecke sei, ist es notwendig und hinreichend, daß aus jedem Gebiet G, welches keinen Punkt von C enthält, jeder gemeinsame Grenzpunkt von G und C erreichbar sei, und daß die Anzahl jener Gebiete G, in welcher der Maximalabstand zweier Punkte über einer beliebig gegebenen Grenze liegt, endlich sei. — Es folgt eine Untersuchung über die Beschaffenheit mehrfacher Punkte der stetigen Kurven; es gibt solche, deren sämtliche Punkte von der Ordnung der Mächtigkeit des Kontinuums vielfach sind.

Das sechste Kapitel enthält noch ein Referat über neuere Untersuchungen der Länge von Kurven und des Inhaltes krummer Flächen sowie der Frage, wann die Differenz der Inhalte zweier Polygone, die eine geschlossene Kurve von innen und außen approximieren, unter jede Grenze gebracht werden kann.

Im siebenten Kapitel wird über einige Arbeiten berichtet, welche die Analogie zwischen Mengen von Punkten und Mengen von Funktionen oder Kurven in Evidenz setzen. Versteht man für eine Menge von Funktionen (z. B. einer reellen Variablen) unter einem Grenzelement eine gleichmäßig erreichte Grenzfunktion, so gilt der Satz: Dafür, daß jede unendliche Teilmenge einer Funktionenmenge ein Grenzelement habe, ist es notwendig und hinreichend, daß die Funktionen sämmtlich zwischen endlichen Grenzen liegen und gleichmäßig stetig sind (d. h.: konvergiert die Punktfolge $x_1 \ldots x_2 \ldots$ gegen den Punkt x, so konvergieren für alle Funktionen der Menge die Funktionswerte $f(x_n)$ gleichmäßig gegen $f(x)$, sobald $n = \infty$ wird). Um die Punktmengensätze auf Mengen von Bahnkurven anwenden zu können, sind Festsetzungen getroffen worden, wann zwei analytisch definierte Bahnkurven als zusammenfallend angesehen werden sollen und wie der Abstand verschiedener Bahnkurven zu verstehen ist. Man ist zu Systemen von Funktionen und Kurven gelangt, die den Charakter von Punktmengen tragen, indem man von den allgemeinsten Mannigfaltigkeiten ausging, in denen Grenzelemente definiert sind, und sukzessive der Gesamtheit, der die betrachteten Mengen angehören sollten, immer weitere Merkmale des Kontinuums der Punkte beilegte.

Das achte Kapitel enthält Korrekturen zum ersten Teile des Berichtes und Notizen über Arbeiten, die in der neuesten Zeit Anwendung der Mengenlehre auf die Funktionen reeller Veränderlicher gebracht haben. *F.*

Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. Von Crantz. 2 Teile („Aus Natur und Geisteswelt" Nr. 120 u. 205), 126 + 127 *S.*, Leipzig, B. G. Teubner, 1906 u. 1908.

Digitized by Google

Auf einem verhältnismäßig kleinen Raum wird ein ausführlicher und im allgemeinen recht klarer Lehrgang der elementaren Arithmetik und Algebra vorgezeichnet. Die übersichtliche Anordnung des Stoffes, seine anschauliche Darstellung und manche methodische Vorteile dürften das Buch für seinen Zweck, den Selbstunterricht sehr geeignet machen. Der erste Teil enthält die Operationen 1. bis 3. Stufe, die quadratischen Gleichungen und die Logarithmen, der zweite Teil bringt Näheres über Gleichungen zweiten Grades mit einer und mit mehreren Unbekannten, sowie über solche Gleichungen, die sich auf rationalem Wege in quadratische verwandeln lassen, ferner eine ausführliche Darlegung der Auflösung kubischer Gleichungen, diophantische Gleichungen, arithmetische und geometrische Reihen, ihre Anwendung auf die Zinseszins- und Rentenrechnung, die Lehre von den komplexen Zahlen und den binomischen Satz. — Der Verf. erwähnt im Gegensatz zu vieleren andern Lehrbüchern, welche die Grundoperationen nur formal definieren, deren Beziehung zu dem Zählen mit verschiedenen Einheiten; er erklärt das Ausziehen der Quadratwurzel aus dekadischen Zahlen und das Logarithmieren mit größerer Gründlichkeit als es sonst gewöhnlich geschieht, und widmet der graphischen Funktionendarstellung und der graphischen Auflösung von Gleichungen besondere Sorgfalt; die Auflösung reiner Gleichungen und der irreduzible Fall der kubischen Gleichung wird geometrisch durchgeführt. Hingegen vermißt man u. a. eine Begründung der Teilbarkeitsregeln, eine Besprechung der Dezimalbrüche, die Regel für das Qnadrieren dekadischer Zahlen; hiefür würde sich durch Unterdrückung der vielen Regeln über das Rechnen mit Wurzeln, die bei vorhergehender Einführung der gebrochenen Exponenten überflüssig werden, Platz gewinnen lassen. An manchen Stellen wäre größere Klarheit, gerade im Hinblick auf den Selbstunterricht erwünscht, z. B. kann die Deutung von $\frac{0}{0}$ bei den geometrischen Reihen, insbesondere aber das Verfahren des Verf., mit unendlich kleinen und unendlich großen Zahlen zu rechnen, nach Ansicht des Ref. beim Leser nur Verwirrung, aber keine Einsicht hervorrufen. Die Einteilung der Reihen in konvergente uud divergente, je nachdem die Summe der Reihe eine endliche oder unendlich große Zahl ist, ist bekanntlich unzutreffend. *F.*

Theoretisch-praktische Anleitung zur Erteilung des Rechen- und Raumlehrunterrichts. Von H. Knoche. XVI + 172 S., Arnsberg, J. Stahl, 1908.

Von einem erfahrenen Volksschullehrer wird eine überaus sorgfältig durchdachte und ausgeführte Anleitung zum Rechenunterricht gegeben, mit der Tendenz, ihn zu einem Mittel „sittlicher Bildung" zu gestalten. Der Verf. nennt seine Methode eine „realistische" im Gegensatz zu der in Übung stehenden „nominalistischen"; sie wird durch die folgende Angabe, wie der Verf. den Zahlenraum von 1 bis 10 dem Anfänger gelehrt wissen will, hinreichend charakterisiert erscheinen. Dieser Anfangsunterricht soll in drei Teile zerfallen: Zähl-, Schluß- und Folgerungskursus. Das erste Ziel des Zählkursus ist die anschauliche Erfassung der Zahlen 1—10, das Zählen in Worten, sodaß zu jeder Zahl eine bestimmte räumliche Gruppe von Objekten dem Kinde vorschwebt, ohne daß auf dieser Stufe auch Operationen mit den Zahlen vorgenommen würden; das zweite Ziel ist das verständnismäßige Zählen in Sätzen, d. h. Zählen durch ausdrückliches Hinzufügen oder Wegnehmen einer Einheit, bei

Digitized by Google

vorgegebenem Anfangsgliede der Zählung; das Wesen dieser Operation ist an realen Anwendungen und durch anschauliche Bilder klar zu erhalten, der Übergang zu reinen Zahlen allmählich durchzuführen. Ähnlich muß im „Schlußkursus" bei der Erklärung des Addierens und Subtrahierens vorgegangen werden, der Addendus ist zunächst auf 2 und 3 zu beschränken und in Einheiten zu zerlegen, solange bis das Weiterzählen um 2 zu einer geläufigen Fertigkeit wird. Das erste Ziel des „Folgerungskursus" ist das Erfassen der Vertauschbarkeit der Summanden, es folgt die Einprägung des „Eins und Eins" mit seiner subtraktiven Umkehrung; alles Addieren und Subtrahieren ist auf dieses Schema zu gründen. — In ähnlich sorgfältiger Weise wird die Lehre von den weiteren Zahlräumen analysiert. Zwei Abschnitte behandeln die Methodik und die allgemeinen pädagogischen Grundsätze für den Rechenunterricht, einer ist den bürgerlichen Rechnungsarten und einer den Grundlehren der Geometrie gewidmet. Nebenbei sei bemerkt, daß hier ein Volksschulpädagoge für den Anfangsunterricht (wie viele Mathematiker es für die Mittelschule tun) die Scheidung von ebener und räumlicher Geometrie verwirft. *F.*

Lehrbuch der Arithmetik für Untergymnasien. Von Močniks. Bearb. von A. Neumann, 39. Aufl., I. Abt., 148. S., Wien, F. Tempsky, 1907.

Der Ref. möchte im Hinblick auf die zahlreichen Auflagen, die von diesem weitverbreiteten Lehrbuch noch zu erwarten sind, auf einzelne Punkte, in denen eine Änderung erwünscht sein dürfte, hinweisen: Die Erklärung von Multiplikand und Multiplikator als „Faktoren" erhält erst nach der Aufstellung des kommutativen Gesetzes ihren Sinn; die Unmöglichkeit durch Null zu dividieren, und die Tatsache, daß Null durch jede Zahl teilbar ist, sind nicht erwähnt; manche Aufgaben, besonders der Prozentrechnung, sind nicht hinreichend deutlich formuliert (z. B. § 82, 9); hie und da finden sich überzählige Angaben (z. B. § 78, 9).

Lehr- und Übungsbuch der Arithmetik. Von Hočevar. Für die unteren Klassen der Gymnasien und verwandten Lehranstalten, 6. Aufl., 152. S., Wien, F. Tempsky, 1906.

Von dem vorher besprochenen unterscheidet sich dieses Lehrbuch hauptsächlich durch das Fehlen der vielen allgemeinen Lehrsätze über die arithmetischen Operationen, was dem Ref. ein Vorteil gegenüber jenem zu sein scheint. Hingegen dürfte es nicht günstig sein, daß hier die Lehre von den Proportionen vor die Schlußrechnung gestellt ist, weil der Schüler mit Vorliebe jene einfachere, aber weniger durchsichtige Rechnungsart heranziehen wird. *F.*

Sammlung von Beispielen und Aufgaben. Von Heis. Aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra, 112. Aufl., neu bearbeitet von Dr. J. Druxes, I. Teil, V + 280 S.). Köln, M. Du Mont-Schauburgsche Buchhandlung 1908.

Das weitverbreitete Aufgabenbuch erscheint hier zu seinem Vorteil völlig verändert. Die Aufgaben über den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste Vielfache, über die Kubikwurzel aus algebraischen Ausdrücken und über höhere Wurzeln, über natürliche Logarithmen und über wiederholte Logarithmierung, über die Logarithmierung von Summen, über Gleichungen mit mehr als drei Unbekannten, über Determinanten, über das Rechnen mit

Digitized by Google

ungebräuchlichen Maßen sind weggelassen; die meisten Aufgaben mit nur formellen Schwierigkeiten wurden gestrichen. Hingegen wurde jedem Kapitel eine theoretische Erklärung und eine Reihe ganz einfacher Zahlbeispiele vorangeschickt, außerdem sind etwa 60 neue Aufgaben geometrischen und physikalischen Inhalts, ungefähr ebenso viele über die graphische Darstellung von Funktionen, einige über die graphische Lösung von Gleichungen, 26 Aufgaben über Partialbruchzerlegung, eine Erklärung des geometrischen Bildes der komplexen Zahlen und eine historische Skizze hinzugekommen. Eine summarische Zählung zeigte dem Ref., daß im übrigen 370 Aufgaben über Operationen erster, 170 über Operationen zweiter, 320 über Operationen dritter Stufe, 240 über Gleichungen ersten, 120 über Gleichungen zweiten Grades weggelassen worden und resp. 150, 70, 160, 380, 240 Aufgaben neu hinzugekommen sind. Die Anordnung ist jetzt in mehrfacher Hinsicht praktischer. der Druck übersichtlicher. Der Ref. würde wünschen, daß die verwickelten Wurzelrechnungen (§§ 35—37) durch vorherige Einführung der gebrochenen Exponenten erleichtert und die mehrdeutigen Aufgaben über imaginäre Ausdrücke (z. B. § 40, Nr. 19, 28) zweifellos gefaßt würden; auch dürfte es für den Unterricht nicht vorteilhaft sein, daß selbst zu solchen Aufgaben, für die eine Hilfe unnötig ist, die Lösungen angegeben sind (z. B. zum Aufschlagen von Logarithmen und zu allen Gleichungen. — Im Ganzen ist diese Neubearbeitung des „Heis“ als eine sehr dankenswerte Leistung zu begrüßen.

F.

Močniks Lehrbuch der Arithmetik und Algebra nebst einer Aufgabensammlung, für die oberen Klassen der Gymnasien bearbeitet von A. Neumann. 30. Aufl., Wien, J. Tempsky, 1907.

Da schon eine neue, völlig geänderte Auflage dieses Buches in Aussicht steht, möchte sich der Ref. auf die Erwähnung einiger Wünsche für diese beschränken. Die Multiplikation und Potenzierung von Ungleichungen (§ 44 und 144) wäre auch für den Fall negativer Zahlen zu erklären; die Auswertung von $\frac{0}{0}$ (§ 91) wäre entweder durch Grenzübergang oder, bei Beschränkung auf rationale Funktionen, durch die Forderung zu definieren, daß der Einsetzung spezieller Werte (wie auch der Befreiung einer Gleichung von ihren Nennern, § 130) stets die Kürzung der Brüche vorangehen müsse; die Sätze über Grenzwerte können nach Ansicht des Ref. nicht an unabhängigen Variablen (§ 99), sondern nur an Funktionen dargelegt werden; die Sätze über das Rechnen mit Wurzelausdrücken könnte man durch vorhergehende Einführung der gebrochenen Exponenten wesentlich abkürzen. *F.*

Schellhorn, Planimetrische Beweise. G. D. Baedeker, Essen, 1906. — VI + 114 S.

Das Lehrbuch verfolgt den Zweck, durch größere Ausführlichkeit der Beweise den Selbstunterricht und die häusliche Vorbereitung zu erleichtern. Die Definition der Geraden und des Winkels durch den Begriff „Richtung“ und die Anwendung desselben zum Beweise des Parallelenaxioms und der übrigen Sätze von den Parallelen wird man auch für den Elementarunterricht nicht als zulässig ansehen können. *F.*

Digitized by Google

Einführung in die Infinitesimalrechnung. Von G. Kowalewski. Mit einer historischen Übersicht („Aus Natur und Geisteswelt" Nr. 197), 126 S. — Leipzig, B. G. Teubner, 1908.

Der Zweck der Sammlung, welcher dieses Buch angehört, ist es, auf verschiedenen Gebieten „dem Laien in voller Anschaulichkeit und lebendiger Frische eine gedrängte, aber anregende Übersicht" zu bieten. Der Verf. sucht diesen Zweck mit möglichster Strenge der Darstellung seines Gegenstandes zu verbinden. In der Tat werden unter der Annahme, daß das Rechnen mit unendlichen Dezimalbrüchen als Grundlage gesichert sei, die Hauptsätze von Funktionen, Zahlenfolgen, unendlichen Reihen, speziell Potenzreihen, dann die Differentialrechnung und die Anfangsgründe der Integralrechnung mit ihren einfachsten Anwendungen ganz streng dargelegt. Die Darstellung ist lebendig und anziehend und hat, besonders in dem Kapitel über algebraische Analysis, manchen methodischen Vorteil gegenüber anderen voraus; sie ist daher jedem zu empfehlen, der sich, ohne vor den Schwierigkeiten der modernen Beweisführung zurückzuschrecken, über die Grundsätze der Analysis unterrichten will. — Es fragt sich freilich, ob der Zweck der Sammlung „A. N. u. G." nicht eine leichtere Behandlung des Stoffes verlangt hätte, die, unbeschadet der Strenge und Anwendbarkeit, vielleicht durch Verringerung der Allgemeinheit der Voraussetzungen erreichbar wäre. Z. B. könnte man sich bei der Differentiation zusammengesetzter Funktionen auf den Fall der stetigen Ableitung beschränken. Der Beweis für den Mittelwertsatz der Differentialrechnung würde einfacher ausfallen, wenn man den für die Existenz des größten Wertes einer stetigen Funktion (§ 46) vorausnähme. Anderseits scheint dem Ref. eine, wenn auch noch so eingeschränkte Besprechung der implicite gegebenen Funktionen (wenigstens der durch die Gleichungen $f(x) + q(y) = o$ definierten) unentbehrlich zu sein, da sie schon bei den einfachsten Anwendungen auftreten; vielleicht ließe sich eine solche in der nächsten Auflage einfügen. *F.*

Cinq études de géométrie analytique. Applications diverses de la théorie des matrices et de l'élimination. Par M. Stuyvaert. Ouvrage couronné par l'Académie Royale de Belgique (Prix François Deruyts). VI + 230 p., pr. 6 fr. Gand, Van Goethem, 1908.

Das vorliegende Werk ist eine systematische Ausführung eines Gedankens, den der Verfasser in einer These seiner „Dissertation de doctorat spécial 1902" in der Form ausgesprochen hat:

„La Géometrie, en appliquant la théorie de l'élimination entre deux équations algébriques, n'utilise guère que la condition d'existence d'une seule racine commune. Les conditions pour que les équations aient plus d'une racine commune peuvent donner aussi des résultats géométriques intéressants."

Die Bedingungen bestehen aber in dem Verschwinden aller Determinanten einer gewissen Matrix.

Das ganze Werk zerfällt in fünf Teile; der erste enthält eine in diesem Sinne durchgeführte Theorie der Matrizen von l Zeilen und $l+1$ Kolonnen nebst geometrischen Anwendungen. Sind die Elemente a_{ik} der Matrix lineare Formen von n Veränderlichen, so verschwindet dieselbe im allgemeinen für die Punkte einer in einem R_{n-1} gelegenen Mannigfaltigkeit von $n-3$ Dimensionen und der Ordnung $\frac{1}{2}\,l\,(l+1)$. Es wird ferner nach der Mannigfaltigkeit gefragt,

Digitized by Google

die durch eine verschwindende Matrix $\| a_{ik} \|$ definiert ist, wenn die Elemente a_{ik} Formen vom Grade $n_i + p_k$ sind. Dann folgen Anwendungen auf Raumkurven 3., 6., 10. . . . . $\frac{1}{2} l(l+1)^{\text{ter}}$, sowie 5., 7., 8. und 9. Ordnung auf die Jacobische Kurve dreier Flächen, auf das Problem der geometrischen Örter und der Einhüllenden, auf die Untersuchung mehrfacher Sekanten rationaler Kurven, mehrfach schneidender Kegelschnitte etc. Dabei zeigt sich, daß die Darstellung einer Kurve durch eine verschwindende Matrix mancherlei Vorteile bietet; man bestimmt leicht die Ordnung und das Geschlecht der Kurve, erkennt die verschiedenen Erzeugungsarten, die hindurchgehenden Flächen niedrigster Ordnung, die mehrfachen Sekanten, Gruppen merkwürdiger Punkte u. s. w. Indessen wird auf die — wahrscheinlich wesentlich kompliziertere — Umkehrung der Frage, die Bedingungen aufzusuchen, unter denen sich eine Kurve durch eine verschwindende Matrix darstellen läßt, nicht eingegangen.

Die beiden folgenden Teile hängen mit dem ersten eng zusammen; im zweiten werden die Elemente der Matrix als Formen zweier oder mehrerer Reihen von Variablen vorausgesetzt, was insbesondere zu einer Theorie der Kongruenzen von Raumkurven führt. Der dritte Teil enthält eine Theorie der Matrizen für den Strahlenraum.

Im vierten Teil wird eine gewisse binäre quadratische symmetrische Form von zwei Variablenreihen untersucht; darauf folgen Anwendungen auf Kegelschnitte, Regelflächen 4. Ordnung, Erzeugende Bisekanten einer Raumkurve 3. Ordnung etc.

Der fünfte Teil behandelt Steinersche Vierseite bei ebenen Kurven 4. Ordnung mit zwei Doppelpunkten, bei Raumkurven 4. Ordnung 1. und 2. Art, bei Flächen 4. Ordnung, insbesondere bei der Steinerschen Fläche etc.

Den Schluß bildet eine Anwendung der Theorie auf die graphische Darstellung und Integration von Funktionen zweier Veränderlichen im Anschluß an die Arbeiten von Massau (Comptes rendues, Paris 1907). *H. Rothe.*

Breve Storia della matematica dai tempi antichi al medioevo. Gaetano Fazzari, professore ordinario di matematica nel R. Liceo Umberto I di Palermo (Biblioteca „Sandron" di Science e Lettere, No. 35). Milano-Palermo-Napoli, Remo Sandron, 1907. 268 S. — Ladenpreis 4 Lire.

Bei dem Vorhandensein der großen grundlegenden historisch-mathematischen Werke ist die Abfassung eines kleinen Kompendiums, wie es das vorliegende Buch ist, allerdings mehr ein Problem richtiger Auswahl und Zusammenstellung. In der deutschen Literatur besitzen wir seit langem in dem aus dem Dänischen übersetzten Werke von H. G. Zeuthen: „Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter" (1896) ein derartiges kleines Kompendium, mit dem das vorliegende italienische Buch, wie es ja in der Natur der Sache liegt, manche Ähnlichkeit aufweist. Was den Inhalt des Buches anlangt, so bildet nach einleitenden Kapiteln über die Dezimalzählung, die ägyptische und babylonische Mathematik auch hier vor allem die griechische Mathematik den Mittelpunkt der Darstellung; hier gelangt zunächst die Logistik, dann die voreuklidische Periode (Thales, das V. Jahrh. vor Chr., die Akademie), dann das „goldene Zeitalter" der griechischen Geometrie, das

Digitized by Google

2. Jahrhundert v. Chr. und der Verfall der griechischen Mathematik zur Darstellung. Dann folgen Kapitel über die Mathematik bei den Römern, den Juden, den Arabern, die byzantinische Schule und schließlich die Mathematik des Mittelalters, nach den einzelnen Jahrhunderten gesondert behandelt. Die Darstellung ist überall sehr klar und stilistisch fein durchgearbeitet sowie durch zahlreiche Figuren erläutert. Die Übersichtlichkeit ist allerdings gerade in den Abschnitten über die griechische Mathematik nicht so groß wie in dem Zeuthenschen Buche, wo die historische Behandlung der einzelnen Probleme schon äußerlich viel deutlicher durch entsprechende Überschriften hervortritt. Auch vermißt man in dem Buche ein alphabetisches Register, was bei der erwähnten geringen Zahl von Überschriften die Auffindung eines bestimmten Mathematikers oder eines bestimmten Problems oft recht mühsam macht.

Im ganzen wird das Werkchen dem italienischen mathematischen Publikum aber doch sehr willkommen sein, da es den Leser, ohne ihn durch Weitläufigkeit zu ermüden, in äußerst anziehender Form mit den wichtigsten Resultaten der historisch-mathematischen Forschung bekannt macht und namentlich den Studierenden als Einführung in dieses Gebiet sehr empfohlen werden kann. *R. v. St.*

Sur la forme des chiffres usuels, par Georges Dumesnil, professeur à l'université de Grenoble. Grenoble, typographie Allier frères, 1907, 8°, 22 S.

In der kleinen Schrift wird der an sich ganz geistreiche Versuch gemacht, die Entstehung der jetzt allgemeinen Form der arabischen Ziffern aus speziellen Gruppierungen, entsprechend vielen Punkten und einigen mit denselben im Laufe der Zeit vorgenommenen Transformationen, zu erklären. Wir müssen uns wohl jedes Urteils darüber, inwiefern diese Erklärung Anspruch auf Richtigkeit erheben kann, enthalten, da dies jedenfalls nur auf Grund eines umfangreichen archäologischen Materials untersucht werden könnte.

R. v. St.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen, begründet von Moritz Cantor. Heft XXIV, 1. Joannis Verneri: De triangulis sphaericis libri quatuor. De Meteoroscopiis libri sex. Cum procemio Georgii Joachimi Rhetici.

I. De triangulis sphaericis, herausgegeben von Axel Anthon Björnbo. Mit 211 Figuren im Text. Leipzig, B. G. Teubner, 1907, 8°, 184 S. — Ladenpreis 8 M.

Johannes Werner lebte in Nürnberg von 1468 bis 1528. Sein Aufenthalt wurde nur durch seine theologischen Studien an mehreren deutschen Universitäten und durch eine etwa vierjährige Reise nach Italien (1493—1497) unterbrochen. Nach seiner Rückkehr bekleidete er durch 30 Jahre die Stelle eines Pfarrers in Nürnberg. Der vorliegenden Ausgabe ist das Bildnis Wagners vorangestellt, wie es sich im Germanischen Museum und in der Stadtbibliothek in Nürnberg findet; es wird jedoch vermutet, daß es kein zu Lebzeiten Werners angefertigtes Porträt ist, sondern vielleicht überhaupt nur ein Phantasiebild.

Digitized by Google

Der vorliegenden Veröffentlichung der Schrift Johannes Werners über sphärische Dreiecke liegt eine einzige Handschrift zu Grunde, die sich im Besitze der Vatikanischen Bibliothek befindet; diese scheint überhaupt das einzige erhaltene Exemplar des Werkes darzustellen. Von den vier Büchern, in welche die Schrift eingeteilt ist, enthält das erste eine Diskussion des sphärischen Dreieckes hinsichtlich der Größenverhältnisse der Seiten und Winkel. das zweite zunächst in einem allgemeinen Teile die sphärischen trigonometrischen Grundformeln und in einem speziellen die Auflösung des rechtwinkligen sphärischen Dreieckes; im dritten wird die Auflösung des schiefwinkligen sphärischen Dreieckes durch Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke gelehrt und im vierten die Auflösung des schiefwinkligen Dreieckes aus den gegebenen drei Seiten nach der sogenannten posthaphäretischen Methode, die im wesentlichen in einer Umordnung unseres Kosinussatzes besteht. Der Herausgeber hat dem Werke eine äußerst eingehende und gründliche Textschrift beigegeben, in der namentlich auch untersucht wird, inwiefern die trigonometrischen Arbeiten Werners durch die Untersuchungen Regiomontanus beeinflußt sein können. Auch ein Sachwörterverzeichnis und eine vollständige tabellarische Übersicht der einzelnen im Werke enthaltenen Sätze ist vorhanden, mit deren Hilfe man sich leichter in die uns ungewohnte Ausdrucksweise im Texte hineinfindet. *R. v. Sš.*

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Herausgegeben von Moritz Cantor unter Mitwirkung der Herren V. Bobynin, A. v. Braunmühl, F. Cajori, S. Günther, V. Kommerell, G. Loria, E. Netto, G. Vivanti, C. R. Wallner. Vierter Band von 1759—1799. Leipzig, B. G. Teubner 1908 (VI + 1113, gr. 8°).

Nun ist er doch noch erschienen, jener vierte Band, von dem Cantor vor zehn Jahren beim Erscheinen des letzten Heftes des dritten Bandes in der Vorrede sprach und für den er damals Namen nannte, die ihn etwa schreiben würden. Cantor selbst hat dazu den Überblick über die 40 Jahre von 1759—1799 beigesteuert, der gerade bei der Fülle von Einzelheiten in dem betrachteten Zeitraum besonders willkommen ist. Eine Kritik zu schreiben würde eine Nachprüfung erfordern und nur wenige sind in den Quellen dieser Zeit so bewandert, daß sie es könnten. Anderseits sind die Ideen, welche in diesen 40 Jahren der Mathematik zugewachsen sind, uns sehr viel mehr vertraut als die des Mittelalters und oft führt die historische Betrachtung über die Quellen hinaus zur Vertiefung in die Bedingungen mathematischer Forschung und die Art der Verbreitung ihrer Ergebnisse. Den Abschnitt (von Bobynin) über die Lehrbücher der Elementargeometrie und das Verhältnis d'Alemberts zu diesen Fragen wird man mit aktuellem Interesse lesen, nicht minder die Nachrichten über die Einführung des metrischen Systems.

Aber nicht weniger fesselt Vivantis Darstellung der Infinitesimalrechnung und Wallners Abschnitt über totale und partielle Differentialgleichungen. Der Zusammenhang mit der Vergangenheit wird bei diesen Abschnitten wohl besonders lebendig im Leser, weil er hier beobachten kann, wie die nun geläufigen Gedankengänge und Probleme nach und nach ihre gegenwärtige Form bekamen. Aber damit soll nicht gesagt sein, daß nicht auch alle anderen

Digitized by Google

Abschnitte des Interessanten und Belehrenden in Fülle enthielten. Es sind dies die folgenden: Geschichte der Mathematik (S. Günther). Arithmetik Algebra, Zahlentheorie (F. Cajori). Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Reihen, Imaginäres (E. Netto), Elementare Geometrie (Bobynin), Trigonometrie, Tafeln (v. Braunmühl), Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes (Kommerell), Perspektive und darstellende Geometrie (G. Loria), Infinitesimalrechnung (Vivanti), totale und partielle Differentialgleichungen, Differenzenrechnung, Variationsrechnung (Wallner), Überblick (M. Cantor), Verbesserungen und Zusätze von F. Müller. Ein Register beschließt den Band.

Eine Bemerkung, die sich beim Durchblättern darbot, zum Schlusse: Das Integral auf pag. 758 unter Nr. 13 ist keine Verallgemeinerung der Betafunktion, sondern geht durch die Substitution $x^n = z$ über in $\frac{1}{n} B\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right)$.

Astronomischer Kalender für 1909. Herausgegeben von der k. k. Sternwarte in Wien. Karl Gerolds Sohn.

Der bekannte Kalender in der bisher üblichen Form. Von den Beilagen sei hervorgehoben das Verzeichnis der Bahnelemente aller bisher berechneten Kometen nebst den Bemerkungen dazu. In dem jährlichen Bericht über neue Asteroiden, Satelliten und Kometen nimmt der verdienstvolle Referent, Herr Direktor Hofrat E. Weiß, der nun dreißig Jahre dieses Gebiet verfolgt und die Ausgabe des Kalenders geleitet hat, Abschied von seinen Lesern.

Manuscripts de Evariste Galois. Publiés par Jules Tannery. Paris, Gauthier-Villars 1908.

In dem Nachlaß Liouvilles, den er Frau v. Blignières vermachte, haben sich nun auch die Originalmanuskripte Galois' gefunden und J. Tannery hat sie mit seiner bekannten Genauigkeit und liebevollen Vertiefung benützt, um die bisher veröffentlichten Arbeiten Galois' zu ergänzen und einiges Neue, vorwiegend von persönlichem Interesse, hinzuzufügen. Von Interesse sind vor allem die allgemeinen Ideen über die Behandlung und Weiterentwicklung der Mathematik und die Stimmungsäußerungen in dem so kurzen, aber leidenschaftlich bewegten Leben Galois'.

Traité de mathématiques générales à l'usage des chimistes, physiciens, ingénieurs et des élèves des facultés des sciences. Par E. Fabry. Avec une préface de G. Darboux. Paris, Hermann & fils, 1909.

Das Buch hat in erster Linie die mathematischen Bedürfnisse der Chemiker, Physiker, Ingenieure, Ökonomen und Statistiker im Auge, also solcher Studierender, welche, um ein Wort Schillers zu gebrauchen, an das Darboux in der Vorrede erinnert, die Wissenschaft als melkende Kuh betrachten, und es sucht den ganzen Stoff aus Mathematik und Mechanik darzubieten, der für einen solchen Leserkreis notwendig und ihm erwünscht ist. Für diesen Vorwurf die passende Auswahl des Stoffes und für die Darstellung die richtige Form zu finden, ist dem Verfasser in hohem Grade geglückt. Der Stoff nimmt auf alle Bedürfnisse dieser Kreise Rücksicht und die Darstellung ist bei äußerster Knappheit ziemlich einfach, sehr präzis und klar, leicht ver-

Digitized by Google

ständlich und doch vollkommen exakt. Das Buch erfüllt also in ausgezeichneter Weise alle Forderungen, die daran gestellt werden können, und verdient in vollem Maße das Lob, das niemand Geringerer als Darboux ihm in einem Geleitworte spendet. Eine bessere Empfehlung konnte dem Buch auf den Weg nicht mitgegeben werden und so genügt es wohl, noch kurz eine Vorstellung von seinem reichen Inhalte zu erwecken. Zu dem Behufe mögen die Überschriften der einzelnen Kapitel samt ihrem Umfange angeführt werden, wodurch immerhin eine beiläufige Abschätzung über die Ausdehnung der darin behandelten Materie ermöglicht wird.

I. Teil, Algebra (126 S.) — 1. Kap. Inkommensurable Zahlen, Grenze, Stetigkeit (9 S.) — 2. Kap. Wurzelgrößen, Kurven (5 S.) — 3. Kap. Determinanten (8 S.) — 4. Kap. Reihen (12 S.) — 5. Kap. Exponentialfunktion, Log. (9 S.) — 6. Kap. Derivierte Taylorsche Formel (16 S.) — 7. Kap. Verschiedene Anwendungen (Max. Min. etc.) (9 S.) — 8. Kap. Entwicklung in Reihen (9 S.) — 9. Kap. Funktionen mehrerer Veränderlichen (10 S.) — 10. Kap. Das Imaginäre (8 S.) — 11. Kap. Algebraische Gleichung (10 S.) — 12. Kap. Reelle Wurzeln (9 S.) — 13. Kap. Inkommensurable Wurzeln, Gleichungen dritten Grades (6 S.) — 14. Kap. Partialbrüche, Elimination (7 S.) — 15. Kap. Interpolation (4 S.).

II. Teil, Analytische Geometrie (144 S.) — 1. Kap. Fundamentale Begriffe (11 S.) — 2. Kap. Die Gerade (9 S.) — 3. Kap. Geometrische Örter (8 S.) — 4. Kap. Mehrfache Punkte, Asymptoten (9 S.) — 5. und 6. Kap. Kurven zweiter Ordnung (28 S.) — 7. Kap. Durchschnitt zweier Kegelschnitte, Polare (7 S.) — 8. Kap. Polarkoordinaten, Unikursale Kurven (8 S.) — 9. Kap. Enveloppe, Krümmung (10 S.) — 10. Kap. Koordinaten im Raume (8 S.) — 11. Kap. Ebene und Gerade (7 S.) — 12. Kap. Erzeugung der Flächen (7 S.) — 13. Kap. Flächen zweiten Grades (10 S.) — 14. Kap. Durchschnitt von Flächen (11 S.) — 15. Kap. Kreisschnitte, Berührungskegel (8 S.) — 16. Kap. Enveloppe von Flächen, Krümmung (13. S.).

III. Teil, Analysis (85 S.) — 1. Kap. Differentiale (7 S.) — 2. Kap. Integral (11 S.) — 3. Kap. Bestimmte Integrale, Flächeninhalt. (12 S.) — 4. Kap. Anwendungen (8 S.) — 5. Kap. Volumen und Oberfläche (11 S.) — 6. Kap. Kurvenintegrale (8 S.) — 7. Kap. Oberflächenintegrale (9 S.) — 8. Kap. Differentialgleichungen (12 S.) — 9. Kap. Partielle Differentialgleichungen (6 S.).

IV. Teil, Mechanik (59 S.) — 1. Kap. Kinematik (9 S.) — 2. Kap. Dynamik des freien Punktes (10 S.) — 3. Kap. Dynamik eines unfreien Punktes (10 S.) — 4. Kap. Statik (11 S.) — 5. Kap. Schwerpunkt (8 S.) — 7. Kap. Dynamik der Systeme (11 S.).

Jedem Kapitel sind Übungsbeispiele beigegeben und am Schlusse des Buches befindet sich eine Formelsammlung.

Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung von J. A. Serret nach Axel Harnacks Übersetzung. 3. Auflage. Umgearbeitet von G. Scheffers. 2. Band, Integralrechnung. Leipzig, B. G. Teubner, 1907.

Der zweite Band besitzt fast den gleichen Inhalt und in derselben Anordnung wie der der früheren Auflage, doch hat sich der neue Bearbeiter die

Digitized by Google

Mühe nicht verdrießen lassen, fast den ganzen Text umzuarbeiten und mehr als 100 Figuren neu zu zeichnen. Beinahe in jedem Kapitel mußten fehlende Reweise nachgetragen, einzelne Stellen teils ergänzt, teils präziser gefaßt werden. So hat das Buch unter den Händen des neuen Bearbeiters in jeder Hinsicht gewonnen und wird sich ihm in der neuen Auflage die Vorliebe der Studierenden in noch höherem Maße zuwenden, als es schon bisher der Fall war.

Differential- und Integralrechnung im Unterrichte. Von A. Schultze. Mit 7 Figuren im Texte. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1907.

Das Büchlein, das 30 Seiten umfaßt, entsprang den Anregungen F. Kleins (in Göttingen), den Funktionsbegriff und die Elemente der Differential- und Integralrechnung in den Mittelschulunterricht einzuführen.

Einführung in die Differential- und Integralrechnung nebst Differentialgleichungen. Von F. L. Kohlrausch. Mit 100 Textfiguren und 200 Aufgaben. — Berlin, J. Springer, 1907.

Ein Buch, das aus den Bedürfnissen der Telegraphenbeamten hervorging und den Leser in den Stand setzen soll, ohne besondere Vorkenntnisse sich den Stoff der Differential- und Integralrechnung praktisch anzueignen.

Vorlesungen über bestimmte Integrale und die Fourierschen Reihen. Von J. Thomae. Leipzig, B. G. Teubner, 1908.

Der Verfasser, dem die mathematische Literatur eine Reihe vortrefflicher Lehrbücher verdankt, hatte mit seiner 1875 erschienenen „Einleitung in die Theorie der bestimmten Intregrale" das mathematische Publikum als der erste mit den Bestrebungen bekannt zu machen gesucht, die Integralrechnung auf rein arithmethische Grundlage zu stellen und in ihrer Darstellung volle Strenge einzuführen. Während nun dieses Heft in erster Linie die prinzipiellen Fragen behandelte, werden im vorliegenden Buche die Auswertung der Integrale und die Auseinandersetzung der hier gebräuchlichen Methoden stark in den Vordergrund gestellt. Dies tritt noch nicht so sehr in dem zweiten Abschnitte über bestimmte Integrale hervor — dem eine kurze Zusammenstellung der wichtigsten Sätze über Funktionen als Einleitung vorangeschickt wird — aber immer mehr und in steigendem Maße in den folgenden Abschnitten über Fouriersche Reihen, schwingenden Seiten, Doppelintegrale, Fouriersche Integrale, Eulersche Integrale, und Integration zweigliedriger Ausdrücke. In diesen verzichtet sogar der Verfasser, weil dem Zwecke seines Buches nicht entsprechend, auf größere Berücksichtigung der neueren, zum Teile sehr einschneidenden Forschungen, doch fehlen keineswegs hin und wieder Bemerkungen über und Hinweise auf diese.

Aus diesen wenigen Angaben wird man schon zur Genüge entnehmen können, daß der Anfänger aus diesen Vorlesungen, deren Studium ihm hiemit wärmstens empfohlen sei, großen Nutzen wird ziehen können, daß sie aber — zumal in den Kapiteln über Fouriersche Reihen, Doppelintegrale, Eulersche Integrale und Integration zweigliedriger Ausdrücke — weder ex- noch intensiv eine Darstellung angeben, die dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft voll entspricht.

Digitized by Google

Vorlesungen über die Elemente der Differential- und Integralrechnung und ihre Anwendung zur Beschreibung von Naturerscheinungen. Von H. Burkhardt. Mit 38 Figuren im Texte. Leipzig, B. G. Teubner, 1907.

Das Buch hat, wie schon der Titel besagt, einen großen Leserkreis vor Augen: Studierende der Mathematik und der Naturwissenschaften, welche letztere die Mathematik nur als Mittel zum Zweck betrachten. Den vielfach auseinandergehenden Bedürfnissen dieser beiden Klassen von Lesern Rechnung zu tragen, versucht es in ganz eigentümlicher neuer Weise. Eine rein arithmetische Darstellung wäre nach Ansicht des Verfassers unter diesen Verhältnissen sinnlos gewesen, aber andererseits wieder mußte vermieden werden, dem angehenden Mathematikern Auffassungen beizubringen, von denen sie sich dann im Laufe ihrer Studien mühsam befreien müßten, ähnlich wie es der gegenwärtigen Generation von Mathematikern erging. Durch diese Klippen sucht sich nun der Verfasser dadurch zu winden, daß er zwar seine Darstellung auf die geometrische Anschauung basiert, auf diese aber nur bei möglichst wenigen Fragen sich beruft und im übrigen die Darstellung so hält, daß nach Klärung dieser Fundamentalfragen die Arithmetisierung keine Schwierigkeiten bietet. In diesem Bestreben weicht er dem Grenzbegriffe aus und sucht die Differentialrechnung ohne ihn zu entwickeln. Zu dem Ende definiert er den Differentialquotienten zunächst für rationale und algebraische Funktionen (nach der älteren Terminologie) in der Auffassung, wie sie vor Entwicklung der Differentialrechnung üblich war und wie sie später Ohm in seinem Versuch eines konsequenten Systems der Mathematik wieder aufnahm. Indem der log in der bekannten Weise durch das Integral und hieraus die Exponentialfunktion definiert wird, gelingt es auch, noch bei der Differentiation dieser Funktionen den Grenzbegriff zu vermeiden. Doch schon bei der Bestimmung des Flächeninhaltes einer Figur, bei der Taylorschen Formel, späterhin der Differentiation der trigonometrischen und zyklometrischen Funktionen etc. muß sich der Verfasser in der früher angedeuteten Weise zu helfen suchen, indem er an die Anschauung appelliert und die Ausführungen als für den Mathematiker ungenügend erklärt. Besondere Aufmerksamkeit wird im Buche dem Rechnen mit Näherungsformeln, der numerischen Auflösung der Gleichungen und der Interpolation gewidmet. Sehr am Platze ist auch das Kapitel über Rechnen mit kleinen Größen (§ 45), dem viel später (§ 61) das Reehnen mit Differentialen (unendlich kleinen Größen im Sinne der Differentialrechnung) folgt. Am Schlusse finden sich auch einige Bemerkungen über Funktionen zweier Veränderlichen. Das Buch ist zunächst aus den Bedürfnissen an der Universität Zürich hervorgegangen, wo mangels an Zeit und Lehrern die den Chemikern und Mineralogen unentbehrlichen mathematischen Vorlesungen auch für die Mathematiker nutzbringend gestaltet werden müssen. Ob das Kompromiß, das zu diesem Zwecke der Verfasser in dem Buche unternommen hat, die beste Lösung bietet, mag dahingestellt bleiben. Es scheint sich aber in Zürich gut bewährt zu haben und so ist wohl das gleiche auch an anderen Universitäten zu erwarten, da an den meisten die gleichen Bedürfnisse vorhanden sind. Jedenfalls werden die Studierenden der Naturwissensehaften, zumal die Chemiker, auf die besonders Bedacht genommen wurde, in dem Buche eine ihnen zusagende Darstellungsart und weitgehende Berücksichtigung ihrer Wünsche finden; auch den mathematischen Anfängern wird

Digitized by Google

es von nutzen sein, wenn sie daraus das Bedürfnis nach einer strengeren Darstellung der zu behandelnden Materie schöpfen.

Über Fehlerabschätzung bei unendlichen Produkten und deren Anwendungen. Von Richard Kischke. Inauguraldissertation. Königsberg i. Pr. 1908.

W. Fr. Meyer hat eine Formel mitgeteilt, die eine obere Schranke für den Fehler angibt, den man begeht, wenn man bei angenäherter numerischer Berechnung eines unendlichen Produktes dieses durch das Produkt der ersten n Faktoren ersetzt. In der vorliegenden Dissertation sind Beispiele numerischer Berechnungen unendlicher Produkte durchgeführt und es ist dabei die genannte, auch auf Produkte und Quotienten von unendlichen Produkten ausgedehnte Fehlerabschätzungsformel verwendet, um zu zeigen, daß bei manchen Funktionen ihre bekannten Darstellungen durch unendliche Produkte sich für die numerische Berechnung besser eignen als die gewöhnlich benützten Reihenentwicklungen. Bei der von W. Fr. Meyer gegebenen Herleitung der Formel zur Fehlerabschätzung tritt ein Ausdruck von der Gestalt $e^{\gamma}-1$ auf, wo γ eine bekannte (kleine) positive Größe bedeutet. Dieser Ausdruck wird dann durch den größeren, für kleine γ aber wenig verschiedenen Bruch $\gamma:(1-\frac{1}{2}\gamma)$ ersetzt. (Differenz von 3. Ordnung in γ.) Kischke (§ 3—5) sucht nun einige andere rationale Funktionen von γ auf, die gleichfalls $> e^{\gamma}-1$ sind, aber diesem Ausdruck noch näher liegen als der genannte Bruch, um dadurch noch günstigere Abschätzungsformeln des Fehlers zu erhalten. Praktisch hat es freilich wenig Bedeutung, von einer oberen Schranke für einen Fehler viele geltende Dezimalstellen möglichst genau zu berechnen. Theoretisch handelt es sich um die schon vielfach untersuchte Aufgabe (Vgl. Enz. II B 1, pag. 92 f.), eine gegebene Potenzreihe $f(\gamma)$ durch den Quotienten von zwei geeigneten Polynomen $P(\gamma)$, $Q(\gamma)$ mit vorgeschriebenen Gradzahlen m, n so zu approximieren, daß die Reihenentwicklung der Differenz $f(\gamma)-\frac{P(\gamma)}{Q(\gamma)}$ mit einer möglichst hohen Potenz von γ (im allgemeinen γ^{m+n+1}) beginnt. Ist nun $P(\gamma):Q(\gamma)$ eine solche Approximation an $f(\gamma)$ und $g(\gamma)$ ein Polymon l^{ten} Grades, so bemerkt man leicht, daß wenigstens für alle $f(\gamma)$, deren Koeffizienten nicht speziell gewisse Determinanten zum Verschwinden bringen, $\frac{P(\gamma)+g(\gamma)\,Q(\gamma)}{Q(\gamma)}$ dann und nur dann eine ebensolche Approximation an $f(\gamma)+g(\gamma)$ darstellt, wenn $l+n \leqq m$ ist.[1]) Die sowohl allgemein als speziell für $f(\gamma)=e^{\gamma}$ durchgeführte Behandlung dieser Aufgabe hat Padé (Ann. d. l'éc. norm. sér. 3, t. 9, 16) zu Kettenbruchentwicklungen für e^{γ} geführt, denen nun Kischke rationale Annäherungsfunktionen $P(\gamma):Q(\gamma)$ $[>e^{\gamma}]$ an e^{γ} entnimmt; aus diesen werden dann die Annäherungsausdrücke $\frac{P(\gamma)-Q(\gamma)}{Q(\gamma)}$ für $e^{\gamma}-1$ abgeleitet. Die vorgenommene Diskussion und Vergleichung der erhaltenen Ausdrücke ließe sich übrigens erheblich vereinfachen, wenn davon Gebrauch gemacht würde, daß auf Grund obiger Bemerkung hiebei nur solche Ausdrücke $P:Q$, für welche $n \leqq m$ ist, verwendbar sind.

[1]) Vgl. eine diesbezügl. Notiz im gleichen Bande (S. 285) dieser Zeitschrift.

Digitized by Google

Das Hereinziehen (§ 8) einer linearen Größenanordnung der komplexen Zahlen: $a + b\,i < c + d\,i$, *(a)*

wenn $a < c$ oder $a = c$ und $b < d$, und eine darauf gegründete und auch bei den numerischen Beispielen verwendete Einschließung einer gesuchten Größe zwischen zwei ausgerechnete Schranken ist für die dabei beabsichtigte Abschätzung der gesuchten Größe unbrauchbar, da ja z. B. aus

$\alpha_n + \beta_n i < a_n + b_n i < \gamma_n + \delta_n i\,(n = 1, 2, \ldots)$ und $\lim(\alpha_n + \beta_n i) = \lim(\gamma_n + \delta_n i)$ nicht einmal auf die Existenz von $\lim(a_n + b_n i)$ geschlossen werden könnte. Auch sind neben anderem insbesondere die auf diese Größenanordnung der komplexen Zahlen bezüglichen Entwicklungen des betreffenden Paragraphen inkorrekt (z. B. die nicht einmal für jede reelle Ungleichung *(a)* zulässige Multiplikation von *(a)* mit einer Ungleichung zwischen positiven Zahlen; die Ableitung einer oberen Schranke, u. zw. $= 1$, für $\left|\frac{\beta}{1+\alpha}\right|$ aus $\left|\alpha + \beta i\right| < 1$, pag. 34).

H. Tietze.

Lehrbuch der Funktionentheorie. Von W. F. Osgood. I. Bd. Mit 150 Figuren. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1907.

Von der Anlage dieses zweiten Teiles des ersten Bandes, Auswahl und Gliederung seines Stoffes sowie dessen Behandlungsweise gilt in jeder Beziehung das bereits über den ersten Teil Gesagte. Um also eine klare Vorstellung von ihm nach Inhalt und Darstellung zu geben, wird es genügen, in Kürze den behandelten Stoff und die angewandten Methoden anzuführen.

Der Band beginnt mit dem 8. Kapitel, das die Überschrift trägt: „Mehrdeutige Funktionen und Riemannsche Flächen". Es führt in diese Theorie nicht durch allgemeine Erörterungen ein, sondern an der Hand von speziellen Fällen. So wird die Riemannsche Fläche konstruiert für: $w = \log z$ (§ 1), $w = z^m$ (§ 2); $w = \sqrt{(z-a)(z-b)(z-e)}$ (§ 3); dann (§ 4) für die implicite Funktion $w^3 - 3w = z$, zu deren vollständiger Diskusion (§ 5) ein Kriterium über konforme Abbildung im Großen herangezogen wird. In § 6 wird die Riemannsche Fläche für $w^4 - 4w = z$ besprochen und im § 7 an dem Beispiele $w = \int_0^1 \frac{z\,dz}{z^3-1}$ gezeigt, wie man durch allmähliche Erzeugung der zugehörigen Riemannschen Fläche einen klaren Einblick in ihre Zusammensetzung erhalten kann. § 3 bespricht die lineare Transformation einer Riemannschen Fläche und behandelt (nach Kleins Vorlesungen) die Fläche des log, arccos, arcsin. In § 9, 10, 11 und 12 werden die rationalen und algebraischen Funktionen sowie ihre Singularitäten erörtert und mit einigen kurzen Bemerkungen über Funktionen auf einer Riemannschen Fläche, Integrale und Residuen endigt § 12. Nachdem im § 13 die Parameterdarstellung in einem Verzweigungspunkte behandelt wurde, werden im § 14 die bekannten Sätze, welche die algebraischen Funktionen charakterisieren, abgeleitet, wird im § 15 die Abbildung eines Rechteckes auf einen Kreis besprochen, im § 16 mehr anhangsweise noch der Zusammenhang zwischen Funktionen und Theorie der algebraischen Kurven besprochen und im § 17 die Riemannsche Fläche für Raumkurven erwähnt. Den Beschluß des Kapitels bilden (§ 16) einige Bemerkungen über die Arithmetisierung der Riemannschen Fläche.

Digitized by Google

Das nächste, neunte, Kapitel ist dem Begriffe der analytischen Fortsetzung gewidmet, der eingehender und präziser behandelt wird, als es gewöhnlich der Fall ist. Es wird zunächst (§ 1) der Begriff der Fortsetzung durch zwei oder mehrere einblätterige Bereiche, die gemeinsame Randpunkte haben, gegeben und dann speziell der Fall, daß sie Kreise sind, hervorgehoben. Im § 2 werden streng einige fundamentale Sätze über analytische Fortsetzung entwickelt und wird im § 3 zur endgültigen Definition der monogenen analytischen Funktion geschritten, die im § 4 eine Ergänzung erhält, die auch zu dem bekannten Satze führt, daß die verschiedenen einem Punkte entsprechenden Funktionswerte, welche man aus einem vorgelegten Elemente ableiten kann, stets eine abzählbare Menge bilden. Weierstraß' Bemerkung, daß die Begriffe „analytische Funktion" und „analytischer Ausdruck" sich nicht decken, findet da Erwägung. Die Arbeiten Borels und Fabrys über Fortsetzung sind nicht berücksichtigt, sondern § 5 behandelt einige spezielle monogene analytische Funktionen: die algebraischen, die allgemeinen Potenzfunktionen mit natürlicher Grenze (Lückenfunktionen), wofür das Beispiel $\Sigma z^{n!}$ gewählt wurde. § 6 bespricht die Permanenz einer Funktionalgleichung und die durch sie bestimmte Fortsetzung, welche allgemeinen Auseinandersetzungen auf die linearen Differentialgleichungen, die Γ-Funktion und die elliptischen Funktionen angewendet werden.

Im darauffolgenden dritten Abschnitte wendet sich der Verfasser den periodischen Funktionen zu. Es werden zunächst (§ 1 des zehnten Kapitels) die bekannten elementaren Begriffe und Sätze über Perioden hergeleitet, worauf der Verfasser die einfach periodischen Funktionen behandelt, und zwar zuerst durch konforme Abbildung des Periodenstreifens (§ 2 und 3), sodann in § 4 direkt. Im § 5 werden die Liouvilleschen Sätze über elliptische Funktionen samt ihren Folgesätzen hergeleitet, sodann in § 6 und 7 die elliptischen Funktionen zweiter Ordnung näher untersucht und am Schlusse der Weierstraßsche Satz über eindeutige Funktionen, die ein algebraisches Additionstheorem besitzen, begründet. Im § 8 wird noch eine Definition der periodischen Funktionen auf Grund des Fundamentalbereiches gegeben und im letzten (§ 9) des Begriffes der doppeltperiodischen Funktionen zweiter und dritter Art sowie der mit einem Perioditätsmodul Erwähnung getan.

Das nächste, elfte, Kapitel ist betitelt: „Reihen- und Produktentwicklung". Es beginnt wieder mit speziellen Fällen, der Partialbruchzerlegung von $\cos z$, $\cot z$ etc., woran die Herleitung von $p'(z)$ gereiht wird, aus dem $p(z)$ und $\varphi(z)$ samt der Differentialgleichung für ersteres gewonnen wird. Im § 3 wird die Darstellung der elliptischen Funktionen mittels φ- und p-Funktionen gegeben und hierauf (§ 4) die σ-Funktion abgeleitet, die wieder für denselben Zweck verwendet wurde, im § 5 zur Ableitung des Additionstheorems für $p(z)$. Nach Erledigung dieser speziellen Fälle werden die Vorbereitungen für die Lösung des allgemeinen Problems getroffen, indem zunächst im § 6 der Begriff der absoluten Konvergenz eines unendlichen Produktes aufgestellt und im § 7 unendliche Produkte betrachtet werden, deren Faktoren eindeutige Funktionen von z sind. Nachdem noch im § 8 die speziellen Fälle $\sin z$ und $\sigma(z)$ besprochen wurden, geht der Verfasser im § 9 über zur Darstellung der ganzen Funktionen durch unendliche Produkte und der meromorphen als Quotient zweier ganzen Funktionen (Weierstraß' Abhandlung von 1876). Ohne Benützung dieses

Digitized by Google

Satzes wird dann im § 10 die Verallgemeinerung der Partialbruchzerlegung nach Mittag-Leffler vorgeführt und erwähnt, wie man auch hier zu Weierstraß' Satz gelangen kann.

Im § 11 werden diese Darstellungen zu verallgemeinern gesucht auf Funktionen mit mehr als einer wesentlich singulären Stelle und zu dem Behufe der Mittag-Lefflersche Satz entwickelt zur Bildung von Funktionen, die in den Punkten einer isolierten Menge in vorgeschriebener Weise unendlich werden und außer diesen und ihren Häufungsstellen keine singulären Stellen besitzen. Nachdem noch aus diesem Satze die Verallgemeinerung der Lagrangeschen Interpolationsformel durch Mittag-Leffler gezogen wurde, wird nun der Satz Weierstraß' bewiesen, daß zu jedem zweidimensionalen Bereiche eindeutige Funktionen existieren, die in ihm analytisch sich verhalten und jeden Randpunkt zur singulären Stelle haben. Im Schlußparagraphen (§ 14) wird noch kurz über die Entwicklung der Funktionen nach rationalen Funktionen (auf Grund einer Arbeit Runges) referiert. Die späteren Arbeiten Mittag-Lefflers über die Darstellung der Funktionen sowie die von Borel etc. wurden, offenbar weil außerhalb des Rahmens liegend, nicht einbezogen. Im folgenden zwölften Kapitel werden die elementaren Funktionen, die zumeist aus der Arithmetik und Geometrie erklärt werden, rein analytisch behandelt. Den Ausgangspunkt bildet hiebei der Log, der durch das Integral definiert wird; aus ihm ergibt sich sodann die Potenz und die Exponentialfunktion. Die trigonometrischen Funktionen und ihre Eigenschaften gewinnt der Verfasser aus der Differentialgleichung. Am Schlusse des Kapitels (§ 8 und § 9) gibt der Verfasser eine Zusammenstellung der verschiedenen Definitionen für die elementaren Funktionen und kommt abermals auf die Entwicklung der einfach periodischen Funktionen in unendliche Produkte, die er jetzt ohne Benützung der Eigenschaften der periodischeu Funktionen im komplexen Gebiete vornimmt.

Das letzte, sehr interessante Kapitel des dritten Abschnittes, das dreizehnte des ganzen Werkes, hat zum Gegenstande das logarithmische Potential. Es befaßt sich zunächst im § 1 mit den physikalischen Grundlagen, bespricht verschiedene physikalische Probleme, die auf die Laplacesche Differentialgleichung führen, und gibt hierauf im § 2 spezielle Beispiele von Strömungen. Die nun folgenden allgemeinen Sätze über das logarithmische Potential teilt der Verfasser in drei Gruppen: 1. solche, welche sich direkt aus der Laplaceschen Differentialgleichung ergeben (§ 3) (Mittelwertsatz; Satz vom Max. Min.; Eindeutigkeitstheorem, Invarianz einer harmonischen Funktion); 2. die sich (§ 4) aus Integraldarstellungen, insbesondere dem Poissonschen Integral, ergeben (von dem der Verfasser auch eine sehr einfache Ableitung nach Bôcher bringt), und 3. solche, die aus der Reihenentwicklung des Poissonschen Integrals fließen (§ 5). Der folgende § 6 befaßt sich mit der Fortsetzung einer harmonischen Funktion über eine analytische Kurve hinaus; § 7 enthält den Satz über die Niveaukurven der Greenschen Funktion und § 8 einige kurze Bemerkungen über die Beziehungen zwischen Potential- und Funktionentheorie. Im § 9 wird die von Riemann gestellte Aufgabe: zwei beliebige, einfach zusammenhängende Bereiche eindeutig und konform aufeinander abzuleiten, besprochen. Diese Aufgabe wird zunächst für den Fall behandelt, daß das Innere des einen Bereiches auf das Innere des Einheitskreises abgebildet werde, wenn die zum ersten gehörige Greensche Funktion

Digitized by Google

gegeben ist. Nach Formulierung des Existenztheorems (im § 10) und der allgemeinen Randaufgabe wird nach einer kurzen Bemerkung über die von Riemann befolgte Methode und den Einwand Weierstraß' gegen das Dirichletsche Prinzip im § 11 das alternierende Verfahren auseinandergesetzt. Auf Grund desselben wird dann im § 12 die Randwertaufgabe des § 10 für einen beliebigen, von analytischen Kurven begrenzten Bereich gelöst. Die hiemit erledigte spezielle Aufgabe, ein Kreisbogendreieck mit nicht verschwindenden Winkeln auf die Halbebene konform abzubilden, wird nur im § 13 für Kreisbogendreiecke mit verschwindenden Winkeln behandelt. Im § 14 wird sodann die vollständige Lösung des schon im § 9 erörterten Riemannschen Problems mit den nötigen Beschränkungen gegeben. Von den beiden letzten Paragraphen enthält § 15 den Picardschen Satz über ganze Funktionen und § 16 einige Bemerkungen über die Uniformisierung analytischer Funktionen, über rationale Kurven und solche vom Geschlechte 1.

Bei dem Namen, den sich der Verfasser in der mathematischen Welt erworben hat, ist es wohl überflüssig, das Werk noch besonders zu empfehlen. Er bürgt dafür, daß es mit voller Beherrschung des Stoffes geschrieben ist und jeder Beweis den Anforderungen an Strenge und Präzision in vollem Maße genügt, die man heute an ein mathematisches Werk zu stellen sich gewöhnt hat.

Vorlesungen über Variationsrechnung. Von Oskar Bolza. Umgearbeitete und stark vermehrte deutsche Ausgabe der „Lectures on the calculus of variations" desselben Verfassers. In drei Lieferungen. Erste Lieferung. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1908.

Den Grundstock des Werkes bilden, wie schon aus seinem Titelblatte hervorgeht, die „Lectures", deren schon bei ihrem Erscheinen hier rühmliche Erwähnung geschah, doch wird es, wie schon aus der ersten vorliegenden Lieferung und der Ankündigung über die beiden anderen geschlossen werden darf, in Form und Inhalt sich nicht unwesentlich von ihnen unterscheiden. Schon der Umfang der ersten Lieferung deutet hierauf hin. Er ist fast der gleiche wie der der Lectures, bringt aber trotzdem nicht deren ganzen Inhalt, da es zweckmäßig erschien, neue Kapitel und Betrachtungen einzuschieben, die weit größeren Raum einnehmen als die ausgeschiedenen und der zweiten Lieferung zugewiesenen Materien. Aber auch in den beibehaltenen sind so vielfache Veränderungen, teils Ergänzungen, teils Verbesserungen, vorgenommen worden, daß sie als ganz neue anmuten.

Die zweite Lieferung soll nach der Ankündigung des Verfassers den Fall variabler Endpunkte, die Knesersche Theorie, diskontinuierliche Lösungen und das absolute Extremum behandeln; endlich die dritte das isoperimetrische und Lagrangesche Problem und die Doppelintegrale.

Die vorliegende erste Lieferung kann als in jeder Beziehung mustergültig erklärt werden. In ihr ist jede einschlägige Arbeit (nicht nur die unmittelbar der Variationsrechnung angehörigen, sondern auch die angrenzender Disziplinen) von den ältesten bis zu den jüngsten aufs sorgfältigste berücksichtigt und verarbeitet, der Stoff übersichtlich gegliedert, die Darstellung bei aller Strenge und Schärfe durchwegs klar, leicht und gefällig. Kurz, das Buch steht ganz auf der Höhe der Wissenschaft und der Anforderungen, die man

Digitized by Google

gegenwärtig an ein mathematisches Werk stellt. Wenn auch die späteren Lieferungen sich auf dem Niveau dieser ersten befinden — und dafür bürgt der Name des Verfassers — so wird die mathematische Literatur um ein kostbares Werk bereichert sein. *G. v. E.*

Lehrbuch der Perspektive. Von Dr. Ferdinand Meisel. Zum Gebrauche am mittleren und höheren technischen Lehranstalten, Kunstgewerbe- und Kunstschulen sowie bei eigenem Studium. Mit 244 Abbildungen im Texte. IV + 221 S. 8°. Seemann & Co., Leipzig 1908.

In einem besonderen Lehrbuche der Perspektive, das auch die stereographische und gnomonische Kartenprojektion sowie die Abbildung auf krummen Bildflächen bespricht, muß man doch voraussetzen, daß die wichtigste Aufgabe der Perspektive, die Konstruktion des Bildes eines durch seine Maße gegebenen Objektes, ausführlich und erschöpfend behandelt ist. Nun findet sich diesbezüglich nur die Methode mit Benützung des umgelegten Grundrisses; die wichtige Anwendung des Teilungspunktes zum perspektivischen Auftragen gegebener Strecken ist nicht einmal erwähnt. Im Vorworte ist bemerkt, daß jene Konstruktionen besonders berücksicktigt sind, bei denen es darauf ankommt, ohne Kenntnis der wirklichen Maße ein in sich richtiges Bild herzustellen; leider sind die betreffenden Erklärungen fehlerhaft. S. 17 heißt es: „Macht man über die Höhenlage der Grundebene keine Annahme, so kann man vier Fluchtpunkte von vier horizontalen Richtungen beliebig wählen", und S. 21: „Ist aber die Grundlinie schon angenommen worden, so ist die Lage des Auges schon durch zwei Fluchtpunkte, die zwei gegebenen Richtungen entsprechen, bestimmt." Nun übt aber die Lage der Grundlinie auf die Bestimmbarkeit der Lage des Auges gar keinen Einfluß und es dürfen nicht die Fluchtpunkte für vier horizontale Richtungen beliebig gewählt werden. S. 37 heißt es, daß die Fluchtpunkte von drei zueinander normalen Richtungen ganz beliebig angenommen werden können; dabei ist offenbar nur vergessen worden, zu erwähnen, daß diese drei Fluchtpunkte kein stumpfwinkliges Dreieck bilden dürfen. Im Vorworte ist betont, daß das vorliegende Buch ein Hauptgewicht auf die Begründung der angegebenen Konstruktionen legt; da muß man sich wohl über so unklare Erläuterungen wie jene für die Konstruktion des Bildes einer Kugel (S. 77), wundern oder darüber, daß an manchen Stellen die Begründung vollständig fehlt. S. 57 wird eine Ellipsenkonstruktion, welche als die vollkommenste bezeichnet ist und also doch dem Autor wichtig erscheint, ohne jede auch nur rechnerische Begründung hingestellt, ebenso S. 103 bei der perspektivischen Darstellung einer Hohlkehle eine Konstruktion der in der Konturkurve auftretenden Spitzen, welche ich übrigens auch für falsch halte.

Wenn in einem Lehrbuche das schwierige Problem der durch Strahlenbrechung an einer Wasseroberfläche erzeugten Bilder behandelt wird, wenn im Vorworte hervorgehoben wird, daß bei Abfassung des Buches in erster Linie an die Lehrer gedacht wurde, dann muß S. 43 der Satz verblüffen: „Die Parabel kann auch als ein Ast einer Hyperbel betrachtet werden, deren anderer Ast in unendlicher Ferne liegt," und das ist nicht bloß ein Versehen; denn S. 99 heißt es in der gnomonischen Projektion bei der Darstellung von zwei

Digitized by Google

Parallelkreisen, deren Projektionskegel identisch sind, von dem einen Parallelkreis, daß er sich als Parabel abbildet, von dem anderen, daß er sich im Unendlichen abbildet!

Im Vorwort ist bemerkt, daß der Schwerpunkt des Buches nicht in den Zeichnungen liegt; das merkt man; denn sie genügen nicht einmal den bescheidensten Anforderungen, die man denn doch an ein Lehrbuch stellen muß, das sich mit einem Zweige der darstellenden Geometrie befaßt.

Graz. *R. Schüßler.*

Elementare Theorie der Wechselströme. Ein Beitrag zur Behandlung der Wechselströme in der Oberstufe der Realanstalten. Von Dr. Franz Hochheim, Oberlehrer. I. Teil. Kommissionsverlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1908. Preis M. 1.50.

Ein recht erfreuliches kleines Schriftchen, welches auch den Studierenden der Physik gute Dienste leisten kann. Aus der Einleitung, die didaktischer Natur ist, sei nur hervorgehoben, daß der Verfasser eine Lanze für die Einführung der Elemente der Differential- und Integralrechnung in den Lehrplan der Mittelschulen bricht. Diese Forderung wird jeder Hochschullehrer der Naturwissenschaften gerne unterschreiben. Die Darstellung erhebt keine hohen Prätensionen, sie ist in jeder Hinsicht gelungen. Sie umfaßt die Theorie und experimentelle Behandlung des einphasigen Stromes. In einem zweiten Teile sollen der Dreiphasenstrom und die elektrischen Wellen behandelt werden. Durch Hinzufügung einer Literaturübersicht — und zwar der Literatur zusammenfassender Darstellungen — hätte der Verfasser seinen Kollegen, für die ja seine Darstellung zunächst berechnet ist, jedenfalls einen Dienst erwiesen. Es ist zu wünschen, daß der zweite Teil mit einer solchen, das ganze in beiden Teilen behandelte Gebiet umfassenden Übersicht versehen wird. *Lampa.*

Die Lagerung der Atome im Raume. Von J. H. van't Hoff. Dritte, umgearbeitete und vermehrte Auflage, mit 24 eingedruckten Abbildungen. 147 Seiten. F. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1908. Geheftet M. 4.50.

„Das Schreiben einer Stereochemie ist jetzt, 1907, eine ganz andere Aufgabe als zur Zeit der vorigen Auflage, 1894. Freute man sich damals über die vielen Tatsachen, die man stützend für die Lehre ins Feld zu führen hatte, so wäre man jetzt auch schon mit etwas weniger Material zufrieden, denn der zeitgemäße Autor muß sich alles Vorhandene zu eigen machen," sagt van't Hoff in der Einleitung zu dieser neuen Bearbeitung seines als klassisch zu bezeichnenden Werkes. „Nur durch die einfachsten Beispiele sind die einzelnen Sätze belegt worden." Dennoch ist ein gewaltiges Material verarbeitet und reichliche Literaturangaben ermöglichen das Weiterverfolgen. Ein größerer Platz wurde der Enzymwirkung und der Stereochemie der anderen Elemente eingeräumt. Den größten Raum (95 Seiten) nehmen aber natürlich immer noch die optischen Isomeren des asymmetrischen Kohlenstoffes ein. Dann folgt ein Kapitel über sterische Erwägungen, die sich nicht auf molekulare Disymetrie gründen, und schließlich, von Dr. Just bearbeitet, die Stereochemie der anderen Elemente in 27 Seiten. Das Buch wird auch in seiner neuen Gestalt dem Fachmann eine genußreiche Lektüre und dem auf Nachbargebieten Tätigen eine vortreffliche Einführung bieten. *K. Prz.*

Digitized by Google

Les Rayons Cathodique. Von P. Villard. 2. Auflage. 107 S. Gauthier-Villars, 1908. Fr. 2.—.

Der Verfasser, der selbst viel auf diesem Gebiete gearbeitet, gibt in diesem Bändchen der Sammlung Scientia eine gute Übersicht über die Erzeugung, die Eigenschaften und die Theorie der für die Entwicklung der Physik so bedeutsamen Kathodenstrahlen. Die übrigen Strahlungen der Entladungsröhren, Röntgen- und Kanalstrahlen und einige noch wenig untersuchte Strahlenarten werden nur insofern berücksichtigt, als sie mit den Kathodenstrahlen in unmittelbarem Zusammenhange stehen. Nicht ganz klar und zwingend erscheint vielleicht die Art, wie der Stoff auf die folgenden 14 Kapitel verteilt ist: 1. Die Apparate, 2. Die elektrischen Erscheinungen in verdünnten Gasen, 3. Die kathodische Emission, 4. Die Elektrisierung der Entladungsröhren, 5. Eigenschaften der Kathodenstrahlen, 6. X-Strahlen, 7. Elektrische Ladung der Kathodenstrahlen, 8. Elektrostatische Wirkungen, 9. Wirkung eines Magnetfeldes auf die Kathodenstrahlen, 10. Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen, 11. Heterogenität der Kathodenstrahlen, 12. Chemische Wirkungen der Kathodenstrahlen, 13. Diverse Erscheinungen, 14. Entstehung der Kathodenstrahlen. Die Darstellung gewinnt an Anschaulichkeit durch photographische Originalaufnahmen des Verfassers, von denen namentlich die spiralige Bahn der Kathodenstrahlen im Magnetfeld als sehr gelungen bezeichnet werden muß.

K. Prz.

Handbuch der Spektroskopie. Von H. Kayser. IV. Bd. 1248 S. Leipzig 1908. Preis, broschiert M. 72.—, gebunden M. 76.—.

Die ersten drei Kapitel behandeln die Absortionsspektren der pflanzlichen und tierischen Farbstoffe. Das vierte über 300 Seiten umfassende Kapitel behandelt die Dispersion und ist von A. Pflüger verfaßt. Nach einer kurzen historischen Einleitung, die Entdeckung der normalen und anormalen Dispersion betreffend, wird eine vollständige und sehr übersichtlich gruppierte Zusammenstellung der verschiedenen Dispersionstheorien gegeben; die Art, wie dies geschieht, ist vorbildlich zu nennen. Der Verfasser gibt keine trockene Aneinanderreihung der einzelnen Theorien, sondern ist bemüht, die Grundvorstellungen jeder einzelnen in sehr anschaulicher Weise zu entwickeln und die Konsequenzen, zu denen sie führen, miteinander zu vergleichen. Von besonderem Interesse ist natürlich der Teil, der die elektromagnetischen Theorien umfaßt, und so geschrieben, daß er auch mit Vorteil als Einführung in dieses Gebiet gelesen werden kann. Der dritte und vierte Abschnitt des Kapitels behandelt die experimentellen Unternehmungen und Arbeitsmethoden.

Im fünften Kapitel kommt wieder Kayser zum Wort und behandelt die „Phosphoreszenz", worunter Lichtaussendung eines Körpers verstanden wird. die eine meßbare Zeit nach Aufhören des Erregers anhält, größere Intensität besitzt als die eines schwarzen Körpers gleicher Temperatur und von keinen sichtbaren chemischen Veränderungen begleitet wird; eine scharfe Trennung von der „Fluoreszenz" ist allerdings nicht immer durchzuführen. In diesem Kapitel tritt natürlich die Beschreibung der Tatsachen in den Vordergrund: Arten der Erregung der Phosphoreszenz, Beeinflussung durch die Temperatur und spektrale Zusammensetzung des ausgesandten Lichtes. Diese Zusammenstellung ist besonders zu begrüßen, da sie die erste ihrer Art ist. Im wesent-

Digitized by Google

lichen gilt dasselbe vom Schlußkapitel, in dem H. Konen in sehr ausführlicher Weise (es nimmt etwa ein Drittel des ganzen Bandes ein) die Fluoreszenzerscheinungen behandelt. Wie verbreitet diese in Lehrbüchern so stiefmütterlich behandelte Erscheinung ist, zeigt das Verzeichnis der fluoreszierenden Substanzen, das in über hundert Seiten das Werk beschließt. *Bed.*

Onoranze al Prof. Alfonso Sella.

Am 25. November 1907 starb in Rom der Professor der theoretischen Physik Alfonso Sella im Alter von bloß 42 Jahren. Das vorliegende Heft berichtet über die Trauerfeier, bei welcher der Präsident Vito Volterra, der Rektor der Universität Rom Alberto Tonelli, dann Oreste Mattirolo als Vertreter der Universität Turin, Ernesto Pascal als Vertreter Neapels kurze Reden hielten und Antonio Garbasso eine Gedenkrede hielt sowie Pietro Blaserna sprach. Auch der Unterrichtsminister Luigi Rava hielt dem Verewigten einen Nachruf. Neben allen diesen Reden findet sich in dieser Publikation ein Verzeichnis der wissenschaftlichen Arbeiten Sellas sowie das Bild der für ihn aufgestellten Büste. *St. M.*

Mathematisch-physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende. Herausgegeben von E. Jahnke, Prof. a. d. kgl. Bergakademie zu Berlin. Verlag von G. B. Teubner in Leipzig und Berlin, 1908.

E. Jahnke hat es unternommen, eine systematische Sammlung mathematisch-physikalischer Schriften für den speziellen Bedarf der Ingenieure und Techniker herauszugeben, die den Zweck verfolgt, dem Ingenieur, welcher bereit ist, sich in ein Spezialgebiet zu vertiefen, durch kurzgefaßte Darstellungen mathematisch nicht allzu schwierige Behelfe zu bringen, die es ihm ermöglichen sollen, Theorien, die für die Entwicklung der modernen Technik bedeutungsvoll geworden sind, in aller Strenge, aber dabei doch entkleidet allen zu weit führenden Beiwerkes kennen zu lernen. Drei recht hübsch ausgestattete Monographien liegen bisher vor:

Nr. 1. Einführung in die Theorie des Magnetismus. Von Dr. Richard Gans, Privatdozent a. d. Universität Tübingen. VI + 110 S. mit 40 Textfiguren. Preis M. 2.40.

In den ersten zwei Kapiteln gelangen wesentlich die magnetischen Eigenschaften des Äthers zur Diskussion: Die magnetische Feldstärke, ihre Definition und Messung; Felddarstellungen; die Maxwellschen Gleichungen; die Potentialtheorie mit ihren Anwendungen. Im dritten Kapitel werden die ferromagnetischen Körper, mit den Eigenschaften der Hysteresis, den Magnetisierungskurven etc., im vierten Kapitel die magnetische Energie und spezielle Fälle besprochen.

Die Darstellung ist überall modern, präzise, reichhaltig, ohne Weitschweifigkeiten, wie dies bei einem Autor, der selbst sehr erfolgreich auf magnetischem Gebiete als Forscher tätig ist, erwartet werden durfte. Die Anforderungen an mathematische Kenntnisse sind sehr geringe, die Vektoranalysis wird nur sehr sparsam angewendet.

Das selbstgesteckte Ziel hat der Verfasser zweifellos erreicht.

Digitized by Google

Nr. 2. Elektromagnetische Ausgleichungsvorgänge in Freileitungen und Kabeln. Von Karl Willy Wagner. Mit 23 Textfiguren. 109 S. Preis M. 2.40.

Hier wird ein Problem behandelt, das fast ganz der elektrotechnischen Erfahrung seine Aufstellung verdankt. Außer Heavisides Theorien findet sich auch in der physikalischen Literatur keine entsprechende Darstellung. Neben den Ingenieuren werden es demnach insbesondere auch die Physiker begrüßen, hier eine ausführlichere Behandlung eines fruchtbar gewordenen Gebietes zu finden. Der Inhalt gliedert sich nach einer kurzen allgemeineren Einleitung in die Aufstellung der bezüglichen Differentialgleichungen; Besprechung der Ladung einer am Ende offenen Leitung mit konstanter Spannung; die Ladung der am Ende offenen Leitung mit Wechselstrom; die Ausbreitung einer zu Anfang willkürlich verteilten Ladung über eine beiderseits offene Leitung; Ausgleich einer willkürlich verteilten Spannung über einen Ohmschen Widerstand; die freien Schwingungen bei der plötzlichen Unterbrechung eines Kurzschlusses; Erweiterung der Theorie; die Entladung der Leitung über eine am Ende angeschlossene Drosselspule; die freien Schwingungen beim Ausschalten der induktiv belasteten Leitung; das Verhalten von zwe verschiedenen in Reihe geschalteten Leitungen; über den Einfluß der Veränderlichkeit des effektiven Widerstandes der Leitung mit der Frequenz.

Nr. 3. Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. Von Dr. Clemens Schaefer, Privatdozent a. d. Universität Breslau. Mit 32 Textfiguren. VIII + 174 S. Preis M. 3.40.

In diesem von einem trefflichen Bilde Maxwells begleiteten Hefte wird eine klare und einfache Wiedergabe der genannten Theorie gefunden. Es sollte für den Leser an erster Stelle stehen, da er hier, wie es der Inhalt anzeigt, eine grundlegende Einleitung in die Kenntnis der elektrischen Vorgänge erhält. Im Anschlusse an die historische Entwicklung werden der Reihe nach behandelt: Elektrostatik; Magnetostatik; der elektrische Strom und sein Magnetfeld; die Induktion und die elektrischen Wellen.

Die Darbietung ist durchwegs einfach und korrekt, Anwendung von Vektoranalysis ist vermieden.

Mit diesen drei von vortrefflichen Mitarbeitern geschaffenen Werkchen hat der Herausgeber seine Sammlung in ausgezeichneter Weise eingeführt.

St. M.

Elektrochemie II. Experimentelle Elektrochemie, Meßmethoden, Leitfähigkeit, Lösungen. Von Dr. Heinrich Danneel. Mit 26 Figuren und mehrern Tabellen. (Sammlung Göschen Nr. 253.) Leipzig 1908.

Im ersten Bande hatte Danneel den theoretischen Teil der Elektrochemie nebst einigen einschlägigen physikalisch-chemischen Kapiteln gebracht, der vorliegende zweite behandelt zuerst die Meßmethoden zur Ermittlung der diversen elektrochemischen Größen, dann die Folgerungen und Schlüsse aus den experimentellen Ergebnissen sowie die Erweiterungen der Elementartheorie. An physikalischen Kenntnissen wird so gut wie gär nichts vorausgesetzt. Die Regeln der Stromverzweigung werden ausführlich besprochen, um die Wheat-

Digitized by Google

stonsche Brückenanordnung zu erklären. Im Texte steht eine Reihe von technischen Ratschlägen, die derjenige, der in elektrochemische Arbeiten eingeführt werden will, ebenso gerne lesen wird wie die ausgerechneten numerischen Beispiele bei Gelegenheit der Besprechung von Überführungsmessungen. Da im folgenden auch höhere Kapitel behandelt werden, so die Eigenschaften nichtwässeriger Lösungen, und im Abschnitt „Elektrochemie der Lösungen" eingehend über Dissoziationskonstante, Komplexbildung, Hydrolyse, die Indikatortheorie u. s. w. referiert wird, kann das vorliegende zweite Bändchen im Anschluß an das erste bestens zur Einführung auch in die modernste Elektrochemie benützt werden. *L.*

Das Prinzip der Erhaltung der Energie. Von Dr. Max Plank, Professor der theoretischen Physik an der Universität Berlin. Von der phil. Fakultät Göttingen preisgekrönt. Zweite Auflage. B. G. Teubner Berlin und Leipzig. 1908 XVI + 278 S. (Preis M. 6.—.)

Als sechster Band der Sammlung „Wissenschaft und Hypothese" erscheint dieses bekannte Buch in neuem Gewande, aber mit fast unverändertem Inhalt. Es dürfte fast beispiellos dastehen, daß es möglich ist, ein physikalisches Werk, das 1887 zuerst erschien, nach über zwanzig Jahren noch nahezu gleichlautend aufrechtzuerhalten, und dies allein bedeutet eine so glänzende Kritik für das Gebotene, daß jede weitere als überflüssig erscheinen muß. *St. M.*

Grundlinien einer Kritik und exakten Theorie der Wissenschaften, insbesondere der mathematischen. Von Hugo Dingler. Th. Ackermann, München 1907. 76. S.

Eine sehr lesenwerte Schrift. Da sie sich aber nicht eigentlich, wie man nach dem Titel vermuten könnte, mit den Grundlagen der Mathematik beschäftigt, können wir hier nicht näher auf ihren Inhalt eingehen. Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, zu zeigen, wie vom „Voraussetzungslosigkeitsstandpunkt" (kurz mit V. St. bezeichnet) aus — das ist der Standpunkt, auf dem uns nur das unmittelbar Wahrgenommene, ohne jede Begriffsbildung und ohne jede kausale Verknüpfung gegeben ist — die Wissenschaften aufgebaut werden könnten. Willkürliche Festsetzung spielt dabei eine große Rolle, geregelt durch das „Exhaustionsprinzip": Haben wir vom V. St. aus einmal etwas festgesetzt, so wollen wir alles Weitere stets nur so festsetzen, daß die früheren Festsetzungen gültig bleiben. Das Kausalitätsprinzip erscheint in Form der Festsetzung: Es soll keine Erscheinung geben, die unabhängig von allen anderen ist. Auf diesem Wege erreicht der Verfasser die absolute Gültigkeit aller Gesetze, ihre Unwiderlegbarkeit durch Erfahrung und Experiment. Ich glaube, daß sich gegen den Standpunkt des Verfassers vieles einwenden läßt; zwar seine Deduktionen mögen korrekt sein, aber sein Kausalgesetz ist nicht das unsere, seine „apriorischen" Gesetze nicht unsere Naturgesetze, die Wissenschaft, zu der er den Grund legt und die gewiß widerspruchsfrei ist, hat mit den uns interessierenden Wissenschaften nicht viel gemein. Trotz meines abweichenden Standpunktes möchte ich diese interessante Broschüre wärmstens empfehlen und auch auf die darauf bezüglichen Bemerkungen von G. Hessenberg (Jahresber. Math. Ver. 17, S. 45) und Dinglers Antwort (ebenda S. 267) hinweisen. *Hans Hahn.*

Digitized by Google

Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques. Par Edouard Fouët. Deuxième édition, etièrement refondue. Tome I: Les fonctions en général. Paris, Gauthier-Villars, 1907.

Daß das Werk nach so kurzer Zeit in neuer Auflage erscheint, ist wohl der beste Beweis, daß hier die vielmißbrauchte Phrase, es komme einem dringenden Bedürfnisse entgegen, ganz am Platze ist. Um diesem noch besser Rechnung zu tragen, sah sich der Verfasser veranlaßt, die erste Auflage vollständig umzuarbeiten und den Stoff wesentlich zu vermehren, einzelne Kapitel um mehr als ihren früheren Umfang. Wegen dieser Vermehrung erschien es zweckmäßig, die Einleitung der ersten Ausgabe in der neuen Auflage als einen Band für sich, den vorliegenden, abzutrennen. Nach einer kurzen Einleitung über den Begriff der Zahl und Funktion wird der Begriff der Grenze gegeben, die wichtigsten Funktionsklassen (diskontinuierliche, integrable, mit beschränkter Schwankung etc.) und schließlich die Definition der analytischen Funktionen. Die weiteren Bände werden dann, nach Absicht des Verfassers, eine genaue und eingehende Darstellung dieser Theorien bringen.

Nach dem vorliegenden Bande zu schließen, wird die neue Auflage von der ersteren sich nicht nur durch eine größere Stoffülle unterscheiden, sondern auch durch größere Strenge und Präzision.

Leçons sur les théories générales de l'analyse. Par René Baire. Tome II: Variables complexes. — Applications géométriques. Paris, Gauthier-Villars 1908.

Der zweite Band, der dasselbe Ziel verfolgt wie der erste und im gleichen Sinne gearbeitet ist, beginnt im vierten Kapitel, dem ersten des Bandes, mit der Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Es wird darin zunächst der Begriff der Ableitung von $f(z)$ unter den älteren Voraussetzungen über $f'(z)$ aufgestellt, hierauf der der holomorphen Funktion und sodann die den über die Differentiation der Funktionen reeller Variablen analogen Sätze für Funktionen komplexer Veränderlichen entwickelt. Es folgt nun der Begriff des Integrals einer holomorphen Funktion, der primitiven Funktion, Differentiation eines Integrals nach einem Parameter, das Cauchysche Randintegral samt Darstellung einer holomorphen Funktion und ihrer Derivierten durch solche Integrale. Es werden hieraus nicht sogleich die weiteren bekannten Folgerungen gezogen, sondern zunächst eingeschoben die elementaren Sätze über einfache und Doppelreihen mit konstanten reellen Gliedern, sodann über Reihen, deren Glieder Funktionen der Veränderlichen sind. Bei dieser Gelegenheit führt der Verfasser den neuen Ausdruck der normalen Konvergenz ein, den er für den Fall gebraucht, daß die konvergente Reihe das Weierstraßsche Kriterium befolgt. Hiebei zeigt sich, daß dieser Begriff insofern ein allgemeiner ist, als jede gleichmäßige Reihe sich in eine normal konvergente umbilden läßt. Es folgen auch die bekannten Sätze über Stetigkeit, Differentiation, Integration etc. gleichmäßig konvergenter Reihen und nunmehr wird nach den bekannten grundlegenden Sätzen über Potenzreihen gezeigt, daß jede Potenzreihe in ihrem Konvergenzkreise holomorph ist, worauf erst die Entwicklung der in einem einfachen Bereiche holomorphen Funktionen in Potenzreihen vorgenommen wird. Die Darstellung wendet sich jetzt den elementaren Funktionen zu: es werden e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\tan z$, $\cot z$, $\log z$, z^m etc. definiert und einige Sätze über sie entwickelt.

Digitized by Google

In einigen kurzen Bemerkungen werden noch die Singularitäten analytischer Funktionen (wesentlich und außerwesentlich singuläre Stelle) und Residuen besprochen und der Begriff der Fortsetzung berührt. Am Schlusse dieses Kapitels wird die Entwicklung einer nach mehreren Veränderlichen holomorphen Funktion gezeigt und die implizite Funktion zweier Veränderlichen in Kürze untersucht.

Mit diesen rein theoretischen Entwicklungen hat sich der Verfasser die Mittel geschaffen, um im folgenden fünften Kapitel die Existenzbeweise und die Fundamentalsätze bezüglich der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen darlegen zu können. Im sechsten Kapitel werden geometrische Anwendungen vorgetragen. (Enveloppen von Kurven in Flächen, Krümmung der Raumkurven, Berührung von Kurven und Flächen, die intriseke Gleichung der Kurven, Asymptoten, Krümmungslinien, developpable Flächen, Regelflächen, aufeinander abwickelbare Flächen, Krümmungsmaß und Geodätische.) Das letzte, sechste, Kapitel behandelt die elliptischen Funktionen. Nach den Hauptsätzen über unendliche Produkte wird vom Produkt für die σ-Funktion gezeigt, daß es eine ganze Funktion sei, und daraus $G(z)$, $p(z)$ und $p'(z)$ abgeleitet.

Auf Grund der Liouvilleschen Sätze über elliptische Funktionen werden dann die Eigenschaften der vorgenannten Funktionen abgeleitet und die Darstellung der elliptischeu Funktionen durch sie gezeigt. Mit einer eingehenderen Betrachtung des Falles reeller Invarianten und der Inversion in diesem Falle samt einer kurzen Bemerkung über die Behandlung vom Geschlechte aus und die Eulersche Gleichung schließt dieser Band.

Es lassen sich auch diesem Bande die gleichen Vorzüge wie dem ersten nachrühmen, doch hätte ein tieferes Eingehen auf einzelne schwierige Fragen im theoretischen Teile seinen Wert erhöht, indem so der Gefahr einer oberflächlichen Auffassung von seiten des unerfahrenen Lesers vorgebeugt worden wäre. Es wird aber auch in der vorliegenden Form dem Anfänger sehr ersprießliche Dienste leisten und ihn rasch mit einigen elementaren Begriffen und Betrachtungsweisen der Funktionentheorie bekannt machen.

Cours d'Astronomie, seconde Partie: „Astronomie Pratique". Par H. Andoyer, Professeur à la Faculté des Sciences, Paris. Librairie H. Hermann & fils, 1909. Prix 10 Fr.

Der erste, die sphärische Astronomie behandelnde Teil des „Cours d'Astronomie" ist in diesen Blättern schon besprochen werden. Die „Astronomie Pratique" weist drei Abschnitte auf, von denen der erste (57 S.) das wichtigste über numerische Rechnung, Interpolation, Fehlerverteilung und die Methode der kleinsten Quadrate enthält.

Der zweite Abschnitt (110 S.) ist der Lehre von den Instrumenten gewidmet; hierin wird nach einer kurzen Beschreibung und Angabe der Verwendung der Hilfsinstrumente (Chronometer, Niveau, geteilter Kreis, Nonius) die allgemeine Theorie des Theodoliten, des Äquatorials, des Meridianinstruments und des Passageninstruments in irgend einem Vertikale gegeben. Die durch zahlreiche in den Text eingeschobene Figuren verdeutlichte analytische Behandlung der hiebei auftretenden Probleme deckt den Zusammenhang auf, welcher zwischen den Koordinaten des beobachteten Objektes und den

Digitized by Google

Lesungen der Hilfsapparate sowie dem Instrumentalfehler besteht. Für jedes der Instrumente werden Belehrungen über die Orientierung, Adjustierung und die Verwendung zu astronomischen Beobachtungen erteilt. Der Aufstellung des Äquatorials hätte wohl etwas ausführlicher besprochen werden sollen. Am Schlusse des zweiten Abschnittes befindet sich eine Abhandlung über den Sextanten, der Notizen über verschiedene Instrumente angereiht sind.

Der dritte Abschnitt (100 S.) wird durch Angabe der für die Bestimmung der Fundamentalkonstanten der sphärischen Astronomie maßgebenden Gesichtspunkte eingeleitet und enthält eine Zusammenstellung der gebräuchlichsten Methoden der geographischen Ortsbestimmung aus astronomischen Beobachtungen bei Benützung der einfachsten Instrumente (Theodolit, Sextant, tragbarer Meridiankreis, Chronometer). Es werden hiebei Beobachtungen und Kombinationen von Beobachtungen der Höhe des Azimuts, des Chronometers, der Änderung der Höhe und des Azimuts verwendet und die Beziehungen zwischen den Unsicherheitsgrenzen der Bestimmungsstücke und denen der Beobachtungen durch Diskussion der entsprechende Differenzialformeln klargelegt. Auf die Probleme von Douwes (Beobachtung zweier Höhen bei bekannter Zwischenzeit) und Gauß (Beobachtung von drei gleichen Höhen bei bekannten Zwischenzeiten) ist besondere Rücksicht genommen. Hieran anschließend folgt eine Auseinandersetzung der wichtigsten Punkte der nautischen Astronomie und des Prinzips der Längenbestimmung aus Beobachtungen des Mondes und der Bedeckung von Sternen durch den Mond. Dem dritten Abschnitte ist als Anhang die Lösung des Problems der Bahnbestimmung aus drei vollständigen Beobachtungen (vornehmlich nach Gauß) beigegeben.

Das Buch ist nach einem wohldurchdachten Plane abgefaßt, bringt bei bescheidenen Ansprüchen an die Vorkenntnisse des Lesers in klarer und präziser Weise ohne Weitschweifigkeit das Wissenswerteste aus dem Gebiete der Instrumentenkunde und der geographischen Ortsbestimmung und erscheint vorzüglich geeignet, Studierenden der Astronomie oder Forschungsreisenden bei der Ausbildung in der praktischen Astronomie als Führer zu dienen.

H.

Neues System zum technischen Kopfrechnen. Von J. Bojko und E. Wendling. I. Heft. Die Quadratbildung der Zahlen 1 bis 1250. Zürich, Speidel, 1907. M. 0·50.

Anwendung der Formeln $(a+b)^2=(a+b+b)\,a+b^2$ für $a=10, 20$; $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ für $a=50, 150, 250$; $a^2=(a-b)\,(a+b)+b^2$ für $a+b=100$ nebst einer Anzahl von Beispielen. *Dr. Schrutka.*

Neue Rechentafeln für Multiplikation und Division mit allen ein- bis vierstelligen Zahlen. Von Dr. J. Peters, Berlin. Druck und Verlag von Georg Reimers, Berlin 1909. (M. 15.)

Die Tafel gibt die Produkte der sämtlichen vierstelligen Zahlen mit allen ein- und zweistelligen auf 1000 Halbseiten. Die Anordnung ist so getroffen, daß jede Multiplikation und Division mit einer solchen Zahl unter Benützung einer und derselben Halbseite ausgeführt werden kann und die drei Schlußziffern jeder Horizontalreihe nur einmal am Rande angegeben sind.

Der Druck ist deutlich und gefällig, die Ziffernkolonnen durch entsprechende Zwischenräume getrennt, so daß das Auge nicht zu sehr ermüdet.

Digitized by Google

Die neue Ausgabe der Crelleschen Rechentafeln ist für die äußere Einteilung der Seite zum Vorbild genommen worden. Der Preis ist mit Rücksicht auf Umfang und Ausstattung mäßig zu nennen.

Determinanten. Von Paul B. Fischer. Sammlung Göschen 402, geb. 80 Pf.

Eine handliche und leicht faßliche Einführung in die Determinantentheorie wäre sehr wünschenswert gewesen; leider muß von dem vorliegenden Buche gesagt werden, daß es den billigen Anforderungen an eine solche durchaus nicht entspricht. Ist auch die Disposition im allgemeinen und speziell der Hinweis auf den historischen Ansgangspunkt der Determinantentheorie zu loben, so läßt sich doch gegen die Ausführung im Detail vieles einwenden. Ich führe nur an: Die Definition der Kombinationen $k$ter Klasse (S. 14), die umständliche Bestimmung der Anzahl der Permutationen für den Fall gleicher Elemente (S. 15 ff.), die Benennung der Anordnung $n, n-1, \ldots 2, 1$ als inverse Permutationen (S. 18), die Benennung zirkulare Substitution statt der üblichen zyklischen Substitution (S. 22). S. 25 fehlt der Hinweis darauf, daß die quadratische Anordnung der n^2 Größen nach den beiden Indizes wesentlich ist; der Name Matrix, der einige Seiten weiter auftritt, wäre wohl am besten hier anzuführen gewesen; bei dem Beweise der Gleichberechtigung von Zeilen und Spalten einer Determinante (S. 29) vermißt man den Nachweis, daß auch die Vorzeichen der einzelnen Glieder in den beiden Entwicklungen übereinstimmen u. s. w. Auch die Auswahl von besonderen Determinanten als Beispielen kann nicht besonders glücklich genannt wenden, am ehesten noch die im geometrischen Teil. *Dr. Schrutka.*

Ein Rechenschieber mit Teilung in gleiche Intervalle auf der Grundlage der zahlentheoretischen Indizes. Von Dr. Joh. Schumacher. München, J. Lindauersche Buchhandlung, Schöpping, 1909. M. 1.—.

Bei der großen Ähnlichkeit der Theorie der Logarithmen und der der Indizes lag der Gedanke nahe, nach einer ähnlichen mechanischen Verwertung der Indizes zu suchen, wie sie der logarithmische Rechenschieber für die Logarithmen darstellt. Nur verliert hier einer der Hauptvorteile des logarithmischen Rechenschiebers, nämlich seine für ein überaus großes Anwendungsgebiet ausreichende und doch nicht übergroße Genauigkeit, völlig seine Bedeutung. Der Verfasser gibt zwar Wege an, von den Kongruenzen, welche der Schieber seiner Natur nach uns liefern kann, wieder zu Gleichungen zu gelangen, und er hat aus diesem Grunde den allerdings hiefür sehr geeigneten Modul 101 gewählt, aber die praktische Anwendbarkeit dieser Methoden scheint doch ziemlich gering zu sein. Vollends aber vermag ich seine sanguinischen Hoffnungen nicht zu teilen, der Rechenschieber werde sehr gute Dienste im Unterrichte der Volks- und Mittelschulen leisten. Von Einzelheiten möchte ich erwähnen, daß auf Seite 1, 2 absolut kleinster und kleinster negativer Rest. Die Reproduktion der Indextafel auf dem Schieber ist wohl überflüssig, vielleicht sogar diskreditierend, denn der Schieber soll ja diese Tafel ersetzen. Ein Beweis für die Existenz primitiver Wurzeln wäre in der theoretischen Erläuterung wohl am Platze gewesen. *Dr. Schrutka.*

Digitized by Google

Gruppen- und Substitutionentheorie. Von Dr. Eugen Netto. Leipzig, Göschen, 1908 [Sammlung Schubert LV]. Gbd. M. 5·20.

Das Buch behandelt die Theorie der diskontinuierlichen Gruppen mit Ausschluß der Anwendungen. Das erste Kapitel geht von der Definition der abstrakten Gruppe aus, wobei die Ausführbarkeit der Umkehrung der Komposition bei unendlichen Gruppen nicht gefordert wird, so daß die von Séguier „semigroupes" genannten Gebilde ebenfalls als Gruppen erscheinen. Als Beispiele werden sogleich die Gruppen von Substitutionen eingeführt. Der Beweis, daß jede Transposition die Klasse der Permutation ändert, wird abweichend von anderen Darstellungen durch den Schluß von n auf $n+1$ geführt. Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit der Gruppentafel, hier Cayleysches Quadrat genannt. Leider ist die Webersche Anordnung, bei welcher die Hauptdiagonale alle Einheitselemente enthält, ganz außer acht gelesen. Die folgenden Kapitel handeln von den Teilen einer Gruppe, der Transformation und der Zusammensetzbarkeit von Gruppen. Die aus mehreren Elementen (oder Gruppen) $A, B \ldots$ entstehende Gruppe wird mit $\{A, B, \ldots\}$, der größte gemeinsame Teiler (das bequeme Wort Durchschnitt ist vermieden) mehrerer Gruppen $A, B, \ldots$ mit $\{A, B, \ldots\}$ bezeichnet, was wohl bei komplizierteren Ausdrücken unübersichtlich werden dürfte, wenn auch die Reziprozität in den beiden Bezeichnungen gut ausgedrückt erscheint.

Vortrefflich ist die Bezeichnung einer in G enthaltenen Gruppe, welche ihrerseits H enthält, als Zwischengruppe von H in G. Nach einem den Abelschen Gruppen gewidmeten Kapitel, in welchem auch auf die Hamiltonschen Gruppen hingewiesen wird, geht der Verfasser zur Darstellung der Sätze von Sylon und Frobenius über, welche trotz ihres abstrakten Charakters elementar genug dargestellt werden, um in den Rahmen des Werkes zu passen. Das folgende, achte, Kapitel behandelt die Auflösbarkeit der Gruppen; es sind hier auch die neueren Resultate von Burnside und Frobenius angeführt. Die vier letzten Kapitel behandeln ausführlich die Theorie der Substitutionengruppen und ihre analytische Darstellung. Als entschiedener Mangel des Buches muß das gänzliche Fehlen von Literaturangaben (selbst dort, wo Sätze ohne Beweis angeführt werden) bezeichnet werden. Im übrigen wird es wohl als einführendes Werk gute Dienste leisten. *Dr. Schrutka.*

Récréations Mathématiques et Problèmes des temps anciens et modernes. Par W. Rouse-Ball. Deuxième édition française par J. Fitz-Patrick. Deuxième partie. Paris, A. Hermann, 1908. 5 Fr.

Der vorliegende zweite Teil behandelt geometrische Probleme, darunter geometrische Trugschlüsse, den Vierfarbensatz, Parkettierungen, Probleme der erschwerten Überfahrt, Probleme des Schachbrettes, ferner mechanische Probleme, vom Paradoxon des Zeno bis zur Betrachtung des Vogelfluges, dann verschiedene Spiele, das Fünfzehnerspiel, den Baguenaudier, die magischen Quadrate, Problem der Durchlaufung von Figuren in einem Zuge, insbesondere das Königsberger Problem, das Dodekaederspiel, den Rösselsprung, endlich die drei berühmten Probleme der Verdopplung des Würfels, der Trisektion des Winkels und der Quadratur des Kreises. *Dr. Schrutka.*

Digitized by Google

La Formule $\rho = re^{i(\psi + i\varphi)}$ interprétée géométriquement dans l'espace de manière à prendre la forme d'un quaternion. Par J. H. Peek.

Ein Versuch, 1, i, i^i, i^{i^i} als vier Quaternioneneinheiten aufzufassen.

Dr. Schrutka.

Magic Squares and Cubes. By W. S. Andrews. Chicago, Court Publishing Co. 1908.

Das Werk stellt sich als Sammlung von mehreren Aufsätzen über die magischen Quadrate dar. Andrews bespricht die magischen Quadrate und die magischen Kuben mit Rücksicht auf ganz spezielle Bildungsmethoden, Paul Carus besondere Arten: die Franklinschen und ältere, z. B. chinesische magische Quadrate. L. S. Trierson versucht eine mathematische Behandlung der Frage und gelangt zu Anzahlbestimmungen für die Seitenlänge 3, 4, 5. Einige weitere Abschnitte enthalten nebensächliche und abseits liegende Betrachtungen, sogar Spielereien: Tabellen, wie $1 \cdot 9 + 2 = 11$, $12 \cdot 9 + 3 = 111$ u. s. w. Die schöne Ausstattung des Werkes wird durch die unscheinbaren Figuren mit den handschriftlichen Ziffern in manchen Kapiteln einigermaßen beeinträchtigt.

Dr. Schrutka.

Arithmétique Graphique. Par Gabriel Arnoux. Les espaces arithmétiques, leur transformations. Paris, Gauthier-Villars, 1908. (3 Fr.)

Unter „espaces arithmétiques" versteht der Autor Zahlengitter in einem Raum von beliebig vielen Dimensionen, unter „Espaces modulaires" solche Zahlengitter, bei welchen die einzelnen Koördinaten nach (gleichen oder verschiedenen) Moduln zu nehmen sind. Es werden die Grundbegriffe der analytischen Geometrie auf diese „espaces" übertragen. Als Anwendung wird eine Behandlung des Eulerschen Problems der 36 Offiziere gegeben. *Dr. Schrutka.*

Introduction to Higher Algebra. By Maxime Bôcher. New York, Macmillan Co, 1907. $ 1·90.

Das Buch, das für Studenten, welche bereits Infinitesimalrechnung und etwas Geometrie betrieben haben, bestimmt ist, behandelt die elementaren Teile der höheren Algebra. Der Stoff ist gegen die Analysis hin sehr scharf abgegrenzt, so scharf, daß sogar der Fundamentalsatz der Algebra nur ohne Beweis zitiert wird. Dagegen ist die Begrenzung gegen die analytische Geometrie um so weniger genau durchgeführt, vielmehr werden zur Illustration der Kapitel über ganze Funktionen, lineare Abhängigkeit, Matrizen und ihren Rang, bilineare und quadratische Formen, Invarianten geometrische Betrachtungen in reichstem Maße herangezogen. In den ersten vier Kapiteln werden die ganzen Funktionen und die Determinanten kurz behandelt, in den folgenden beiden genauer auf die Theorie der Matrizen eingegangen. Bei Einführung des Gruppenbegriffes wird genau zwischen *sets* (Klassen, wie sie etwa in der Algebra der Logik definiert werden), *systems* (Klassen mit einer oder mehreren Kompositionen) und *groups* (Gruppen) unterschieden. Hieran schließt sich sogleich die Einführung des Invariantenbegriffes. Die Definition des vollen Invariantensystems weicht sehr erheblich von der üblichen ab. Die Kapitel VIII—XIII bringen eine ausführliche Darstellung der Theorie der bilinearen

Digitized by Google

und quadratischen Form und der Systeme von solchen. In den folgenden drei Kapiteln wird die Theorie der ganzen Funktionen fortgesetzt und die Begriffe Teiler, Irreduzibilität, größter gemeinsamer Teiler, Resultante eingeführt. Kapitel XVII enthält wieder eine übrigens nicht weit reichende Ausführung der Invariantentheorie. Kapitel XVIII und XIX sind der Theorie der symmetrischen Funktionen einer Reihe von Größen und einer Reihe von Größenpaaren gewidmet. Das XX. Kapitel enthält eine sehr gute Darstellung der Theorie der Elementarteiler; dieses Wort wird hier übrigens nur in dem Sinne von „linearer (einfacher) Elementarteiler" gebraucht, während die zusammengesetzten Elementarteiler als invariante Faktoren bezeichnet werden, dagegen wird ein Vorschlag, den Namen „invarianter Faktor" überhaupt für Elementarteiler einzuführen, (wohl mit Recht) abgelehnt. Die beiden letzten Kapitel handeln von der Äquivalenz von Paaren bilinearer und quadratischer Formen. Wie bei den meisten in englischer Sprache abgefaßten Büchern bilden auch hier die zahlreichen Übungsaufgaben (zum Teil mit einer Andeutung der Lösung) eine höchst schätzenswerte Bereicherung des Inhalts. *Dr. Schrutka.*

Sammlung Göschen Nr. 81. Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen. Von Prof. Dr. H. Schubert. III., verbesserte Auflage. Leipzig, G. J. Göschen, 1908.

Die Verbesserungen dieser Tafeln, die sich sowohl für Unterrichtszwecke als auch im Dienste des praktischen Rechnens als sehr brauchbar erwiesen haben, beziehen sich hauptsächlich darauf, daß nunmehr log sin im Intervall von 30° bis 90° und log tg im Intervall von 15° bis 75° von Minute zu Minute fortschreiten.

Auch die anhangsweise gegebenen Tabellen sind reichhaltiger geworden.

Nicht übel ist das Verfahren, log und Mantissen hellbraun, alle übrigen Zahlen aber blau zu drucken. Manchem Versehen mag hiedurch, besonders bei langandauerndem Gebrauche, vorgebeugt werden. *J. N.*

Sammlung Göschen Nr. 374. Theoretische Physik IV. Von Prof. Dr. Gustav Jäger. Leipzig, G. J. Göschen, 1908.

Das vorliegende Bändchen bildet den Abschluß- bezw. Ergänzungsband der Theoretischen Physik der genannten Sammlung. Es enthält einen Abriß der elektromagnetischen Lichttheorie, der Strahlungstheorie und der Elektronik nebst einem Anhang, der die Elastizitätstheorie behandelt.

Wie in den drei vorhergehenden Bändchen, hat auch hier der Verfasser es zu stande gebracht, auf knapp bemessenem Raume, durchwegs auf dem modernsten Standpunkte stehend, ein Lehrbuch zu geben, das in seiner Klarheit und Prägnanz manch dickleibiges Kompendium in Schatten stellt.

J. N.

Elektrotechnische Messungen und Meßinstrumente. Von Gustav Wernicke, Ing. Mit 92 Abb. VIII + 138 S. Verlag von F. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1909. M. 5·—.

In diesem 13. Hefte der „Elektrotechnik in Einzeldarstellungen" (Herausgegeben von Dr. G. Benischke) werden die elektrotechnischen Maßeinheiten und Normalien, Allgemeines über Meßinstrumente, Strom- und Spannungs-

Digitized by Google

messung für Gleich- und Wechselstrom, die Messung von Leistung, Widerstand, Induktionskoeffizienten und Kapazitäten, magnetische Messungen und eine Aufzählung der Zählersysteme in knapper, hübscher Form, dem Bedürfnisse des praktischen Ingenieurs entsprechend, behandelt. Zahlreiche meist gute Figuren helfen zur Veranschaulichung des Vorgebrachten. Schematische Skizzen wären wohl allgemein mangelhaften Photogrammen vorzuziehen. So sieht man in Fig. 4 die Dämpfungsvorrichtung nicht, wenn man die Konstruktion nicht ganz genau kennt. Elektrostatik und Magnetismus werden nur relativ flüchtig besprochen. *St. M.*

Aus der Werkstatt großer Forscher. Allgemeinverständliche, erläuterte Abschnitte aus den Werken hervorragender Naturforscher aller Völker und Zeiten. Bearbeitet von Dr. Friedrich Dannemann. Dritte Auflage des ersten Bandes des „Grundriß einer Geschichte der Naturwissenschaften". Mit 62 Abbildungen im Text, größtenteils in Wiedergabe nach den Originalwerken, und einer Spektraltafel. Leipzig, Verlag von Wilhelm Engelmann, 1908. Gr.-Oktav (XII, 430 Seiten). Preis geh. 6 M., in Leinen geb. 7 M.

Daß das vorliegende Werk nach kurzer Zeit in dritter Auflage erscheint, zeugt von seiner Brauchbarkeit und von dem steigenden Interesse an der Entwicklungsgeschichte der Wissenschaft. Neu aufgenommen wurden folgende Abschnitte: 1. Kepler begründet die neuere Optik; 2. Newton entwickelt die Prinzipien der Naturlehre; 3. Das Auftauchen der ersten klaren Vorstellungen über die Verbrennung und Atmung; 4. Die photometrischen Grundbegriffe; 5. Es werden die experimentellen Grundlagen für die elektromagnetische Theorie des Lichtes gewonnen; 6. Die Entdeckung des Diamagnetismus; 7. Das Protoplasma wird als die Grundlage des organischen Lebens erkannt. *St. M.*

Die Luftelektrizität, Methoden und Resultate der neuen Forschung. Von Dr. Albert Gockel, a. o. Prof. d. Phys. a. d. Univ. Freiburg (Schweiz). Mit 28 Abbildungen. VI + 206 S. Preis M. 6·—. Verlag von S. Hirzel, Leipzig 1908.

Der Verfasser hat selbst regsten Anteil genommen an der Entwicklung unserer Kenntnisse aus diesem Gebiete. Das Werkchen zeugt davon, weiters aber auch von der Objektivität, mit welcher er allen Ergebnissen der anderen Forscher gegenübersteht. Wenn auch bei der großen Zahl der Abhandlungen, die über die einschlägigen Fragen in dem letzten Dezennium erschienen, Vollständigkeit der Literaturangaben kaum erreicht werden konnte, so sind doch alle wesentlichsten Ergebnisse berücksichtigt. Die Gliederung des Stoffes in die elektrische Leitfähigkeit der Atmosphäre, das elektrische Feld der Erde, elektrische Strömungen in der Atmosphäre und die in der Atmosphäre wirkenden Ionisatoren ist eine sachgemäß natürliche. Das zwischengeschobene Kapitel 4 über den Erdstrom steht nur in losem Zusammenhange mit den übrigen. Bezüglich der Gewitter und Polarlichter verweist der Verfasser selbst auf die übrige einschlägige Literatur und es mag hier insbesondere an sein eigenes Buch über die Gewitter erinnert werden. Wenn der Monographie ein Vorwurf zu machen wäre, so könnte er sich lediglich auf die vielleicht manchmal allzu scheue Objektivität erstrecken, nach der selbst Theorien, die nicht mehr ernsthaft in Betracht kommen, noch ziemlich breite Berücksichtigung

Digitized by Google

zuerkannt wird. Dem gegenüber steht als Vorzug des Werkchens die allgemeine Verwendbarkeit; es ermöglicht nicht nur erste rasche Orientiernng über das behandelte Gebiet, sondern enthält überall auch die Anweisung für eingehendes vertieftes Studium. *St. M.*

Schule der Elektrizität. Gemeinverständliche Darstellungen der Elektrik und ihrer Anwendungen nach den modernen Anschauungen und Plaudereien über die neuen Strahlungen. Nach G. Claude (L'electricité pour tout le monde), für Deutschland bearbeitet von Wa. Ostwald. Mit über 400 Abb. u. Tafeln. XII + 579 S. Verlag von Dr. Werner Klinkhardt, Leipzig 1908. Preis M. 8.—.

Der Übersetzer hat es übernommen, das bekannte und gute Buch Claudes nicht nur in die deutsche Sprache zu übertragen, sondern auch — es zu germanisieren. Man kann sagen, daß das letztere Bestreben nicht gar zu großes Unheil gestiftet hat, weil eben der Inhalt im wesentlichsten beibehalten wurde. Die „deutschen" Abbildungen aber, insbesondere die seichten Witze der Randleisten können nur Veranlassung dazu geben, sich über das Buch lustig zu machen. Auch Frl. G. O. mag eine tüchtige Malerin sein, eine Physikerin ist sie aber eben nicht und die farbigen Tafeln enthalten daher nur sehr viel Irreführendes, aber nichts Instruktives.

Einem Buche wie dem Claudes seine französische Eigenart nehmen wollen, heißt es entwerten. *St. M.*

Angewandte Mechanik, ein Lehrbuch für Studierende, die Versuche anstellen und numerische und graphische Beispiele durcharbeiten wollen. Von John Perry, Prof. d. Math. u. Mech. am Royal College of Science, London. Berechtigte deutsche Übersetzung von Ing. Rudolf Schick. Mit 371 Figuren im Text, VIII + 666 S. Leipzig-Berlin. Verlag B. G. Teubner, 1908. Preis M. 18·—.

Das Buch gibt den Lehrgang der angewandten Mechanik, wie er seit vielen Jahren am Finsbury Technical College tradiert wurde. Gleich vielen englischen Werken zeichnet es sich in auffallender Weise durch die den praktischen Bedürfnissen in geschicktester Weise Rechnung tragende Auswahl des Stoffes aus. So handelt beispielsweise der ganze Abschnitt XII mitten unter den anderen lediglich von technologischen Anweisungen über die Baustoffe, eine Einschaltung vor der Behandlung elastischer Probleme, die sehr glücklich getroffen ist. Der wesentlichste Inhalt ist durch die Folge der Kapitelüberschriften charakterisiert: Einleitung, Vektoren, Relative Bewegung; Arbeit oder Energie; Reibung, Wirkungsgrad, Maschinen, elementare analytische und graphische Methoden, Beispiele aus der Graphostatik, hydraulische Maschinen; Allgemeines über Maschinen; Kinetische Energie; Baustoffe, Zug und Druck, Abscherung und Torsion, schwierigere Theorie der Elastizität, Biegung, Festigkeit eines Trägers, einige Formeln über Träger; Diagramme der Biegungsmomente und Schubkräfte; schwierigere Biegungsfälle, Druck und Biegung, Bogenbrücken; Messung eines Stoßes, Hydrodynamik, periodische Bewegung; Mechanismen, Zentrifugalkraft, Federn, Federung, Wagenfedern. Hiezu einige Konstantentabellen und ein sorgfältiges Sachregister.

Auf S. 41 heißt es: „Man nennt gewöhnlich, jedoch, wie wir glauben, unklugerweise, „Maße" den Quotienten aus dem Gewicht durch 9·81, während

Digitized by Google

diese Größe die „Trägheit" des Körpers ausdrückt. Sachlich ist die Bemerkung bekannt und gerechtfertigt, ob es aber in einem solchen Werke für den Studenten zweckmäßig ist, über die rein akademische Frage der üblichen Bezeichnung zu diskutieren, mag dahingestellt bleiben. Jedenfalls aber geben derartige Bemerkungen dem Werke eine persönliche Färbung und zeigen weiters einen für den Engländer charakteristischen kritischen Zug. *St. M.*

La télégraphie sans fil et les applications pratiques des ondes électriques. Télégraphie avec conducteur. Téléphonie sans fil, commande a distance. Précision des Orages. Courant de haute fréquence. Eclairage. Par Albert Turpain, Professeur de Physique à la Faculté des Sciences de l'Université de Poitiers. 2. Auflage. XI + 386 S. mit 220 Figuren. Gauthiers-Villars, Paris 1908. Preis 19 Fr.

Die vorliegende zweite Auflage erforderte entsprechend dem rapid angewachsenen Erfahrungsmaterial eine gründliche Revision. Dieselbe ist mit Sorgfalt durchgeführt. Überholtes ist ausgemerzt und das Werk dem Stande der Kenntnisse bis 1907 angepaßt worden. Diese Einführung in eines der aktuell interessantesten Gebiete der modernen Physik und Technik kann nicht nur Fachleuten empfohlen werden, sondern allen Interessenten, die über die Grundtatsachen der Physik orientiert sind, auch wenn ihnen höhere mathematische Kenntnisse fehlen. *St. M.*

Barytomik. Von Dr. J. Schick. Franzscher Verlag, München und Leipzig 1908.

Die Schrift schließt an eine frühere desselben Verfassers an, die betitelt ist: „Grundlagen einer Isogonalzentrik" (Tübingen, Franz Fues 1908) und in welcher Untersuchungen angestellt sind über die Art eines Punktes, dessen Fußpunktsdreieck den verschiedensten Bedingungen unterworfen ist.

Den Gegenstand vorliegender Schrift bilden die Transversalen im Dreieck, vornehmlich die Transversalen von Dreiecken, die dadurch entstehen, daß man von einem Punkte in der Ebene eines gegebenen Dreieckes, „des Urdreieckes", Lote auf die Seiten fällt und die Fußpunkte verbindet. Jede Transversale eines Dreieckes wird als Schwerlinie, Barytome, aufgefaßt, indem man sich die Ecken des Dreieckes mit entsprechenden Maßen belegt denkt. Gleicherweise dient auch zur Bestimmung der Lage eines Punktes, wie im baryzentrischen Kalkül, die Kennzeichnung des Punktes als des Schwerpunktes eines Systems von drei Punktmaßen. Sind die Maße mit l, m, n bezeichnet, so heißt der Punkt der (l, m, n)-Schwerpunkt des von den drei Maßen bestimmten Dreieckes.

Von diesen Definitionen aus ergibt sich eine Fülle wahrhaft interessanter Sätze. Hieher gehört vor allem der Fundamentalsatz: Der Gegenpunkt zum (l, m, n)-Schwerpunkt eines Dreieckes ist für das Fußpunktsdreieck des letzteren Punktes ebenfalls der (l, m, n)-Schwerpunkt. Auch gehört hieher die bemerkenswerte Erscheinung, daß sich für das Zentrum des Fußpunktsdreieckes bei den verschiedenartigsten Bedingungen immer wieder ein Kreis als geometrischer Ort ergibt, und zwar ein Kreis mit dem Mittelpunkt auf dem Umkreise des Urdreieckes.

Schöne Anwendungen der dargebotenen Sätze finden wir in der Lösung der Aufgabe, eine Gerade zwischen die Seiten eines Dreiecks zu legen, so daß

Digitized by Google

auf ihr gegebene Stücke ausgeschnitten werden und der damit in Zusammenhang stehenden Aufgabe, eine Gerade zwischen die Seiten eines Viereckes so zu legen, daß die auf ihr bestimmten Abschnitte in gegebenem Verhältnis stehen.

Sehr Interessantes bietet der Abschnitt, der von der Potenz eines Punktes in bezug auf den Umkreis eines Dreieckes handelt, wobei sich merkwürdige Lagenbeziehungen für die sogenannten besonderen Punkte (Mittelpunkt des Inkreises, Brocardsche Punkte u. s. w.) ergeben, Beziehungen, von denen es sich zeigt, daß sie sich ohne weiteres auf den Raum ausdehnen lassen.

Außer den Barytomen werden noch sogenannte Schwerstrecken oder Baryzygen eingeführt. Als Baryzyge ist eine Strecke zu bezeichnen, wenn man ihre Endpunkte als Schwerpunkte für zwei verschiedene Maßbelegungen der Eckpunkte eines gegebenen Dreieckes bezeichnen will. Für die Länge einer solchen Baryzyge wird ein Ausdruck abgeleitet, der sich von dem entsprechenden in trimetrischen Koordinaten (Salmon, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, § 65 und § 72) durch Einfachheit und Übersichtlichkeit unterscheidet und der sich ohne weiteres in zwei Teile von einfacher geometrischer Bedeutung zerlegen läßt. Nachdem gezeigt worden, daß man jede Baryzyge auch als Barytome auffassen kann, wird der Ort der Zentra desjenigen Fußpunktsdreieckes untersucht, für welche die Strecke zwischen dem (l, m, n)-Schwerpunkt und dem (l, m, n)-Schwerpunkt gegebene Länge besitzt. Auch hier ergibt sich wieder ein Kreis, der sich vom Umkreis des Urdreieckes aus in eleganter Weise konstruieren läßt.

So führen alle Betrachtungen zum Schlusse auf Kreise als geometrische Örter, die in einfachster Beziehung zum Umkreise des zu Grunde gelegten Dreiecks stehen. Diese Kreise, die einem organischen System von Bedingungen entsprechen, greifen wie ein kunstvolles Räderwerk ineinander, wie die vorliegende Schrift überhaupt den Eindruck eines organischen Ganzen macht.

München. *R. Schumacher.*

Theorie der Elektrizität. Zweiter Band: Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Von M. Abraham. 2. Auflage. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1908. XII + 404 Seiten mit 6 Textfiguren.

Auch der zweite Band dieses einzigartigen Werkes hat bei der Neuauflage im wesentlichen seine alte bewährte Form beibehalten, doch waren im einzelnen hier, wo die neuesten, sich rasch entfaltenden Sprossen der elektromagnetischen Theorie beobachtet werden, mehr neue Ergebnisse zu berücksichtigen als im I. Teile. Während der Verfasser sich nicht genötigt gesehen hat, seinen bisher verfochtenen prinzipiellen Standpunkt aufzugeben, bringt er mit anerkennenswerter Objektivität die Arbeiten, die sich nach anderen Richtungen bewegen, zur Darstellung, wobei die strenge Kritik der Sache nur förderlich sein kann. Der Standpunkt des Verfassers wird am besten durch folgendes Zitat aus dem Vorworte zur 2. Auflage charakterisiert: „Obwohl die Lorentzschen Feldgleichungen die absolute Geschwindigkeit der Elektronen enthalten, hat man versucht, sie mit dem „Postulat der Relativität", welches einen Einfluß einer gleichförmigen Translationsbewegung auf die Vorgänge in einem abgeschlossenen System ausschließt, zu vereinbaren, wobei von der Freiheit der Hypothesen- und Definitionsbelebung oft ein recht weitgehender

Digitized by Google

Gebrauch gemacht wurde. — Es ergibt sich, daß die Einführung des Relativitätspostulates — wenigstens in der Dynamik der Elektrons — zu ungelösten Widersprüchen führt, wofern man an der elektromagnetischen Deutung, die doch allen diesen Entwicklungen zu Grunde liegt, festhält. Auf dem Gebiete der elektromagnetischen Vorgänge in wägbaren Körpern dagegen, dem ja die zu deutenden negativen Versuchsergebnisse angehören, wird durch die Grundgleichungen von H. Minkowski dem Relativitätspostulate genügt; hier mündet die Elektronentheorie in eine mehr phänomenologische Darstellungsweise aus, welche mit der schon früher von E. Cohn gegebenen in mancher Hinsicht verwandt ist." Hervorgehoben sei die Behandlung der Dynamik des Hohlraumes in § 44. Für den Weiterbau der Theorie gibt der Verfasser schließlich folgenden Wink: „Allerdings scheint es, als ob die auf dem Relativitätspostulate fußende Weiterbildung der Lorentzschen Elektrodynamik ebenfalls auf die Vorgänge in wägbaren Körpern beschränkt ist, denn ihre Anwendung auf die freien Elektronen begegnet den mehrfach erörterten Schwierigkeiten. Es wäre auch sehr wohl denkbar, daß das Relativitätspostulat für die Bewegung der wägbaren Materie zuträfe, aber nicht auf die Bewegung der freien Elektronen anwendbar wäre. Unserer Unkenntnis der zwischen den Atomen der Materie und der Elektrizität wirkenden Kräfte würde es entsprechen, wenn man die elektromagnetischen und optischen Vorgänge in bewegten Körpern mehr phänomenologisch durch ein System von Feldgleichungen beschreiben würde, welches dem Relativitätspostulate genügt. — So würde für die Dynamik der Elektronen der Weg freigehalten, welcher dem Fortschritte der experimentellen Forschung auf dem Gebiete der Kathoden- und Radiumstrahlung zu folgen hat. Es ist schade, daß die neuen Messungen der spezifischen Ladung der β-Strahlen durch Bucherer, die dieser Autor als entscheidend zu Gunsten der Lorentzschen Thsorie betrachtet, in diesem Buche nicht mehr berücksichtigt werden konnten. *K. Prz.*

Lehrbuch der Physik für humanistische Gymnasien und höhere Mittelschulen. Nach dem ministeriellen Lehrplan bearbeitet von Johann Kleiber, Reallehrer an der städt. Handelsschule in München. Vierte Auflage mit 462 Figuren, 8 farb. Spektralbildern, zahlreichen durchgerechneten Musterbeispielen und Übungsaufgaben samt Lösungen. Gr.-8° (XII und 298 S.). München und Berlin, Druck und Verlag von R. Oldenbourg.

Experimental-Physik für die Unterstufe. Zum Gebrauch an Realschulen nach dem Kgl. Bayr. ministeriellen Lehrplan bearbeitet von Johann Kleiber, Reallehrer an der städt. Handelsschule in München. Mit 341 Figuren, 4 Spektralbildern, zahlreichen Schülerübungen und Musterbeispielen. Gr.-8° (VII und 216 S.) München und Berlin 1908, Druck und Verlag von R. Oldenbourg.

Wenn ein Lehrbuch in so kurzer Zeit vier Auflagen erleben kann, so dürfte dies wohl genügend für seine Brauchbarkeit in der Schulpraxis sprechen. Hervorzuheben sind an ihm die große Anzahl anschaulicher Figuren und vor allem die außerordentlich instruktiven und anregenden Schülerübungen und Aufgaben. Ein Bedenken allerdings ließe sich erheben: Es scheint dem Referenten, als ob in der Ausgabe für Gymnasien dem Schüler der Gedächtsnisstoff allzu

Digitized by Google

mundgerecht gemacht wäre, so daß er leicht, da er nicht gezwungen ist, mit eigenem Verstande das Wichtigste herauszugreifen, zu gedankenlosem Auswendiglernen kommen kann. In dieser Hinsicht würde der Referent der ebenfalls vorliegenden Neubearbeitung für Realschulen den Vorzug geben, bei der wenigstens von dem Hervorheben der wichtigeren Sätze durch Schilder Abstand genommen wurde. *K. W. F. K.*

Die Stereometrie (für Realschulen). Von A. Böttger. 3. Aufl., 48 S. Leipzig, Dürrsche Buchhandlung, 1908.

Zur Methodik der Elementarmathematik. Von F. Schneider. Stuttgart und Berlin, F. Grub, 1908. (V + 68 S.)

Dss Heft ist dazu bestimmt, Lehramtskandidaten und jüngeren Lehrern Ratschläge über solche formale Fragen des mathematischen Unterrichts zu erteilen, die gewöhnlich in den didaktischen Werken als rein äußerlich rasch abgetan werden. Da aber gerade der mathematische Unterricht ein gewisses Maß von Pedanterie nicht entbehren kann, wenn er sein pädagogisches Ziel erreichen soll, ist die vorliegende Schrift dankbar zu begrüßen. Der Verfasser bespricht die Anordnung numerischer und algebraischer Rechnungen, die Abfassung von Konstruktionsangaben und Beweisen und läßt in einem Anhang mehrere Musterbeispiele folgen. Er wünscht, durch diese Publikation zur Einführung einer einheitlichen Sprech- und Schreibweise des mathematischen Unterrichts anzuregen. *F.*

Ebene Geometrie. Von K. Schwering und W. Krimpshoff. 6. Auflage, X + 138 S. Freiburg i. Br., Herdersche Verlagsbuchhandlung, 1908.

Die Einleitung bilden anschauliche und konstruktive Betrachtungen, die ersten Beweise werden in einem wiederholenden Kursus eingeführt, im übrigen wird der Lehrgang ungefähr in der gewöhnlichen Reihenfolge, und zwar bis zu den einfachsten geometrischen Verwandtschaften, durchgeführt. Zwei kurze Schlußkapitel handeln von den Konstruktionsmethoden und von der geometrischen Formulierung der Eigenschaften des Raumes. Zahlreiche, teilweise neuartige Aufgaben und eine schöne Ausstattung empfehlen das Buch für den Gebrauch in der Schule, auch der Lehrer dürfte aus ihm manche Anregung empfangen. Nur zu einem Punkte möchte der Referent eine Frage aufwerfen: Die Verfasser umgehen den Begriff der Inkommensurabilität, indem sie je zwei Strecken als näherungsweise kommensurabel erklären, ein Vorgang, der auf der Unterstufe sicherlich richtig, für diese auch schon von anderen Autoren, z. B. von Bourlet, ausdrücklich adoptiert ist. In einem Lehrgang aber, der die Elementargeometrie bis zum Abschluß führt, könnte dieses Vorgehen beim Schüler eine Unsicherheit darüber erzeugen, wo die Berechtigung, approximativ zu verfahren, aufhört. Auch dürfte auf der Oberstufe eine Gelegenheit, den Begriff des Irrationalen zu erörtern, manchem Lehrer eher willkommen sein. — Nebenbei sei noch bemerkt, daß der bekannte Beweis für den Satz des Pythagoras, der auf der Kongruenz der Sechsecke beruht und der in die neue Auflage als Beispiel eines Beweises mittels „Zerlegungsgleichheit" eingeführt wurde, die Zerlegungsgleichheit der Quadrate nicht in Evidenz setzt. (Sie besteht allerdings. Vgl. den Beweis von Epstein, Hoffm. Zeitschr. 1907.) *F.*

Digitized by Google

Alphabetisches Inhaltsverzeichnis

der Jahrg. XI—XX.

Seite

Arndt, Bruno, Königsberg i. Pr. Über die Verallgemeinerung des Krümmungsbegriffes für Raumkurven. 1909. XX 343

Axer, A., Wien. Zahlentheoretische Funktionen und deren asymptotische Werte im Gebiete der aus den dritten Einheitswurzeln gebildeten ganzen komplexen Zahlen. 1904. XV 239

Berger, Alfred, Wien. Über die zur dritten Stufe gehörigen hypergeometrischen Integrale am elliptischen Gebilde. 1906. XVII 157

— — (Schluß). 1906. XVII 179

Beyel, Christian, Zürich. Eine Aufgabe über ein besonderes Viereck. 1905. XVI 45

Biermann, Otto, †, Brünn. Über die Evoluten von Raumkurven. 1900. XI . 59

— — Über die näherungsweise Bestimmung der Lösungen mehrerer Gleichungen. 1900. XI 148

— — Über die Bedingungen, unter denen eine ganze rationale Funktion mehrfache Nullstellen besitzt. 1902. XIII 351

— — Kinematische Deutung der additiven Periodizität. 1903. XIV 206

— — Über näherungsweise Kubaturen. 1903. XIV 211

— — Zur näherungsweisen Quadratur und Kubatur. 1903. XIV 226

— — Eine Verwendung der Strophoide. 1903. XIV 347

— — Zwei dem numerischen Rechnen angehörende Betrachtungen. 1904. XV 325

— — Ein Problem der Interpolationsrechnung. 1905. XVI 49

— — Eine Divisionsprobe. 1905. XVI 365

— — Über gewisse lineare Transformationen. 1906. XVII 234

— — Zur näherungsweisen Kubatur. 1909. XX 321

Blaschke, Wilhelm, Graz. Bemerkungen über allgemeine Schraubenlinien. 1908. XIX 188

Böhm-Wendt, Cäcilie, Wien. Eine Verallgemeinerung des Additionstheorems der Besselschen Funktionen erster Art. 1900. XI 125

Burkhardt, H., Zürich. Über Differentialgleichungen. 1901. XII 290

Carda, Karl, Prag. Zur Theorie der algebraischen Gruppen der Geraden und der Ebene. 1900. XI 31

— — Zur Theorie der Jacobischen Differentialgleichung. 1906. XVII . . . 59

— — Zur Berechnung der Torsion einer Raumkurve in rationaler Gestalt. 1906. XVII 225

— — Über eine Schar dreigliedriger algebraischer Gruppen der Ebene. 1906. XVII 78

Daublebsky v. Sterneck, Robert, Graz. Über die zu den Konfigurationen 12_3 zugehörigen Gruppen von Substitutionen. 1903. XIV 254

— — Über die Darstellung der Zahlen als Summe von vier Quadraten. 1904. XV 235

— — Über konvexe Polygone. 1904. XV 292

Dintzl, Erwin, Wien. Bemerkung über einen Satz des Herrn Lerch. 1900. XI 67

Dorner, Otto, Königsberg i. Pr. Über Teiler von Formen. 1909. XX . . . 242

Eberhard, V., Halle a. S. Ein Beitrag zur Tetraederlehre. 1906. XVII . . 305

Digitized by Google

Nr. 2. Elektromagnetische Ausgleichungsvorgänge in Freileitungen und Kabeln. Von Karl Willy Wagner. Mit 23 Textfiguren. 109 S. Preis M. 2.40.

Hier wird ein Problem behandelt, das fast ganz der elektrotechnischen Erfahrung seine Aufstellung verdankt. Außer Heavisides Theorien findet sich auch in der physikalischen Literatur keine entsprechende Darstellung. Neben den Ingenieuren werden es demnach insbesondere auch die Physiker begrüßen, hier eine ausführlichere Behandlung eines fruchtbar gewordenen Gebietes zu finden. Der Inhalt gliedert sich nach einer kurzen allgemeineren Einleitung in die Aufstellung der bezüglichen Differentialgleichungen; Besprechung der Ladung einer am Ende offenen Leitung mit konstanter Spannung; die Ladung der am Ende offenen Leitung mit Wechselstrom; die Ausbreitung einer zu Anfang willkürlich verteilten Ladung über eine beiderseits offene Leitung; Ausgleich einer willkürlich verteilten Spannung über einen Ohmschen Widerstand; die freien Schwingungen bei der plötzlichen Unterbrechung eines Kurzschlusses; Erweiterung der Theorie; die Entladung der Leitung über eine am Ende angeschlossene Drosselspule; die freien Schwingungen beim Ausschalten der induktiv belasteten Leitung; das Verhalten von zwe verschiedenen in Reihe geschalteten Leitungen; über den Einfluß der Veränderlichkeit des effektiven Widerstandes der Leitung mit der Frequenz.

Nr. 3. Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. Von Dr. Clemens Schaefer, Privatdozent a. d. Universität Breslau. Mit 32 Textfiguren. VIII + 174 S. Preis M. 3.40.

In diesem von einem trefflichen Bilde Maxwells begleiteten Hefte wird eine klare und einfache Wiedergabe der genannten Theorie gefunden. Es sollte für den Leser an erster Stelle stehen, da er hier, wie es der Inhalt anzeigt, eine grundlegende Einleitung in die Kenntnis der elektrischen Vorgänge erhält. Im Anschlusse an die historische Entwicklung werden der Reihe nach behandelt: Elektrostatik; Magnetostatik; der elektrische Strom und sein Magnetfeld; die Induktion und die elektrischen Wellen.

Die Darbietung ist durchwegs einfach und korrekt, Anwendung von Vektoranalysis ist vermieden.

Mit diesen drei von vortrefflichen Mitarbeitern geschaffenen Werkchen hat der Herausgeber seine Sammlung in ausgezeichneter Weise eingeführt.

St. M.

Elektrochemie II. Experimentelle Elektrochemie, Meßmethoden, Leitfähigkeit, Lösungen. Von Dr. Heinrich Danneel. Mit 26 Figuren und mehrern Tabellen. (Sammlung Göschen Nr. 253.) Leipzig 1908.

Im ersten Bande hatte Danneel den theoretischen Teil der Elektrochemie nebst einigen einschlägigen physikalisch-chemischen Kapiteln gebracht, der vorliegende zweite behandelt zuerst die Meßmethoden zur Ermittlung der diversen elektrochemischen Größen, dann die Folgerungen und Schlüsse aus den experimentellen Ergebnissen sowie die Erweiterungen der Elementartheorie. An physikalischen Kenntnissen wird so gut wie gar nichts vorausgesetzt. Die Regeln der Stromverzweigung werden ausführlich besprochen, um die Wheat-

Digitized by Google

stonsche Brückenanordnung zu erklären. Im Texte steht eine Reihe von technischen Ratschlägen, die derjenige, der in elektrochemische Arbeiten eingeführt werden will, ebenso gerne lesen wird wie die ausgerechneten numerischen Beispiele bei Gelegenheit der Besprechung von Überführungsmessungen. Da im folgenden auch höhere Kapitel behandelt werden, so die Eigenschaften nichtwässeriger Lösungen, und im Abschnitt „Elektrochemie der Lösungen" eingehend über Dissoziationskonstante, Komplexbildung, Hydrolyse, die Indikatortheorie u. s. w. referiert wird, kann das vorliegende zweite Bändchen im Anschluß an das erste bestens zur Einführung auch in die modernste Elektrochemie benützt werden. *L.*

Das Prinzip der Erhaltung der Energie. Von Dr. Max Plank, Professor der theoretischen Physik an der Universität Berlin. Von der phil. Fakultät Göttingen preisgekrönt. Zweite Auflage. B. G. Teubner Berlin und Leipzig. 1908 XVI + 278 S. (Preis M. 6.—.)

Als sechster Band der Sammlung „Wissenschaft und Hypothese" erscheint dieses bekannte Buch in neuem Gewande, aber mit fast unverändertem Inhalt. Es dürfte fast beispiellos dastehen, daß es möglich ist, ein physikalisches Werk, das 1887 zuerst erschien, nach über zwanzig Jahren noch nahezu gleichlautend aufrechtzuerhalten, und dies allein bedeutet eine so glänzende Kritik für das Gebotene, daß jede weitere als überflüssig erscheinen muß. *St. M.*

Grundlinien einer Kritik und exakten Theorie der Wissenschaften, insbesondere der mathematischen. Von Hugo Dingler. Th. Ackermann, München 1907. 76. S.

Eine sehr lesenwerte Schrift. Da sie sich aber nicht eigentlich, wie man nach dem Titel vermuten könnte, mit den Grundlagen der Mathematik beschäftigt, können wir hier nicht näher auf ihren Inhalt eingehen. Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, zu zeigen, wie vom „Voraussetzungslosigkeitsstandpunkt" (kurz mit V. St. bezeichnet) aus — das ist der Standpunkt, auf dem uns nur das unmittelbar Wahrgenommene, ohne jede Begriffsbildung und ohne jede kausale Verknüpfung gegeben ist — die Wissenschaften aufgebaut werden könnten. Willkürliche Festsetzung spielt dabei eine große Rolle, geregelt durch das „Exhaustionsprinzip": Haben wir vom V. St. aus einmal etwas festgesetzt, so wollen wir alles Weitere stets nur so festsetzen, daß die früheren Festsetzungen gültig bleiben. Das Kausalitätsprinzip erscheint in Form der Festsetzung: Es soll keine Erscheinung geben, die unabhängig von allen anderen ist. Auf diesem Wege erreicht der Verfasser die absolute Gültigkeit aller Gesetze, ihre Unwiderlegbarkeit durch Erfahrung und Experiment. Ich glaube, daß sich gegen den Standpunkt des Verfassers vieles einwenden läßt; zwar seine Deduktionen mögen korrekt sein, aber sein Kausalgesetz ist nicht das unsere, seine „apriorischen" Gesetze nicht unsere Naturgesetze, die Wissenschaft, zu der er den Grund legt und die gewiß widerspruchsfrei ist, hat mit den uns interessierenden Wissenschaften nicht viel gemein. Trotz meines abweichenden Standpunktes möchte ich diese interessante Broschüre wärmstens empfehlen und auch auf die darauf bezüglichen Bemerkungen von G. Hessenberg (Jahresber. Math. Ver. 17, S. 45) und Dinglers Antwort (ebenda S. 267) hinweisen. *Hans Hahn.*

Digitized by Google

zuerkannt wird. Dem gegenüber steht als Vorzug des Werkchens die allgemeine Verwendbarkeit; es ermöglicht nicht nur erste rasche Orientiernng über das behandelte Gebiet, sondern enthält überall auch die Anweisung für eingehendes vertieftes Studium. *St. M.*

Schule der Elektrizität. Gemeinverständliche Darstellungen der Elektrik und ihrer Anwendungen nach den modernen Anschauungen und Plaudereien über die neuen Strahlungen. Nach G. Claude (L'electricité pour tout le monde), für Deutschland bearbeitet von Wa. Ostwald. Mit über 400 Abb. u. Tafeln. XII + 579 S. Verlag von Dr. Werner Klinkhardt, Leipzig 1908. Preis M. 8.—.

Der Übersetzer hat es übernommen, das bekannte und gute Buch Claudes nicht nur in die deutsche Sprache zu übertragen, sondern auch — es zu germanisieren. Man kann sagen, daß das letztere Bestreben nicht gar zu großes Unheil gestiftet hat, weil eben der Inhalt im wesentlichsten beibehalten wurde. Die „deutschen" Abbildungen aber, insbesondere die seichten Witze der Randleisten können nur Veranlassung dazu geben, sich über das Buch lustig zu machen. Auch Frl. G. O. mag eine tüchtige Malerin sein, eine Physikerin ist sie aber eben nicht und die farbigen Tafeln enthalten daher nur sehr viel Irreführendes, aber nichts Instruktives.

Einem Buche wie dem Claudes seine französische Eigenart nehmen wollen, heißt es entwerten. *St. M.*

Angewandte Mechanik, ein Lehrbuch für Studierende, die Versuche anstellen und numerische und graphische Beispiele durcharbeiten wollen. Von John Perry, Prof. d. Math. u. Mech. am Royal College of Science, London. Berechtigte deutsche Übersetzung von Ing. Rudolf Schick. Mit 371 Figuren im Text, VIII + 666 S. Leipzig-Berlin. Verlag B. G. Teubner, 1908. Preis M. 18·—.

Das Buch gibt den Lehrgang der angewandten Mechanik, wie er seit vielen Jahren am Finsbury Technical College tradiert wurde. Gleich vielen englischen Werken zeichnet es sich in auffallender Weise durch die den praktischen Bedürfnissen in geschicktester Weise Rechnung tragende Auswahl des Stoffes aus. So handelt beispielsweise der ganze Abschnitt XII mitten unter den anderen lediglich von technologischen Anweisungen über die Baustoffe, eine Einschaltung vor der Behandlung elastischer Probleme, die sehr glücklich getroffen ist. Der wesentlichste Inhalt ist durch die Folge der Kapitelüberschriften charakterisiert: Einleitung, Vektoren, Relative Bewegung; Arbeit oder Energie; Reibung, Wirkungsgrad, Maschinen, elementare analytische und graphische Methoden, Beispiele aus der Graphostatik, hydraulische Maschinen; Allgemeines über Maschinen; Kinetische Energie; Baustoffe, Zug und Druck, Abscherung und Torsion, schwierigere Theorie der Elastizität, Biegung, Festigkeit eines Trägers, einige Formeln über Träger; Diagramme der Biegungsmomente und Schubkräfte; schwierigere Biegungsfälle, Druck und Biegung, Bogenbrücken; Messung eines Stoßes, Hydrodynamik, periodische Bewegung; Mechanismen, Zentrifugalkraft, Federn, Federung, Wagenfedern. Hiezu einige Konstantentabellen und ein sorgfältiges Sachregister.

Auf S. 41 heißt es: „Man nennt gewöhnlich, jedoch, wie wir glauben, unklugerweise, „Maße" den Quotienten aus dem Gewicht durch 9·81, während

Digitized by Google

diese Größe die „Trägheit" des Körpers ausdrückt. Sachlich ist die Bemerkung bekannt und gerechtfertigt, ob es aber in einem solchen Werke für den Studenten zweckmäßig ist, über die rein akademische Frage der üblichen Bezeichnung zu diskutieren, mag dahingestellt bleiben. Jedenfalls aber geben derartige Bemerkungen dem Werke eine persönliche Färbung und zeigen weiters einen für den Engländer charakteristischen kritischen Zug. *St. M.*

La télégraphie sans fil et les applications pratiques des ondes électriques. Télégraphie avec conducteur. Téléphonie sans fil, commande a distance. Précision des Orages. Courant de haute fréquence. Eclairage. Par Albert Turpain, Professeur de Physique à la Faculté des Sciences de l'Université de Poitiers. 2. Auflage. XI + 386 S. mit 220 Figuren. Gauthiers-Villars, Paris 1908. Preis 19 Fr.

Die vorliegende zweite Auflage erforderte entsprechend dem rapid angewachsenen Erfahrungsmaterial eine gründliche Revision. Dieselbe ist mit Sorgfalt durchgeführt. Überholtes ist ausgemerzt und das Werk dem Stande der Kenntnisse bis 1907 angepaßt worden. Diese Einführung in eines der aktuell interessantesten Gebiete der modernen Physik und Technik kann nicht nur Fachleuten empfohlen werden, sondern allen Interessenten, die über die Grundtatsachen der Physik orientiert sind, auch wenn ihnen höhere mathematische Kenntnisse fehlen. *St. M.*

Barytomik. Von Dr. J. Schick. Franzscher Verlag, München und Leipzig 1908.

Die Schrift schließt an eine frühere desselben Verfassers an, die betitelt ist: „Grundlagen einer Isogonalzentrik" (Tübingen, Franz Fues 1908) und in welcher Untersuchungen angestellt sind über die Art eines Punktes, dessen Fußpunktsdreieck den verschiedensten Bedingungen unterworfen ist.

Den Gegenstand vorliegender Schrift bilden die Transversalen im Dreieck, vornehmlich die Transversalen von Dreiecken, die dadurch entstehen, daß man von einem Punkte in der Ebene eines gegebenen Dreieckes, „des Urdreieckes", Lote auf die Seiten fällt und die Fußpunkte verbindet. Jede Transversale eines Dreieckes wird als Schwerlinie, Barytome, aufgefaßt, indem man sich die Ecken des Dreieckes mit entsprechenden Maßen belegt denkt. Gleicherweise dient auch zur Bestimmung der Lage eines Punktes, wie im baryzentrischen Kalkül, die Kennzeichnung des Punktes als des Schwerpunktes eines Systems von drei Punktmaßen. Sind die Maße mit l, m, n bezeichnet, so heißt der Punkt der (l, m, n)-Schwerpunkt des von den drei Maßen bestimmten Dreieckes.

Von diesen Definitionen aus ergibt sich eine Fülle wahrhaft interessanter Sätze. Hieher gehört vor allem der Fundamentalsatz: Der Gegenpunkt zum (l, m, n)-Schwerpunkt eines Dreieckes ist für das Fußpunktsdreieck des letzteren Punktes ebenfalls der (l, m, n)-Schwerpunkt. Auch gehört hieher die bemerkenswerte Erscheinung, daß sich für das Zentrum des Fußpunktsdreieckes bei den verschiedenartigsten Bedingungen immer wieder ein Kreis als geometrischer Ort ergibt, und zwar ein Kreis mit dem Mittelpunkt auf dem Umkreise des Urdreieckes.

Schöne Anwendungen der dargebotenen Sätze finden wir in der Lösung der Aufgabe, eine Gerade zwischen die Seiten eines Dreiecks zu legen, so daß

Digitized by Google

auf ihr gegebene Stücke ausgeschnitten werden und der damit in Zusammenhang stehenden Aufgabe, eine Gerade zwischen die Seiten eines Viereckes so zu legen, daß die auf ihr bestimmten Abschnitte in gegebenem Verhältnis stehen.

Sehr Interessantes bietet der Abschnitt, der von der Potenz eines Punktes in bezug auf den Umkreis eines Dreieckes handelt, wobei sich merkwürdige Lagenbeziehungen für die sogenannten besonderen Punkte (Mittelpunkt des Inkreises, Brocardsche Punkte u. s. w.) ergeben, Beziehungen, von denen es sich zeigt, daß sie sich ohne weiteres auf den Raum ausdehnen lassen.

Außer den Barytomen werden noch sogenannte Schwerstrecken oder Baryzygen eingeführt. Als Baryzyge ist eine Strecke zu bezeichnen, wenn man ihre Endpunkte als Schwerpunkte für zwei verschiedene Maßbelegungen der Eckpunkte eines gegebenen Dreieckes bezeichnen will. Für die Länge einer solchen Baryzyge wird ein Ausdruck abgeleitet, der sich von dem entsprechenden in trimetrischen Koordinaten (Salmon, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, § 65 und § 72) durch Einfachheit und Übersichtlichkeit unterscheidet und der sich ohne weiteres in zwei Teile von einfacher geometrischer Bedeutung zerlegen läßt. Nachdem gezeigt worden, daß man jede Baryzyge auch als Barytome auffassen kann, wird der Ort der Zentra desjenigen Fußpunktsdreieckes untersucht, für welche die Strecke zwischen dem (l, m, n)-Schwerpunkt und dem (l, m, n)-Schwerpunkt gegebene Länge besitzt. Auch hier ergibt sich wieder ein Kreis, der sich vom Umkreis des Urdreieckes aus in eleganter Weise konstruieren läßt.

So führen alle Betrachtungen zum Schlusse auf Kreise als geometrische Örter, die in einfachster Beziehung zum Umkreise des zu Grunde gelegten Dreiecks stehen. Diese Kreise, die einem organischen System von Bedingungen entsprechen, greifen wie ein kunstvolles Räderwerk ineinander, wie die vorliegende Schrift überhaupt den Eindruck eines organischen Ganzen macht.

München. *R. Schumacher.*

Theorie der Elektrizität. Zweiter Band: Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Von M. Abraham. 2. Auflage. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1908. XII + 404 Seiten mit 6 Textfiguren.

Auch der zweite Band dieses einzigartigen Werkes hat bei der Neuauflage im wesentlichen seine alte bewährte Form beibehalten, doch waren im einzelnen hier, wo die neuesten, sich rasch entfaltenden Sprossen der elektromagnetischen Theorie beobachtet werden, mehr neue Ergebnisse zu berücksichtigen als im I. Teile. Während der Verfasser sich nicht genötigt gesehen hat, seinen bisher verfochtenen prinzipiellen Standpunkt aufzugeben, bringt er mit anerkennenswerter Objektivität die Arbeiten, die sich nach anderen Richtungen bewegen, zur Darstellung, wobei die strenge Kritik der Sache nur förderlich sein kann. Der Standpunkt des Verfassers wird am besten durch folgendes Zitat aus dem Vorworte zur 2. Auflage charakterisiert: „Obwohl die Lorentzschen Feldgleichungen die absolute Geschwindigkeit der Elektronen enthalten, hat man versucht, sie mit dem „Postulat der Relativität", welches einen Einfluß einer gleichförmigen Translationsbewegung auf die Vorgänge in einem abgeschlossenen System ausschließt, zu vereinbaren, wobei von der Freiheit der Hypothesen- und Definitionsbelebung oft ein recht weitgehender

Digitized by Google

Gebrauch gemacht wurde. — Es ergibt sich, daß die Einführung des Relativitätspostulates — wenigstens in der Dynamik der Elektrons — zu ungelösten Widersprüchen führt, wofern man an der elektromagnetischen Deutung, die doch allen diesen Entwicklungen zu Grunde liegt, festhält. Auf dem Gebiete der elektromagnetischen Vorgänge in wägbaren Körpern dagegen, dem ja die zu deutenden negativen Versuchsergebnisse angehören, wird durch die Grundgleichungen von H. Minkowski dem Relativitätspostulate genügt; hier mündet die Elektronentheorie in eine mehr phänomenologische Darstellungsweise aus, welche mit der schon früher von E. Cohn gegebenen in mancher Hinsicht verwandt ist." Hervorgehoben sei die Behandlung der Dynamik des Hohlraumes in § 44. Für den Weiterbau der Theorie gibt der Verfasser schließlich folgenden Wink: „Allerdings scheint es, als ob die auf dem Relativitätspostulate fußende Weiterbildung der Lorentzschen Elektrodynamik ebenfalls auf die Vorgänge in wägbaren Körpern beschränkt ist, denn ihre Anwendung auf die freien Elektronen begegnet den mehrfach erörterten Schwierigkeiten. Es wäre auch sehr wohl denkbar, daß das Relativitätspostulat für die Bewegung der wägbaren Materie zuträfe, aber nicht auf die Bewegung der freien Elektronen anwendbar wäre. Unserer Unkenntnis der zwischen den Atomen der Materie und der Elektrizität wirkenden Kräfte würde es entsprechen, wenn man die elektromagnetischen und optischen Vorgänge in bewegten Körpern mehr phänomenologisch durch ein System von Feldgleichungen beschreiben würde, welches dem Relativitätspostulate genügt. — So würde für die Dynamik der Elektronen der Weg freigehalten, welcher dem Fortschritte der experimentellen Forschung auf dem Gebiete der Kathoden- und Radiumstrahlung zu folgen hat. Es ist schade, daß die neuen Messungen der spezifischen Ladung der β-Strahlen durch Bucherer, die dieser Autor als entscheidend zu Gunsten der Lorentzschen Thsorie betrachtet, in diesem Buche nicht mehr berücksichtigt werden konnten. *K. Prz.*

Lehrbuch der Physik für humanistische Gymnasien und höhere Mittelschulen. Nach dem ministeriellen Lehrplan bearbeitet von Johann Kleiber, Reallehrer an der städt. Handelsschule in München. Vierte Auflage mit 462 Figuren, 8 farb. Spektralbildern, zahlreichen durchgerechneten Musterbeispielen und Übungsaufgaben samt Lösungen. Gr.-8° (XII und 298 S.). München und Berlin, Druck und Verlag von R. Oldenbourg.

Experimental-Physik für die Unterstufe. Zum Gebrauch an Realschulen nach dem Kgl. Bayr. ministeriellen Lehrplan bearbeitet von Johann Kleiber, Reallehrer an der städt. Handelsschule in München. Mit 341 Figuren, 4 Spektralbildern, zahlreichen Schülerübungen und Musterbeispielen. Gr.-8° (VII und 216 S.) München und Berlin 1908, Druck und Verlag von R. Oldenbourg.

Wenn ein Lehrbuch in so kurzer Zeit vier Auflagen erleben kann, so dürfte dies wohl genügend für seine Brauchbarkeit in der Schulpraxis sprechen. Hervorzuheben sind an ihm die große Anzahl anschaulicher Figuren und vor allem die außerordentlich instruktiven und anregenden Schülerübungen und Aufgaben. Ein Bedenken allerdings ließe sich erheben: Es scheint dem Referenten, als ob in der Ausgabe für Gymnasien dem Schüler der Gedächtsnisstoff allzu

Digitized by Google

mundgerecht gemacht wäre, so daß er leicht, da er nicht gezwungen ist, mit eigenem Verstande das Wichtigste herauszugreifen, zu gedankenlosem Auswendiglernen kommen kann. In dieser Hinsicht würde der Referent der ebenfalls vorliegenden Neubearbeitung für Realschulen den Vorzug geben, bei der wenigstens von dem Hervorheben der wichtigeren Sätze durch Schilder Abstand genommen wurde. *K. W. F. K.*

Die Stereometrie (für Realschulen). Von A. Böttger. 3. Aufl., 48 S. Leipzig, Dürrsche Buchhandlung, 1908.

Zur Methodik der Elementarmathematik. Von F. Schneider. Stuttgart und Berlin, F. Grub, 1908. (V + 68 S.)

Dss Heft ist dazu bestimmt, Lehramtskandidaten und jüngeren Lehrern Ratschläge über solche formale Fragen des mathematischen Unterrichts zu erteilen, die gewöhnlich in den didaktischen Werken als rein äußerlich rasch abgetan werden. Da aber gerade der mathematische Unterricht ein gewisses Maß von Pedanterie nicht entbehren kann, wenn er sein pädagogisches Ziel erreichen soll, ist die vorliegende Schrift dankbar zu begrüßen. Der Verfasser bespricht die Anordnung numerischer und algebraischer Rechnungen, die Abfassung von Konstruktionsangaben und Beweisen und läßt in einem Anhang mehrere Musterbeispiele folgen. Er wünscht, durch diese Publikation zur Einführung einer einheitlichen Sprech- und Schreibweise des mathematischen Unterrichts anzuregen. *F.*

Ebene Geometrie. Von K. Schwering und W. Krimpshoff. 6. Auflage, X + 138 S. Freiburg i. Br., Herdersche Verlagsbuchhandlung, 1908.

Die Einleitung bilden anschauliche und konstruktive Betrachtungen, die ersten Beweise werden in einem wiederholenden Kursus eingeführt, im übrigen wird der Lehrgang ungefähr in der gewöhnlichen Reihenfolge, und zwar bis zu den einfachsten geometrischen Verwandtschaften, durchgeführt. Zwei kurze Schlußkapitel handeln von den Konstruktionsmethoden und von der geometrischen Formulierung der Eigenschaften des Raumes. Zahlreiche, teilweise neuartige Aufgaben und eine schöne Ausstattung empfehlen das Buch für den Gebrauch in der Schule, auch der Lehrer dürfte aus ihm manche Anregung empfangen. Nur zu einem Punkte möchte der Referent eine Frage aufwerfen: Die Verfasser umgehen den Begriff der Inkommensurabilität, indem sie je zwei Strecken als näherungsweise kommensurabel erklären, ein Vorgang, der auf der Unterstufe sicherlich richtig, für diese auch schon von anderen Autoren, z. B. von Bourlet, ausdrücklich adoptiert ist. In einem Lehrgang aber, der die Elementargeometrie bis zum Abschluß führt, könnte dieses Vorgehen beim Schüler eine Unsicherheit darüber erzeugen, wo die Berechtigung, approximativ zu verfahren, aufhört. Auch dürfte auf der Oberstufe eine Gelegenheit, den Begriff des Irrationalen zu erörtern, manchem Lehrer eher willkommen sein. — Nebenbei sei noch bemerkt, daß der bekannte Beweis für den Satz des Pythagoras, der auf der Kongruenz der Sechsecke beruht und der in die neue Auflage als Beispiel eines Beweises mittels „Zerlegungsgleichheit“ eingeführt wurde, die Zerlegungsgleichheit der Quadrate nicht in Evidenz setzt. (Sie besteht allerdings. Vgl. den Beweis von Epstein, Hoffm. Zeitschr. 1907.) *F.*

Digitized by Google

Alphabetisches Inhaltsverzeichnis

der Jahrg. XI—XX.

Seite

Arndt, Bruno, Königsberg i. Pr. Über die Verallgemeinerung des Krümmungsbegriffes für Raumkurven. 1909. XX 343

Axer, A., Wien. Zahlentheoretische Funktionen und deren asymptotische Werte im Gebiete der aus den dritten Einheitswurzeln gebildeten ganzen komplexen Zahlen. 1904. XV 239

Berger, Alfred, Wien. Über die zur dritten Stufe gehörigen hypergeometrischen Integrale am elliptischen Gebilde. 1906. XVII 157

— — (Schluß). 1906. XVII 179

Beyel, Christian, Zürich. Eine Aufgabe über ein besonderes Viereck. 1905. XVI 45

Biermann, Otto, †, Brünn. Über die Evoluten von Raumkurven. 1900. XI . 59

— — Über die näherungsweise Bestimmung der Lösungen mehrerer Gleichungen. 1900. XI 148

— — Über die Bedingungen, unter denen eine ganze rationale Funktion mehrfache Nullstellen besitzt. 1902. XIII 351

— — Kinematische Deutung der additiven Periodizität. 1903. XIV 206

— — Über näherungsweise Kubaturen. 1903. XIV 211

— — Zur näherungsweisen Quadratur und Kubatur. 1903. XIV 226

— — Eine Verwendung der Strophoide. 1903. XIV 347

— — Zwei dem numerischen Rechnen angehörende Betrachtungen. 1904. XV 325

— — Ein Problem der Interpolationsrechnung. 1905. XVI 49

— — Eine Divisionsprobe. 1905. XVI 365

— — Über gewisse lineare Transformationen. 1906. XVII 234

— — Zur näherungsweisen Kubatur. 1909. XX 321

Blaschke, Wilhelm, Graz. Bemerkungen über allgemeine Schraubenlinien. 1908. XIX 188

Böhm-Wendt, Cäcilie, Wien. Eine Verallgemeinerung des Additionstheorems der Besselschen Funktionen erster Art. 1900. XI 125

Burkhardt, H., Zürich. Über Differentialgleichungen. 1901. XII 290

Čarda, Karl, Prag. Zur Theorie der algebraischen Gruppen der Geraden und der Ebene. 1900. XI 31

— — Zur Theorie der Jacobischen Differentialgleichung. 1906. XVII . . . 59

— — Zur Berechnung der Torsion einer Raumkurve in rationaler Gestalt. 1906. XVII 225

— — Über eine Schar dreigliedriger algebraischer Gruppen der Ebene. 1906. XVII 78

Daublebsky v. Sterneck, Robert, Graz. Über die zu den Konfigurationen 12_3 zugehörigen Gruppen von Substitutionen. 1903. XIV 254

— — Über die Darstellung der Zahlen als Summe von vier Quadraten. 1904. XV 235

— — Über konvexe Polygone. 1904. XV 292

Dintzl, Erwin, Wien. Bemerkung über einen Satz des Herrn Lerch. 1900. XI 67

Dorner, Otto, Königsberg i. Pr. Über Teiler von Formen. 1909. XX . . . 242

Eberhard, V., Halle a. S. Ein Beitrag zur Tetraederlehre. 1906. XVII . . 305

Digitized by Google

Seite

Ernst, Paul, Wien. Über das Küppersche Konoid. 1906. XVII 309
— — Ein Analogon zur Mannheimschen Kurve. 1907. XVIII 315
— — Zusammenhang zwischen dem Küpperschen und Plückerschen Konoid. 1908. XIX 148
Fanta, Ernst, Wien. Beweis, daß jede lineare Funktion, deren Koeffizienten dem kubischen Kreisteilungskörper entnommene ganze teilerfremde Zahlen sind, unendlich viele Primzahlen dieses Körpers darstellt: 1901. XII . . 1
— — Über die Verteilung der Primzahlen. 1901. XII 299
Fischer, Ernst, Brünn. Über Eisensteins Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes. 1900. XI 176
— — Zwei neue Beweise für den „Fundamentalsatz der Fourierschen Konstanten". 1904. XV 69
— — Über quadratische Formen mit reellen Koeffizienten. 1905. XVI . . 234
Fischer, Raimund, Braunau i. Böhmen. Ein Beitrag zur hyperbolischen Geometrie. 1905. XVI 230
Frank, Philipp, Wien. Ein Kriterium für die Stabilität der Bewegung eines materiellen Punktes in der Ebene und dessen Zusammenhang mit dem Prinzip der kleinsten Wirkungen. 1909. XX 171
— — Unstetige Lösungen beim Prinzip der kleinsten Wirkungen. 1909. XX 189
— — Eine Bemerkung über indefinite Variationsprobleme. 1909. XX . . . 279
Frauenfelder, G., Zürich. Büschel von Raumkurven 4. Ordnung II. Art mit zwei stationären Tangenten. 1904. XV 299
Freud, Philipp, Wien. Über die uneigentlichen bestimmten Integrale. 1905. XVI 11
— — Über Grenzwerte von Doppelintegralen, die bedingt konvergenten, einfachen Integralen analog sind. 1907. XVIII 29
Furlan, V., Göttingen. Über das Mertenssche Postulat $|\sigma(n)| \leqq \sqrt{n}$. 1907. XVIII 235
Gegenbauer, Leopold, †, Wien. Über ein Theorem des Herrn Mac Mahon. 1900. XI 287
Glage, Friedrich, Hamburg. Anwendung der Gruppentheorie auf die irreduziblen Gleichungen vom sechsten Grade. 1900. XI 155
Gmeiner, Josef Anton, Innsbruck. Über die Primzahlen und Primideale im Rationalitätsgebiete der fünften Einheitswurzeln. 1900. XI 1
— — Konvergenzsätze für alternierende unendliche Kettenbrüche. 1903. XIV 261
— — mit *Kobald, E.,* und *Stolz, O.* Leopold Gegenbauer. 1904. XV . . 1
— — (Schluß), XV 129
— — Über die disjunktiven Konvergenz- und Divergenzkriterien zweiter Art für unendliche Reihen mit positiven Gliedern. 1905. XVI 113
— — Otto Stolz. Nachruf. 1906. XVII 161
— — Einige Bemerkungen zu dem Weierstraßschen Kriterium für unendliche Reihen mit komplexen Gliedern. 1908. XIX 149
Godeaux, Lucien, Lüttich. Sur une coïncidence bicubique. 1909. XX . . . 269
Graziadei, Heinrich, Innsbruck. Die viergliedrigen Gruppen in beliebig vielen Veränderlichen mit einer dreigliedrigen Involutions-Untergruppe. 1908. XIX 309
Grissemann, Franz X., Innsbruck. Elementarer Nachweis des Satzes von Frobenius über die Ausnahmsstellung der Quaternionen unter den komplexen Zahlensystemen von mehr als zwei Einheiten. 1900. XI 132
Grünwald, Josef, Prag. Über duale Zahlen und ihre Anwendung in der Geometrie. 1906. XVII 81
Guldberg, Alf, Christiania. Über reduzible lineare homogene Differenzengleichungen. 1905. XVI 204
Hahn, Hans, Wien. Zur Theorie d. zweiten Variation einfacher Integrale. 1903. XIV 3
— — Über die Lagrangesche Multiplikatorenmethode in der Variationsrechnung 1903. XIV 325
— — Über Funktionen zweier komplexer Veränderlicher. 1905. XVI . . . 29
— — Über punktweise unstetige Funktionen. 1905. XVI 312
— — Über einen Satz von Osgood in der Variationsrechnung. 1906. XVII 63
— — Über das allgemeine Problem der Variationsrechnung. 1906. XVII . 295
— — Bemerkungen zu den Untersuchungen des Herrn M. Fréchet: Sur quelques points du calcul fonctionnel. 1908. XIX 247

Digitized by Google

Seite
Hahn, Hans, Wien. Über die Anordnungssätze der Geometrie. 1908. XIX . 289
— — Bemerkung zu meiner Note im Band XIX, 1908, S. 247, dieser Zeitschrift. 1909. XX 192
— — Über Bolzas fünfte notwendige Bedingung in der Variationsrechnung. 1909. XX 279
Hanni, Lucius, Wien. Über Borels Verallgemeinerung des Grenzbegriffes. 1901. XII 265
— — Zurückführung der allgemeinen Mittelbildung Borels auf Mittag-Lefflers n-fach unendliche Reihen. 1908. XIV 105
Huber, Gottlieb, Bern. Die Conchoidenfläche, eine Linienfläche 4. Ordnung. 1903. XIV 139
— — Auswertung einiger bestimmter Integrale mit Anwendung des freien Integrationsweges. 1905. XVI 141
Jäger, Gustav, Wien. Der Physiker Ludwig Boltzmann †. 1907. XVIII . . 3
Janisch, Eduard, Prag. Die Kegelschnitte als Erzeugnisse der zwei-zweideutigen Fokalstrahlen-Verwandtschaft. 1900. XI 170
— — Evoluten als Konturkurven windschiefer Flächen. 1901. XII 97
— — Geometrische Mitteilungen. 1902. XIII 133
Kantor, Seligmann, †, Prag. Theorie der Elementarteiler höherer Stufen. 1900. XI 193
Kapteyn, W., Utrecht. Einige Bemerkungen über Besselsche Funktionen. 1903. XIV 275
Klug, Leopold, Klausenburg. Einige Sätze über kollineare und ähnliche Felder. 1902. XIII 361
— — Desmische Vierseiten- und Kegelschnittsysteme. 1903. XIV 74
— — Einige Sätze über die Kegel zweiter Ordnung. 1903. XIV 92
— — Konstruktion der Brennpunkte der ebenen Schnitte eines Kegels zweiter Ordnung. 1906. XVII 44
— — Über die Orte der Punkte, aus welchen ein Kreis durch spezielle Kegel projiziert wird. 1906. XVIII 241
Kobald, Engelbert, Leoben. Zur mathematischen Theorie der Verzweigung von Wechselstromkreisen mit Induktanz. 1903. XIV 133
— — mit *Gmeiner, J. A.,* und *Stolz, O.,* Leopold Gegenbauer. 1904. XV . 1
— — (Schluß). 1904. XV 129
Kohl, Emil, Wien. Über die Stefansche Entwicklung der Maxwellschen Gleichungen für gleichartige Mittel und ihre Voraussetzungen. 1901. XII. 239
— — Über eine Erweiterung der Stefanschen Entwicklung der Maxwellschen Gleichungen für ungleichartige Mittel. 1902. XIII 136
— — Über die Herleitbarkeit einiger Hauptsätze der Potentialtheorie aus der Stefanschen Entwicklung der Maxwellschen Gleichungen. 1903. XIV . . 58
Kohn, Gustav, Wien. Über eine besondere Lagenbeziehung von zwei Oberflächen zweiter Ordnung. 1900. XI 102
— — Beweis eines Satzes über zwei kubische Raumkurven, welche dasselbe Tetraeder in gleicher Weise zum Schmiegungstetraeder haben. 1908. XIV. 301
Krause, M., Dresden. Zur Theorie der Eulerschen und Bernoullischen Zahlen 1903. XIV 305
Landau, Edmund, Göttingen. Über die Konvergenz einiger Klassen von unendlichen Reihen am Rande des Konvergenzgebietes. 1907. XVIII . . 8
Láska, Wenzel Johann, Lemberg. Über ein Problem der photogrammetrischen Küstenaufnahme. 1901. XII 172
Lewicki, Wladimir, Tarnopol. Beitrag zur Theorie der Modulgruppe. 1900. XI 118
— — Zur Theorie der Potenzreihen. 1901. XII 329
— — Beitrag zur Theorie der Modulgruppe (zweiter Aufsatz). 1903. XIV . 96
— — Laplaceschen Theorie der Saturnringe. 1903. XIV 283
Lerch, Matthias, Brünn. Zur Bestimmung des analytischen Existenzbereiches in der Theorie der elliptischen Funktionen. 1900. XI 107
— — Einiges über den Integrallogarithmus. 1905. XVI 115
— — Über einige Punkte der Theorie der Eulerschen Integrale. 1906. XVII . 3
— — II. 1908. XIX 119

Digitized by Google

Seite

Lorenz, Karl, St. Pölten. Die eigentlichen dreifachen Integrale. 1902. XIII . 4
Mack, Karl, Wien. Das Berührungsproblem für die allgemeine Regelschraubenfläche. 1906. XVII 314
Majcen, G., Agram. Über die Reliefprojektionen des Kreises. 1904. XV . . 329
Mandl, Julius, Wien. Zur Theorie der Flächen zweiter Ordnung. 1900. XI . 183
Meder, Alfred, Riga. Über das Verhalten einer Funktion von mehrerern Veränderlichen in der Umgebung einer Stelle, an welcher sie die Form $\frac{0}{0}$ hat. 1903. XIV 349
— — Über die Determinante von Wronski. 1906. XVII 19
— — Bemerkung zu zwei Sätzen v. Staudts. 1909. XX 186
Meyer, Franz Wilhelm, Königsberg i. Pr. Über Gebilde, die aus Tetraedern und Flächen zweiter Klasse zusammengesetzt sind. 1907. XVIII 138
Müller, Emil, Wien. Die einem Steinerschen Satze entsprechende algebraische Identität. 1903. XIV 182
Neuberg, J., Lüttich. Über orthologische Tetraeder. 1907. XVIII 212
Neumann, H., München. Konstruktion einer Fläche zweiter Ordnung F_2 aus neun ihr konjungierten Flächen zweiter Klasse φ_2. 1900. XI 114
Nielsen, Niels, Kopenhagen. Elementare Herleitung einiger Formeln aus der Theorie der Gammafunktion. 1904. XV 315
— — Notiz über den Integrallogarithmus. 1905. XVI 7
— — Über die Stirlingschen Polynome und die Gammafunktion. 1905. XVI 135
— — Über bestimmte Integrale mit der Prymschen Q-Funktion. 1906. XVII 47
— — Notiz über die Kugelfunktionen. 1906. XVII 222
— — Notiz über eine allgemeine Integralformel. 1906. XVII 281
— — Über das Produkt zweier Zylinderfunktionen. 1908. XIX 164
Obenrauch, Ferdinand Josef, Brünn. Die erste Raumkurve der Pythagoräischen Schule, ihre orthogonale und imaginäre Projektion. 1903. XIV . 187
Oekinghaus, Emil Wilhelm, Königsberg i. Pr. Die mathematische Statistik in allgemeinerer Entwicklung und Ausdehnung auf die formale Bevölkerungstheorie. 1902. XIII 294
— — Das ballistische Problem auf hyperbolisch-lemniskatischer Grundlage. 1904. XV 11
— — II. Teil. 1904. XV. 139
— — Die Rotationsbewegungen der Langgeschosse während des Fluges. I. Teil. 1907. XVIII 245
— — II. Teil. 1909. XX 55
Oppenheimer, Hermann, Neustadt a. H. (Rheinpfalz). Über die durch Punktpaarsysteme einer C_3 veranlaßten Kurven und ihre Zusammenhänge. 1901. XII 219
— — Über die Ausartungen der Schröterschen Konstruktion der ebenen Kurven dritter Ordnung. 1905. XVI 193
— — Über die einer ebenen Kurve dritter Ordnung um- und einbeschriebenen Vielecke. 1907. XVIII 71
— — Über Dreiecks- und Vieleckssysteme als Träger der Kurve dritter Ordnung. 1909. XX 141
Petr, K., Prag. Über die Ponceletschen Polygone. 1907. XVIII 108
Pexider, Hans Wilhelm, Bern. Notiz über Funktionaltheoreme. 1903. XIV . 293
Pick, Georg, Prag. Karl Bobek † (Nachruf gehalten in der Sitzung der Deutschen mathem. Gesellschaft in Prag am 20. Dezember 1899.) 1900. XI . . . 155
— — Über die zu einer ebenen algebraischen Kurve gehörigen transzendenten Formen und Differentialgleichungen. 1907. XVIII 219
— — Zur Theorie der hypergeometrischen Integrale am elliptischen Gebilde. 1907. XVIII 317
Plemelj, Josef, Czernowitz. Ein Satz über vertauschbare Matrizen und seine Anwendung in der Theorie linearer Differentialgleichungen. 1901. XII . . 82
— — Über Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit doppeltperiodischen Koeffizienten 1901. XII 203

Digitized by Google

Seite

Plemelj, Josef, Czernowitz. Über lineare Differentialgleichungen mit vertauschbarer Basis der Monodromiegruppe. 1902. XIII 119
— — Zur Theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung. 1904. XV . . . 93
— — Über lineare Randwertaufgaben der Potentialtheorie. 1901. XV . . . 337
— — II. Teil. 1907. XVIII 180
— — Ein Ergänzungssatz zur Cauchyschen Integraldarstellung analytischer Funktionen, Randwerte betreffend. 1908. XIX 205
— — Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe. 1908. XIX 211
Pölt, Hans, Dornbirn. Tafel der viergliederigen Gruppen in beliebig vielen Veränderlichen ohne dreigliedrige Involutionsuntergruppe. 1908. XIX . . 307
Pohl, J. T., †. Innsbruck. C. Arzelas Abhandlung: Sulle serie di funzioni, parte prima (Über die Funktionenreihen, I. Teil). 1906. XVI 54
— — (Schluß). 1906. XVI 250
Puzyna, Josef v., Krakau. Geometrisches in der Weierstraßschen Theorie der algebraischen Funktionen. 1909. XX 5
— — II. Teil. 1909. XX 193
Radaković, M., Czernowitz. Bemerkungen über die Summierung Fourierscher Reihen. 1905. XVI 321
Roth, Paul, Brünn. Über Beziehungen zwischen algebraischen Gebilden vom Geschlechte zwei und drei. 1907. XVIII 161
Rothe, Hermann, Wien. Über das Grundtheorem und die Obertheoreme der automorphen Funktionen im Falle der Hermite Laméschen Gleichung mit vier singulären Punkten. 1908. XIX 258
Saalschütz, Louis, Königsberg i. Pr. Über einen Produktausdruck, dessen Grenzwert die Basis der natürlichen Logarithmen ist. 1901. XII 325
— — Zur Lehre von den unter unbestimmter Form erscheinenden Ausdrücken. 1908. XIX 175
— — Die Darstellung der rationalen Brüche als Potenzsummen von $\frac{1}{2}$. 1909. XX 327
Schiffner, Franz, Wien. Die stereoskopische Reliefperspektive. 1901. XII . 177
Schmid, Theodor, Wien. Eine Aufgabe über trilinear verwandte Felder. 1903. XIV 345
— — Uneigentliche Projektion und Pilletsche Konstruktion. 1905. XVI . . 25
— — Bemerkung zur Aufgabe über trilinear verwandte Felder. 1905. XVI . 48
— — Bemerkung zur Eulerschen Gleichung. 1908. XIX 171
Schrutka, E. v. Rechtenstamm Lothar, Wien. Theorie der Polygonalreste. 1905. XVI 167
Schwarz, Adolf, Beneschau. Über die Krümmung der zyklischen Kurven nebst einem Beitrage zur neueren Dreiecksgeometrie. Nachtrag. 1900. XI 71
— — Einige auf die Ellipse sich beziehende Theoreme, in welchen die Sätze über konjugierte Durchmesser als Spezialfälle enthalten sind. 1901. XII 314
— — Untersuchungen über die Krümmung der Kegelschnitte. 1902. XIII . 185
Stolz, Otto, †, Innsbruck. Zum Existenzbeweis für das komplexe Integral. 1900. XI 64
— — Leopold Gegenbauer. Mit Kobald E. und Gmeiner. 1904. XV 1 und 129
Studnička, Franz Josef, †, Prag. Über binomische Fakultäten und deren Koeffizienten. 1903. XIV 125
Sucharda, Anton, Brünn. Eine Aufgabe, betreffend den Schwerpunkt der Polygone. 1901. XII 337
Tauber, Alfred, Wien. Über die unvollständigen Gammafunktionen. 1906. XVII. 207
Tietze, Heinrich, Wien. Über das Problem der Nachbargebiete im Raum. 1905. XVI 211
— — Über Funktionalgleichungen, deren Lösungen keiner algebraischen Differentialgleichung genügen können. 1905. XVI 329
— — Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten. 1908. XIX 1
— — Notiz zur Approximation von Potenzreihen durch rationale Funktionen. 1909. XX 285
Tuschel, Ludwig, Wien. Über eine krummlinige Projektion und deren Verwendung in der darstellenden Geometrie. 1909. XX 358

Digitized by Google

Seite
Vályi, J., Klausenburg. Über die Fußpunktsdreiecke. 1903. XIV 243
de Vries, Jan, Amsterdam. Über eine Abbildung der Ebene auf eine gewisse Kummersche Fläche. 1901. XII 45
Waelsch, E., Brünn. Wilhelm Weiß, nach einem Nachrufe. 1905. XVI . . 3
— — Binäranalyse zur Geometrie des Dreieckes. 1905. XVI 273
— — Über mehrfache Vektoren und ihre Produkte sowie deren Anwendung in der Elastizitätstheorie. 1906. XVII 241
— — Über Kugelfunktionen, ihre binären Formen und Vielbeine 1909. XX 289
Wagner, R., Innsbruck. Zur Theorie der freien Schwingungen einer rechteckigen Membran. 1909. XX 133
Walter, Alois, Graz. Über den Cauchy-Hadamardschen Satz vom Konvergenzradius, nebst einer Darstellung der Dedekindschen Irrationalzahlentheorie. 1901. XII 49
v. Weber, E., Würzburg Über die Beziehungen zwischen Kegelschnitten und Kreisen und die Theorie des Imaginären. 1905. XVI 217
Weiß, Wilhelm, Prag. Bemerkung über eine Abzählung der Wendepunkte algebraischer Kurven. 1900. XI 367
Wieleitner, H., Speier. Über zwei Familien von rationalen Kubiken. 1907. XVIII 132
Wirtinger, Wilhelm, Wien. Zum Hadamardschen Determinantensatz. 1907. XVIII 158
Zindler, Konrad, Innsbruck. Über Komplexkurven. 1900. XI 28
— — Über simultane gewöhnliche Differentialgleichungen, welche kontinuierliche Transformationsgruppen gestatten. 1900. XI 289
— — Zur Differentialgeometrie der Linienkomplexe. 1906. XVII 287
Zorawski, K., Krakau. Über infinitesimale Transformationen der Ebene, welche gewissen geometrischen Bedingungen genügen. 1901. XII 185

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

PERIODICAL

THIS BOOK IS DUE ON THE LAST DATE
STAMPED BELOW

RENEWED BOOKS ARE SUBJECT TO
IMMEDIATE RECALL

Library, University of California, Davis

Series 458A

Digitized by Google

PERIODICAL

Nº 536776

QA1
M74
v.20

Monatshefte für
Mathematik und
Physik.

PHYSICAL
SCIENCES
LIBRARY

536776

Monatshefte für
Mathematik und
Physik.

Call Number:

QA1
M74
v.20

U RNIA

Digitized by Google

Digitized by Google